Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Логика предикатов

Лекция 7

Определим *подформулы* формулы φ сигнатуры Σ:

1. если φ - атомарная формула, то φ - ее единственная подформула;
2. если φ имеет вид $\neg\varphi_1$, или $\forall x\varphi_1$, или $\exists x\varphi_1$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1;
3. если φ имеет вид $\varphi_1 \land \varphi_2$, или $\varphi_1 \lor \varphi_2$, или $\varphi_1 \to \varphi_2$, то подформула формулы φ - это либо φ, либо подформула формулы φ_1, либо подформула формулы φ_2;
4. других подформул формулы φ, кроме построенных по пп. 1, 2, 3, нет.

Пример 4. Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$, $\varphi = \forall x(\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z))$ - формула сигнатуры Σ. Тогда $\forall x(\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z))$, $\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z), \exists y(x = F(z, y)), x = F(z, y), P(z)$ - все подформулы формулы φ.

Говорят, что вхождение переменной x в формулу φ *связано* в φ, если оно находится в терме или предикате подформулы формулы φ вида $\forall x\psi$ или $\exists x\psi$; в противном случае это вхождение называется *свободным* в φ. Переменная x называется *свободной (связанной)*, если некоторое вхождение x в φ свободно (связано).

Пример 5. Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1. $P_1(x)$;
2. $P_2(x, y) \to \forall x P_1(x)$;
3. $\forall x(P_2(x, y) \to P_1(x))$.

Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной, в третьей – связанной; переменная y во всех формулах свободна.

Пример

Выписать все подформулы формулы φ, определить все свободные и связанные переменные этой формулы:

$$\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists z \exists y (x < y + z) \land ((z \cdot 2 = u) \to \forall u (u = x + z)).$$

Предложением или *замкнутой формулой* сигнатуры Σ называется формула сигнатуры Σ, не имеющая свободных переменных.

Запись $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ будет означать, что все свободные переменные формулы φ содержатся в множестве $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Истинность формулы логики предикатов в алгебраической системе

Дадим индуктивное определение *истинности формулы* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \dots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathfrak{A}=\langle \mathrm{A}, \Sigma \rangle$ (обозначаем $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$).

1) $\mathfrak{A} \vDash t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma) \Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{A}$ совпадают;

2) $\mathfrak{A} \vDash P(t_1(a_1, \dots, an), \dots, t_k(a_1, \dots, an))$, где $P^{(k)} \in \Sigma$, $t_1, \dots, t_k \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow (t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k(a_1, \dots, a_n)) \in P$;

3) $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an) \wedge \chi(a_1, \dots, an) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an)$ и $\mathfrak{A} \vDash \chi(a_1, \dots, an)$;

4) $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an) \vee \chi(a_1, \dots, an) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an)$ или $\mathfrak{A} \vDash \chi(a_1, \dots, an)$;

5) $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an) \to \chi(a_1, \dots, an) \Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an)$, то $\mathfrak{A} \vDash \chi(a_1, \dots, an)$;

6) $\mathfrak{A} \vDash \neg\psi(a_1, \dots, an) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, an)$;

7) $\mathfrak{A} \vDash \forall x \psi(x, a_1, \dots, an) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a, a_1, \dots, an)$ для любого $a \in A$;

8) $\mathfrak{A} \vDash \exists x \psi(x, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a, a_1, \dots, a_n)$ для некоторого $a \in A$.

Если не выполняется $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$, то будем говорить, что формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ *ложна* в системе $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1, \dots, a_n \in A$.

Пример

Записать формулу $\varphi(x)$, истинную в $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ на элементе a тогда и только тогда, когда a четно.

$$\varphi(x) \leftrightharpoons \exists y (x = y + y).$$

Пример

Записать формулу $\varphi(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ на кортеже $\langle a, b, c \rangle$ тогда и только тогда, когда c - наименьшее общее кратное чисел a и b.

$$\varphi(x, y, z) \leftrightharpoons \psi(x, y, z) \wedge \chi(x, y, z),$$

$$\psi(x, y, z) \leftrightharpoons \exists uv(z = x \cdot u \wedge z = x \cdot y)$$

$$\chi(x, y, z) \leftrightharpoons \forall w(\exists uv(w = x \cdot u \wedge w = x \cdot y) \rightarrow \exists w_1(w = w_1 \cdot z)).$$