ВВЕДЕНИЕ

Современная экономика широко использует математические методы, как для решения практических задач, так и для моделирования социально-экономических явлений и процессов. Математические модели являются важнейшим инструментом исследования и прогнозирования. Они представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации, дают более глубокие представления о закономерностях экономических процессов, способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне. Сегодня, в условиях глобализации мировой экономики и становления общества нового типа – информационного общества – математические модели становятся мощным инструментом прогнозов эволюции цивилизации, что позволяет определять оптимальные магистрали развития экономики, прежде всего в плане обеспечения жизнедеятельности человека. По мере дальнейшего развития общества все более и более важным является разработка путей совершенствования экономических отношений с точки зрения оптимального использования всех природных, производственных, материальных и трудовых ресурсов. Поэтому не случайно, что экономисты и математики, занимающиеся вопросами применения математики в экономике большое внимание уделяют разработке математических методов построения оптимальных планов, обеспечивающих выпуск необходимой продукции при минимальных затратах труда, на изучение закономерностей наиболее рационального распределения и использования ресурсов производства. Изучение закономерностей наиболее рационального распределения и использования ресурсов производства, выяснение условий и свойств оптимальности различных производственно-экономических процессов потребовало точного количественного выражения затрат и результатов производства, поставило вопрос конкретизации представлений о закономерностях общественного производства, о более точном выражении его важнейших экономических категорий. Использование математических методов и моделей актуально как на уровне деятельности фирмы в условиях рынка, так и в макроэкономике – на уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны.

В учебное пособие включены такие прикладные модели (модели спроса и потребления, модели производителя), в которых решается задача об оптимальном выборе, а также динамические модели экономического роста. Экономический рост можно рассматривать как увеличение объема создаваемых полезностей, а, следовательно, повышение жизненного уровня населения. Учебное пособие подготовлено в соответствии с программой дисциплины «Математическое моделирование экономических процессов и систем» для специальности « Математические методы в экономике» на основе Государственных образовательных стандартов. Отдельные темы данного учебного пособия могут быть использованы для специальностей « Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет и аудит», «Менеджмент», «Маркетинг», «Экономика и управление на предприятии», «Мировая экономика», «Управление персоналом» и других экономических специальностей. Это объясняется тем, что в пособии рассматриваются экономико-математические модели, общие для всех перечисленных специальностей.

1 НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Теоретической основой многих математических моделей являются предельные величины и их соотношения. Предельная или маржинальная величина определяется как производная для непрерывной функции $F(x)$ и обозначается $MF(x) = \frac{dF}{dx}$. Если функция $F(x)$ не является непрерывной, то под маржинальной величиной понимают отношение приращения функции к приращению аргумента $MF(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x}$, где $F(x)$ меняется дискретно. Если рассматривать функцию полезности, то ее производная будет называться предельной полезностью. В теории предельной полезности основным выводом является утверждение о том, что стоимость материальных благ определяется их предельной полезностью. Теория предельной полезности, объединенная с теорией предельной производительности факторов производства, теорией спроса и предложения охватывает важнейшие проблемы экономики. Их синтез осуществляется в рамках моделей равновесия, в которых делаются попытки связать воедино теорию производства, обмена, распределения и потребления. Предельный анализ выступает, прежде всего, как метод экономического анализа в предположении об оптимальном характере поведения исследуемой экономики, ее отдельных процессов и явлений. В экономике можно увидеть достаточно обширный набор моделей оптимального поведения. Например, в модели поведения потребителя предполагается, что он ищет максимум полезности. Модели фирмы основаны на предпосылке обеспечения максимума прибыли для предпринимателя. Модели рынка – на предпосылке оптимальных стратегий участников обмена. Модели общего равновесия – на предпосылке цен оптимального плана. Модели воспроизводства – на предпосылке оптимального роста. Предельные величины и их соотношения являются исходной основой анализа равновесия для условий свободной конкуренции и различных видов монополий. Основные идеи теории предельной полезности нашли наиболее полное отражение в модели поведения потребителя.

1.1 Модель поведения потребителя

1.1.1 Функция полезности и её характеристики

Модель поведения потребителя заключается в том, что каждый потребитель, осуществляя свой выбор различных наборов благ, при заданных ценах и имеющемся доходе, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей. Способность блага удовлетворять ту или иную потребность потребителя называют полезностью блага.

Сформулируем модель поведения потребителя. Рассматривается индивидуальный потребитель. Предполагается, что он может представлять собой определенный тип совокупного потребителя. Потребителю предлагается конечное число различных видов n благ. Любой набор благ описывается n- мерным вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \geq 0$ - количество i- го блага, приобретенного потребителем, $i = 1,2,...,n.$ Предполагается также, что потребитель способен упорядочить свое отношение к различным наборам благ и расположить их в порядке возрастания полезности. При этом потребитель руководствуется следующими аксиомами:

а) **ненасыщаемость**. Больший набор всегда предпочитается меньшему набору. Если $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) > \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то $\bar{x} \succ \bar{y}$;

б) с**овершенность.** В отношении двух наборов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ потребитель может однозначно определить, предпочитает он набор $\bar{x}$ набору $\bar{y}$, набор $\bar{y}$ предпочитает набору $\bar{x}$, или они для него равнозначны (эквивалентны). Совершенность отношения означает, что для любых двух наборов обязательно имеет место соотношение $\bar{x} \succ \bar{y},\ \bar{x} \prec \bar{y}$ или $\bar{x} \sim \bar{y}$. Это, в свою очередь, означает, что не существует таких наборов, которые потребитель не мог бы сравнить с другими;

в) **транзитивность.** Для трех наборов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ следует что, если $\bar{x} \succ \bar{y}$, а $\bar{y} \succ \bar{z}$, то $\bar{x} \succ \bar{z}$. Эта аксиома отражает совместимость (непротиворечивость) оценок потребителей;

г) **рефлексивность.** Потребитель всегда выбирает наиболее предпочтительный набор из существующих, который обеспечивает ему больший уровень удовлетворения потребностей.

После упорядочения отношений потребителя к различным наборам благ строится функция предпочтений или функция порядковой полезности. Функция полезности не является измерителем какой-то конкретной “полезности”, она лишь дает представление о ранжировании различных наборов благ, почему и называется функцией порядковой полезности. Порядковый подход к анализу полезности является наиболее распространенным. От потребителя не требуется, чтобы он умел соизмерять блага в каких-то искусственных единицах измерения. Достаточно, чтобы потребитель был способен упорядочить все возможные блага по их предпочтительности.

Таким образом, функция полезности является индикатором предпочтения, поскольку потребитель предпочитает выбирать набор $\bar{x}$, а не набор $\bar{y}$, если $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$. Значение функции полезности $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ на потребительском наборе $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ равно потребительской оценке индивидуума для этого набора.

Потребительскую оценку $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ набора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют уровнем или степенью удовлетворения потребностей индивидуума, если он приобретает или потребляет набор $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Отсюда следует, что потребитель при выборе набора благ стремится максимизировать свою функцию полезности. Она рассматривается как некоторая монотонно возрастающая функция, определенная на множестве потребительских наборов. Функция полезности $u(x)$, упорядочивающая совокупности наборов благ по степени предпочтения, для каждого потребитель своя.

Геометрическим образом функции полезности является гиперповерхность в $n+1-$ мерном пространстве, где n измерений образуют блага, $n+1$ измерение характеризует полезность каждого из соотношений благ при потреблении. В экономическом анализе, часто используются некоторые конкретные виды функций полезности, причем подбор вида функций и оценка числовых значений параметров производится на основе наблюдений и анализа поведения потребителей и тенденций покупательского спроса в зависимости от уровня благосостояния. В таблице 1 приведены некоторые типы функций полезности.

Таблица 1

Тип функции полезности	Функция полезности	Ограничения
Логарифмическая	$u(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_j$	$\alpha_j > 0$, $x_j > 0,\ j = 1,..,n$
Мультипликативная	$u(\bar{x}) = a\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$	$0 < \alpha_j < 1;\ \ x_j \geq 0$, $j = 1,..,n;\ \ a > 0$
Аддитивная	$u(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^{\beta_j}$	$\alpha_j > 0;\ \ x_{ij} \geq 0$, $0 < \beta_j < 1;\ \ j = 1,..,n$
Квадратичная	$u(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$	$a_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_j > 0$, $j = 1,..n$, $B = (b_{ij})$ -отрицательно определённая матрица

Предельный анализ функции полезности.

Частная производная производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции полезности $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются предельной полезностью i- го блага и обозначают $M_i u$, $i = 1,2,...,n$. Предельная полезность i - го блага показывает, на сколько единиц изменится полезность набора благ, если количество потребляемого i - го блага изменится на единицу (“малую единицу”).

Вектор, составленный из частных производных функции полезности $\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, называют вектором предельных полезностей. Известно, что такой вектор называют градиентом. Он показывает направление наибольшего роста значений функции.

Предельные полезностные оценки характеризуют потребительскую стоимость товаров. Количественное выражение отклонения цены от стоимости есть мера отклонения полезности от стоимости. В основе экономического содержания цены равновесия, а значит, и данного соотношения спроса и предложения, лежит соотношение стоимости и полезности. При строгой пропорциональности общественного производства общественным потребностям цена равновесия будет равна стоимости и предельные полезностные оценки будут им пропорциональны.

Свойства функции полезности.

Рассмотрим функцию полезности двух переменных $u = u(x_1, x_2)$ и будем предполагать, что она дважды дифференцируема и строго вогнута. Сформулируем свойства функции полезности:

- с ростом потребления одного из блага и при постоянном потреблении другого блага полезность растет. Функция полезности является возрастающей по любому ее аргументу, и ее частные производные, определяющие предельную полезность благ, всегда положительны $Mu_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0,\ i = 1{,}2$;

- небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$;

- предельная полезность каждого блага уменьшается, если объем его потребления растет. Другими словами - с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется, то есть каждая дополнительная единица приобретенного блага используется менее эффективно. В этом случае вторые производные функции полезности отрицательны $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$, $i = 1{,}2$. Это свойство называют еще законом Госсена или законом убывающей предельной полезности;

- при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности: $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$;

- предельная полезность каждого блага увеличивается, если растет объём потребления другого блага. В этом случае смешанные производные второго порядка функции полезности положительны: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > 0$. Здесь благо, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным, поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и используется более эффективно. Данное свойство справедливо лишь для благ, не являющихся полностью замещаемыми в потреблении.

Графический анализ функции полезности.

Рассмотрим функцию полезности двух переменных.

Определение. Линией уровня функции $u = u(x_1, x_2)$ называют геометрическое место точек плоскости, в которых функция принимает одно и тоже постоянное значение равное g, то есть $u(x_1, x_2) = g$.

Построим линию уровня для функции $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ (рисунок 1).

Для построения линии уровня, график функции $u = u(x_1, x_2)$ пересечем плоскостью P параллельной плоскости $x_1 0 x_2$ на высоте g. В результате пересечения получим плоскую горизонтальную линию L_g, которая как бы "зависает" над плоскостью $x_1 0 x_2$ на высоте g. Проектируя линию L_g на плоскость $x_1 0 x_2$, получим линию уровня l_g, представленную на рисунке 1. Поскольку g может принимать различные значения, то функция $u = u(x_1, x_2)$ имеет много линий уровня. Совокупность всех линий уровня функции $u = u(x_1, x_2)$ называют картой линий уровня. По карте линий уровня можно получить довольно точное представление о характере графика функции.

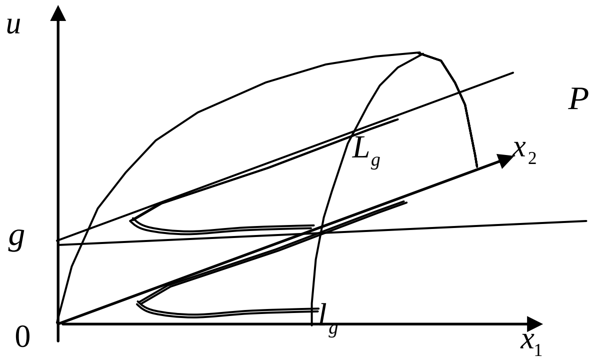


Рисунок 1- Линия уровня

Кривые безразличия.

Для функции полезности линии уровня называют кривыми (или линиями) безразличия.

Определение. Кривая безразличия представляет собой геометрическое место точек плоскости, каждая из которых представляет собой такую комбинацию материальных благ, которая обеспечивает одну и ту же полезность, и потребителю безразлично какую из точек на данной кривой выбирать.

С помощью кривых безразличия ранжируется порядковая полезность комбинаций благ, но не дается количественное выражение самой полезности. Они лишь указывают, что величина полезности возрастает при переходе от менее предпочтительных наборов к более предпочтительным. Таким образом, кривые безразличия являются графическим представлением порядковой полезности.

Типы кривых безразличия.

В зависимости от вида функций полезности различают различные типы кривых безразличия:

а) линейная функция полезности с полным взаимозамещением благ $u = ax_1 + bx_2$, где a и b - параметры. Уравнение кривой безразличия для линейной функции имеет вид $x_2 = \dfrac{u - ax_1}{b}$, а график представлен на рисунке 2;

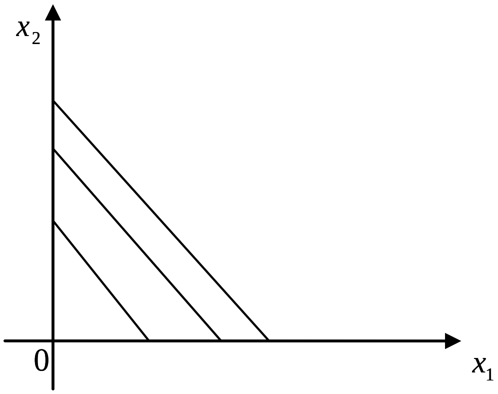


Рисунок 2- Кривые безразличия линейного типа

б) неоклассическая (мультипликативная) функция полезности $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha + \beta \le 1$. Уравнение кривой безразличия этого типа имеет вид $x_2 = \left(\frac{u}{x_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$. График кривой безразличия для функции полезности неоклассического типа представлен на рисунке 3;

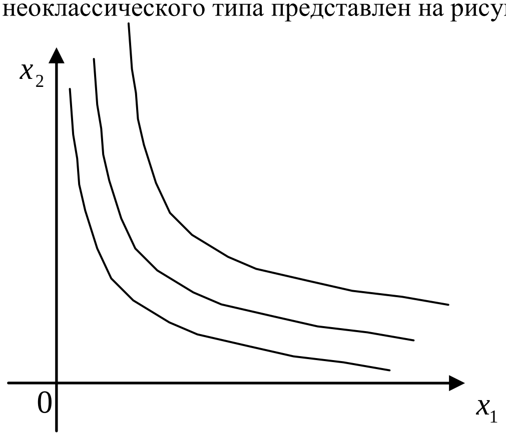


Рисунок 3- Кривые безразличия неоклассического типа

в) функция полезности с полным взаимодополнением благ имеет кривые безразличия в виде точки на пересечении двух прямых. Избыток одного блага не имеет значения. Полезность достигается лишь при определенной комбинации благ $u = \min\left(\frac{x_1}{a}; \frac{x_2}{b} \right)$. График кривой безразличия для функции с полным взаимодополнением благ представлен на рисунке 4.

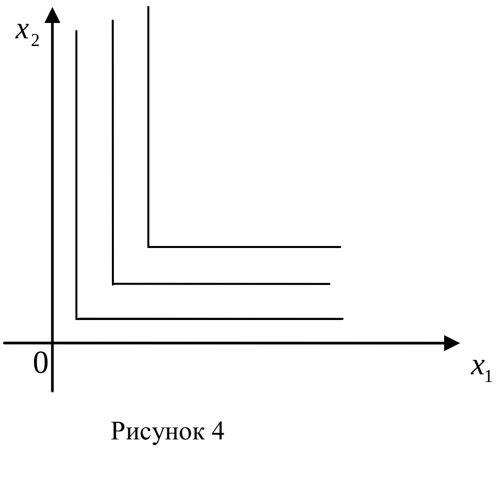


Рисунок 4

Свойства кривых безразличия.

Перечислим свойства кривых безразличия:

- на основании первой аксиомы поведения потребителя кривая безразличия, лежащая выше и правее другой кривой, представляет собой более предпочтительные наборы благ;

- кривые безразличия никогда не пересекаются, то есть через любую точку на карте можно провести только одну кривую безразличия. В противном случае один и тот же набор благ одновременно соответствовал бы нескольким разным уровням материального благосостояния;

- кривые безразличия имеют отрицательный наклон и вогнуты (вытекает из строгой вогнутости функции полезности).

Покажем, что кривая безразличия является убывающей и вогнутой функцией.

Кривую безразличия, заданную соотношением $u(x_1, x_2) = g$ можно рассматривать как функцию $x_2 = f(x_1)$. На кривой безразличия возьмем произвольную точку (x_1, x_2), для которой $u(x_1, x_2) = g$. Переменным x_1 и x_2 дадим малые приращения Δx_1 и Δx_2 такие, чтобы точка $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ так же лежала на этой кривой, то есть $u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = g$, тогда $u(x_1, x_2) = u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ или $u(x_1, x_2) - u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = 0$. Правая часть равенства представляет собой полное приращение функции $u(x_1, x_2)$ и оно равно нулю. Так как $\Delta x_1 \to 0$ и $\Delta x_2 \to 0$, то полный дифференциал функции $u(x_1, x_2)$ равен нулю, то есть $du = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Отсюда найдем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} < 0.$$

Это значит, что кривая безразличия является убывающей функцией.

Найдем вторую производную функции $x_2 = f(x_1)$:

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)' = \frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = \left(-\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}}\right)' = -\frac{u''_{x_1x_1} \cdot u'_{x_2} - u'_{x_1} \cdot u''_{x_2x_1}}{(u'_{x_2})^2} > 0.$$

Положительность второй производной следует из свойств функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u'_{x1} > 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = u'_{x2} > 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u''_{x1x1} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u'_{x_2x2} < 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u'_{x1x2} > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u''_{x2x1} > 0.$$

Вторая производная функции $x_2 = f(x_1)$ положительна и, следовательно, кривые безразличия вогнуты.

Предельная норма замещение благ.

Определение. Величина

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}, \tag{1}$$

показывает, на сколько единиц увеличится (уменьшится) потребление второго блага, при уменьшении (увеличении) первого блага на единицу без изменения функции полезности, $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ обозначается MRS (marginal rate of substitution) и называется предельной нормой замещения первого блага вторым благом.

Из формулы (1) следует, что предельная норма замещения благ равна обратному соотношению их предельных полезностей. Знак минус говорит о том, что предельная норма замещения благ есть величина убывающая и увеличение количества одного блага приводит к уменьшению количества другого блага.

Бюджетное ограничение.

Кривые безразличия, ранжируя порядковую полезность комбинаций благ по степени их предпочтения, сами по себе не содержат достаточной информации для определения поведения потребителя, не дают количественного выражения самой полезности. Нужны еще сведения о потребительском доходе и рыночных ценах.

Информация о ценах и доходе задается бюджетной линией или линией цен. Уровень бюджетной линии отражает ограничения в доходе, а ее наклон - соотношение цен.

Определение. Бюджетным множеством называется множество всех наборов благ, которые может приобрести потребитель, имея доход I. Бюджетное множество описывается неравенством

$\overline{p}\cdot\overline{x}\le I$, где $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$ - вектор цен, $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ - вектор благ.

Определение. Бюджетная линия – геометрическое место точек всех комбинаций благ, стоимость которых равна определенной сумме. Она характеризует реальную покупательскую способность потребителя благ и соотношение цен этих благ.

Для пространства двух благ, например, в виде двух агрегированных товаров, при постоянных ценах на оба блага бюджетная линия обладает следующими свойствами:

- является прямой линией $p_1x_1+p_2x_2=I$;

- имеет отрицательный наклон $\frac{dx_2}{dx_1}\le 0$;

-наклон равен обратному соотношению цен благ, взятому с обратным знаком. Действительно, выразив $x_2=\frac{I-p_1x_1}{p_2}$, найдем $\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{p_1}{p_2}$.

1.1.2 Задача о максимальном выборе потребителя.

В основе модели поведения потребителя лежит утверждение о том, что при установленных ценах и имеющемся доходе потребитель стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей, то есть получить максимум полезности.

Сформулируем задачу о максимальном выборе потребителя. Имеется потребитель с определенным доходом I, предназначенным для приобретения набора благ $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ по ценам $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$ соответственно. Ограниченность возможного выбора потребителя выражается с помощью бюджетного ограничения:

$$\overline{p}\cdot\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\le I.$$

Требуется найти максимум функции полезности $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$.

Оптимальный набор $\overline{x}^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ должен удовлетворять бюджетному ограничению, как точному равенству. Действительно, если бы оптимальный набор достигался при условии $\overline{p}\cdot\overline{x}<0$, то потребитель мог бы купить на оставшиеся деньги некоторое количество блага и тем самым улучшить свой набор с большей полезностью.

Можно определить математические условия оптимальности решений для модели поведения потребителя. Очевидно, что задача о максимальном выборе потребителя сводится к обычной задаче отыскания условного экстремума целевой функции полезности. Решение этой задачи на условный экстремум находится при помощи метода множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа относительно x_i и λ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I\right),$$

где множитель Лагранжа λ является оптимальной оценкой дохода.

Необходимые условия оптимальности решения определяются системой ограничений ($i = 1,2,..., n$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = I. \end{cases}$$

Это означает, что потребители должны выбирать блага таким образом, чтобы отношение предельной полезности благ к их цене были одинаковыми для всех приобретенных благ. Другими словами, в оптимальном наборе благ предельные полезности выбираемых благ должны быть пропорциональны ценам: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i$.

Оптимальный набор благ $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ получают, решив систему ограничений. При этом оптимальное значение множителя Лагранжа λ^* называют предельной полезностью денег и объясняют как прирост полезности при увеличении дохода на малую единицу. Таким образом, множитель Лагранжа является оптимальной оценкой дохода.

Пример. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ при бюджетном ограничении $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Найдем набор благ, при котором полезность максимальна.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \ln x_1 + \ln x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) .$$

Необходимые условия максимальности решения определяются системой ограничений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{1}{x_2} = \lambda p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = \lambda p_1; \\ \dfrac{1}{x_2} = \lambda p_2; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Решим эту систему.

Оптимальное решение имеет вид $x_1^* = \dfrac{1}{\lambda p_1}$, $x_2^* = \dfrac{1}{\lambda p_2}$, тогда, подставив оптимальное решение в бюджетное ограничение, получим λ^*: $p_1 \dfrac{1}{\lambda p_1} + p_2 \dfrac{1}{\lambda p_2} = I$, $\dfrac{2}{\lambda} = I$, тогда $\lambda^* = \dfrac{2}{I}$.

Набор благ, соответствующий максимальному спросу и при котором достигается максимальная полезность, равен $x_1^* = \dfrac{I}{2p_1}$, $x_2^* = \dfrac{I}{2p_2}$. Как видно из данного решения, оптимальный набор потребителя имеет естественный вид: количество потребляемого блага прямо пропорционально доходу I и обратно пропорционально его цене.

Пример. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$. Требуется найти при заданных ценах p_1, p_2 и доходе I максимальную функцию спроса.

Решение. Функция $u(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$ означает, что излишки первого или второго товара сверх отношения 2:1 не приносят пользы потребителю. Он получает большую пользу только при увеличении обоих товаров в пределах сохранения пропорции 2:1. Товары с такой функцией полезности называются взаимодополняемыми. Решение данной задачи состоит в решении системы

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Ее решение есть $x_1^* = \dfrac{2I}{2p_1 + p_2}$, $x_2^* = \dfrac{I}{2p_1 + p_2}$.

Замечание. В более реалистических вариантах задачи максимального выбора потребителя при помощи дополнительных условий могут быть учтены ограничения по ассортименту потребительских благ, возможность замены благ и др.

Геометрическая интерпретация модели заключается в том, что максимальная полезность достигается в точке касания самой высокой кривой безразличия с бюджетной линией. Такая точка называется точкой равновесия. В этой точке наклон бюджетной линии и кривой безразличия равны. Так как наклон бюджетной линии равен обратному соотношению цен, а наклон кривой безразличия равен обратному соотношению предельных полезностей, то равенство соотношения цен соотношению предельных полезностей существует только в точке равновесия. Таким образом, дополнительная полезность, приходящаяся на дополнительную единицу денежных затрат, в точке оптимума одинакова по всем видам благ.

При оптимальном выборе благ выполняются:

- отношение предельных полезностей благ в точке оптимального выбора равно отношению цен этих благ

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}, \quad i, j = 1,2,..,n, \quad i \neq j; \qquad (2)$$

- предельные полезности благ пропорциональны их ценам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda^* p_i.;$$

- предельная полезность, падающая на денежную единицу должна быть одной и той же для всех покупаемых благ:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} : p_i = \frac{\partial u}{\partial x_j} : p_j = \lambda^*;$$

- равные предельные полезности на расходуемые денежные единицы равны предельной полезности денег λ^*;

- предельные полезности денежной единицы для лиц с разным уровнем дохода различны (λ^* уменьшается с ростом дохода и возрастает с падением дохода).

1.2 Моделирование покупательского спроса

1.2.1 Функции спроса и их характеристики.

В результате решения задачи о максимальном выборе потребителя оказывается возможным проследить связь между изменением системы цен и доходов групп потребителей с одной стороны и спросом этой группы потребителей на различные виды благ (товары и услуги) с другой стороны и построить, таким образом, функцию оптимального спроса.

Определение. Функциями спроса называются функции, отражающие зависимость объема спроса на различные виды благ от комплекса факторов, влияющих на него. Такие функции применяются в аналитических моделях спроса и потребления и строятся на основе информации о структуре доходов населения, ценах на товары и услуги, составе семей и других факторов.

Рассмотрим построение функций спроса в зависимости от двух факторов - дохода и цен. Пусть в модели поведения потребителя цены $p_1, p_2,.., p_n$ и доход I рассматриваются как меняющиеся параметры.

Условие $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \dfrac{p_i}{p_j}$ обуславливает примерные оценки отношения рыночных цен, при известных конечных изменениях объемов благ в потребительском наборе, приобретаемом потребителем. Причем координаты $(x_1^*, x_2^*,.., x_n^*)$ решения задачи потребительского выбора – это функции параметров $p_1, p_2,.., p_n$ и I. Тогда решением оптимизационной задачи будет функция спроса по каждому благу $x_i^* = f(p_1, p_2,.., p_n, I)$, $i = 1,2,.., n$. Важным свойством функций спроса является то, что их значения инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода (если все цены и доход изменяются, величина спроса на благо остается неизменной).

В общей форме функцию спроса можно представить в виде

$$D_i = x_i = f(p_1, p_2,.., p_n, I).$$

В ряде случаев функции спроса имеют простой вид и зависят от вида функция полезности. Однако, в подавляющем большинстве случаев, конкретная форма функции спроса определяется путем статистической обработки результатов специальных наблюдений за доходами и расходами представителей различных социальных групп.

Предельный спрос. Эластичность спроса.

Если функция спроса является функцией одной переменной (цены или дохода), то предельным спросом называют ее первую производную относительно цены или дохода $\frac{dD}{dp}$ или $\frac{dD}{dI}$, которая показывает, как изменится спрос, если цена или доход изменятся на единицу.

Эластичность функции – это относительная производная, которая определяется как предел (если он существует) отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента, когда приращения аргумента стремится к нулю.

Получим формулу эластичности спроса по цене $E_p(D) = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D}{D} : \frac{\Delta p}{p} = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta p} \cdot \frac{p}{D} = \frac{p}{D} \cdot \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta p} = \frac{p}{D} \cdot \frac{dD}{dp}$.

Эластичность спроса по цене показывает на сколько процентов изменится спрос, если цена изменятся на один процент.

Аналогично можно получить форму эластичности спроса по доходу: $E_I(D) = \frac{I}{D} \cdot \frac{dD}{dI}$.

Эластичность спроса по доходу показывает на сколько процентов изменится спрос, если доход изменятся на один процент. Если функция спроса является функцией нескольких переменных, то предельным спросом называют ее первые частные производные. Например, предельный спрос относительно цены p_i $\frac{\partial D_i}{\partial p_i}$ показывает, как изменится спрос на i - е благо, если цена на него изменится на единицу при неизменной цене на другие блага.

Частные эластичности спроса на i - е благо относительно цены i -го блага, $E_{ii} = \frac{p_i}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_i}$, показывают на сколько процентов изменится спрос на i - е благо, если цена на него изменится на один процент, при неизменной цене на другие блага.

Частные эластичности спроса на i - е благо относительно цены j - го блага, $E_{ij} = \frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j}$, показывают на сколько процентов изменится спрос на i - е благо, если цена j - го блага изменится на один процент, при неизменной цене i - го блага.

Эластичность спроса на i - е благо относительно дохода $E_i = \frac{\partial D_i}{\partial I} : \frac{D_i}{I}$ показывает на сколько процентов изменится спрос на i -е благо, если доход изменится на один процент.

В результате изучения функции спроса устанавливаются классификационные признаки благ:

- если для некоторых благ выполняется условие $\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0$, то они называются нормальными, так как спрос на них снижается по мере увеличения цены;

- если для некоторых благ выполняется условие $\frac{\partial D_i}{\partial p_i} > 0$, то они называются аномальными или товарами Гиффина, так как при увеличении цены спрос на них также увеличивается;

- если для некоторых благ выполняется условие $\frac{\partial D_i}{\partial I} > 0$, то они называются ценными, так как при увеличении дохода спрос на них растет.

- если для некоторых благ выполняется условие $\frac{\partial D_i}{\partial I} < 0$, то они называются малоценными, так как спрос на них снижается по мере увеличения дохода.

Функция спроса по цене.

При фиксированном доходе и в практических целях для нормальных товаров используются, как правило, функции спроса двух видов:

а) линейная функция спроса

$$D_i(p_i) = a_0 - a_1 p_i ,$$

где $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ - статистически оцениваемые параметры модели;

б) степенная функция спроса

$$D_i = a_0 p_i^{-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1.$$

Для линейной функции спроса эластичность спрос по цене вычисляется по формуле

$$E_{ii} = -\frac{a_1 \bar{p}}{\bar{D}},$$

где $\bar{p}$ - среднее значение цены;

$\bar{D}$ - среднее значение спроса по использованной выборке.

Очевидно, что для степенной функции спроса $E_{ii} = \alpha$.

Если коэффициент эластичности близок к нулю $E \approx 0$, то спрос на благо практически не зависит от его цены. В этом случае говорят, что спрос неэластичен по цене. Это относится в основном к предметам первой необходимости.

Спрос называется нормально эластичным, если $E \approx 1$, что имеет место для товаров длительного пользования.

Для предметов роскоши обычно $E > 1$, то есть спрос является эластичным.

Функция спроса по доходу.

При постоянных ценах блага различаются по характеру изменения спроса в зависимости от величины дохода *I*. Благо i называется ценным (или товаром высшего ряда), если

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} > 0,$$

то есть спрос на него возрастает по мере перехода от менее доходных групп потребителей к более доходным. Для малоценного блага имеет место противоположное неравенство

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} < 0,$$

что означает вытеснение этого блага из потребительского набора группы потребителей по мере увеличения ее категории доходности. Рассмотрим следующие функции спроса по доходу:

а) степенная функция спроса по доходу (функция Энгеля)

$$D = aI^{\gamma}.$$

Здесь показатель γ имеет смысл коэффициента эластичности, так как он показывает, на сколько процентов увеличится спрос на благо, если доход увеличится на один процент. Коэффициент эластичности спроса от дохода находится по следующей формуле

$$E_I(D) = \frac{I}{D} \cdot \frac{dD}{dI}.$$

Для предметов первой необходимости показатель $\gamma < 1$, то есть при увеличении дохода дополнительные затраты на эти товары этой категории составляют все убывающую долю. Для предметов длительного пользования показатель эластичности γ приблизительно равен 1, что означает примерное постоянство доли расходов на эти предметы в дополнительном доходе. Для предметов роскоши показатель эластичности $\gamma > 1$. Это означает, что при значительном увеличении дохода все большая часть его прироста тратится именно на предметы этой группы;

б) функции спроса по доходу Торнквиста

Разделение потребляемых благ и услуг на ряд различных групп получило развитие далее при конструировании так называемых функций Торнквиста.

Для товаров первой необходимости эта функция определяется в виде:

$$D_1 = \frac{a_1 I}{I + b_1},$$

где a_1, b_1 - параметры модели.

Заметим, что при очень большом доходе, условно представляемом как $(I \to \infty)$, величина спроса $D_1 \to a_1$, что выражает факт асимптотического насыщения потребителя предметами первой необходимости.

Функция спроса Торнквиста для товаров длительного пользования имеет вид:

$$D_2 = \frac{a_2 (I - I_2)}{I + b_2}, \text{ если } I \geq I_2,$$

где a_2, b_2 - параметры модели,

Спрос на эти товары возникает лишь с некоторого (достаточно высокого) уровня дохода I_2. Если $I < I_2$, то $D_2 = 0$.

Как видно, спрос на товары этой группы также имеет асимптотическую тенденцию к насыщению, поскольку $\lim\limits_{I \to \infty} D_2 = a_2$.

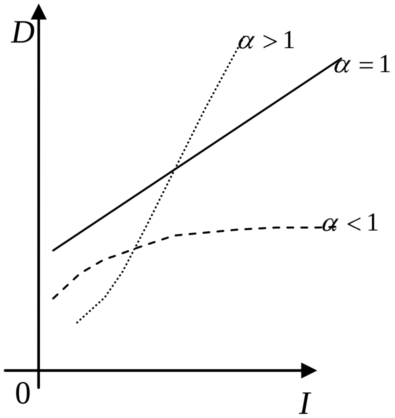
Для предметов роскоши используется формула, в которой отсутствует тенденция к насыщению, а спрос начинается с еще более высокого уровня дохода I_3:

$$D_3 = \frac{a_3 I (I - I_3)}{I + b}, \text{ если } I \geq I_3;$$

$$D_3 = 0, \text{ если } I < I_3.$$

Легко видеть, что при достаточно больших значениях дохода I $D_3 \approx a_3 I$, то есть при $I \to \infty$, $D_3 \to \infty$.

Это означает, что в этой ситуации практически весь прирост дохода тратится на предметы роскоши. Графическое изображение функций Энгеля и Торнквиста для трех групп товаров представлено соответственно на рисунке 6 и рисунке 7.



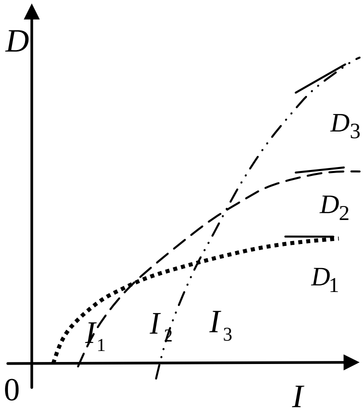


Рисунок 6-Кривые Энгеля Рисунок 7-Кривые Торнквиста

1.2.2 Модель Стоуна

Найдем функцию спроса для конкретной функции полезности (функции потребительского предпочтения), называемой функцией Стоуна и имеющей вид:

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \to \max , \qquad (3)$$

где a_i – необходимое минимальное количество i – го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора.

Для того чтобы набор $\bar{a}_i = (a_1, a_2, .., a_n)$ мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход I был больше общего количества денег, необходимого для покупки этого набора, то есть $I > \sum_i p_i a_i$. Показатели степени $\alpha_i > 0$ характеризуют относительную “ценность ” благ для потребителя.

Добавив к целевой функции (3) бюджетные ограничения получим модель Стоуна:

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \to \max ,$$

$$\sum_i p_i x_i \le I, \quad x_1 \ge 0, .., x_n \ge 0 .$$

Для того чтобы найти функции спроса, составим функцию Лагранжа $L(x_1, x_2,.., x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} + \lambda(\sum_i p_i x_i - I)$, найдем ее частные производные первого порядка по x_i и приравняем к нулю: $\frac{\alpha_i \cdot u(x_1, x_2,.., x_n)}{(x_i - a_i)} + \lambda \cdot p_i = 0$, откуда

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i \cdot u(x_1, x_2,.., x_n)}{\lambda \cdot p_i}. \qquad (4)$$

К этим условиям добавляем равенство $\sum_i p_i x_i - I = 0$, выполнение которого эквивалентно равенству нулю частной производной функции Лагранжа по переменной λ. Умножив каждое $i-$е условие на $\lambda \cdot p_i$ и просуммировав их по i, получим

$$\sum_i \alpha_i \cdot u(x_1, x_2,.., x_n) + \lambda \sum_i p_i \cdot x_i - \lambda \sum_i p_i \cdot a_i = 0.$$

Поскольку в точке оптимума бюджетное ограничение выполняется как равенство $\sum_i p_i x_i = I$, заменим $\sum_i p_i x_i$ на I и получим

$$\frac{u(x_1, x_2,.., x_n)}{\lambda} = -\frac{I - \sum_i p_i a_i}{\sum_i \alpha_i}.$$

Тогда любое x_j, $j = 1,2,..., n$, учитывая (4) найдем по формуле

$$x_j = a_j + \frac{\alpha_j \cdot (I - \sum_i p_i \cdot a_i)}{p_j \cdot \sum_i \alpha_i}. \qquad (5)$$

Из полученной функции видно, что вначале приобретается минимально необходимое количество каждого блага a_j, а затем рассчитывается сумма денег, остающаяся после этого и которая распределяется пропорционально “весам” важности a_j. Разделив количество денег на цену p_j, получаем дополнительно приобретаемое, сверх минимума, количество $j-$го блага и прибавляем его к a_j.

Если в модели Стоуна все $a_j = 0$, а все α_i равны между собой, тогда получаем

$$x_j = \frac{I}{n \cdot p_j}, \qquad (6)$$

то есть доход делится на n равных частей и спрос на j – е благо рассчитывается как частное от деления полученной суммы денег на ее цену. Из формулы (6) видно, что спрос растет при росте дохода с эластичностью, равной единице, и уменьшается с ростом цены с эластичностью, равной минус единице. Тем самым каждое благо в этой модели является нормальным и ценным. Кроме того, спрос растет до бесконечности при бесконечном росте дохода $\lim\limits_{I \to \infty} \frac{I}{n \cdot p_j} = \infty$ - в этом случае каждое благо является предметом роскоши.

Для того чтобы описать более разнообразные формы поведения спроса на различные блага, модель должна включать другие, более сложные виды целевой функции полезности.

Например, если функция полезности задана выражением $u(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^{b-a} \cdot (x_1 + b - a)^{-b}$, где $a, b -$ параметры, функция спроса имеет вид:

$$x_1 = \frac{aI}{I + bp_1} \text{ -для предметов первой необходимости;}$$

$$x_2 = \frac{I(I + p_1(b - a))}{I - bp_1} \text{ - для предметов роскоши.}$$

Взаимозаменяемость благ и эффекты компенсации.

Если функция спроса имеет вид $x_j = \frac{I}{n \cdot p_j}$ или, если α_j не равны между собой, $x_j = \frac{I\alpha_j}{p_j \sum\limits_i \alpha_i}$, то спрос на j - е благо не зависит от цены на любое i - е благо. Перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства благ, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на i - е благо и снижении спроса на него, растет спрос на j - е благо - то эти два блага взаимозаменяемы. Если же спрос на j - е благо также падает, то эти два блага – взаимодополняемы.

Реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижением благосостояния при росте цены i - го блага: j - е благо может заменять i - е в потреблении, но спрос на него, может, не расти, поскольку снизилось общее благосостояние потребителя. Для того чтобы избавится от этого искажения, используют понятие компенсированного изменения цены, т.е. такого изменения, которое сопровождается увеличением дохода потребителя для поддержания прежнего уровня благосостояния. Рассмотрим компенсированное изменение цены на графике (рисунок 5).

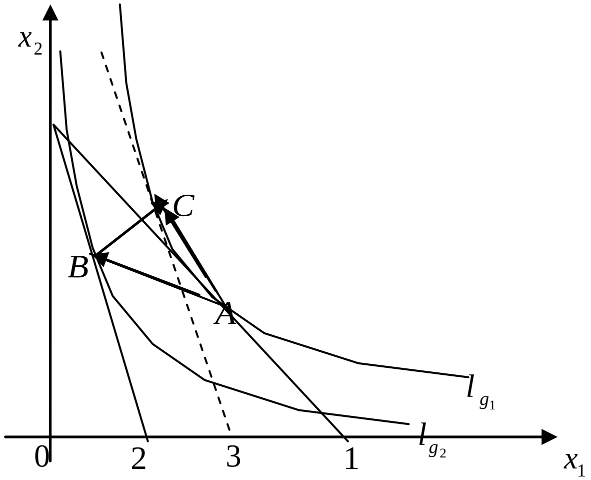


Рисунок 5- Компенсированное изменение цены

Пусть цена первого блага повысилась с p_1^1 до p_1^2, тогда бюджетная прямая из положения 1 перейдет в положение 2. Точка равновесия A на кривой безразличия l_{g_1}, в которой достигался первоначальный максимум полезности, будет заменена новой точкой равновесия B (точка касания новой линии безразличия l_{g_2} и новой бюджетной прямой). Чтобы компенсировать потребителю потерю благосостояния, надо увеличить его доход так, чтобы новая бюджетная прямая 3, параллельная бюджетной прямой 2, коснулась в некоторой точке C прежнюю линию безразличия l_{g_1}. Вектор AC показывает “эффект замены” при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Вектор CB отражает “эффект дохода”, то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается вектор AB.

Для анализа компенсационных эффектов рассмотрим примеры.

Пример. Пусть целевая функция полезности зависит от двух благ, x_1 и x_2, и имеет вид: $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max$. Пусть цены благ равны соответственно, p_1=10 и p_2=2, а доход потребителя равен I = 60. Требуется определить необходимый размер компенсации.

Решение. Согласно формуле функция спроса $x_i = \dfrac{I}{n \cdot p_i}$, тогда получим $x_1 = \dfrac{60}{2 \cdot 10} = 3$, $x_2 = \dfrac{60}{2 \cdot 2} = 15$, $u^* = 45$. Пусть теперь p_2 меняется с 2 до 7. Чтобы приобрести прежний оптимальный набор, потребителю необходимо дополнительно $(7-2) \cdot 15 = 75$ денежных единиц. Однако прежняя структура потребления не будет оптимальной при новых ценах, и необходимая минимальная компенсация будет меньше, чем 75. Пусть потребитель получает дополнительно количество денег *M*. Тогда при новых ценах его спрос на первое и второе блага равен: $x_1 = \dfrac{60+M}{2 \cdot 10}$; $x_2 = \dfrac{60+M}{7 \cdot 2}$.

Целевая функция будет равна $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{(60+M)^2}{10 \cdot 7 \cdot 4}$, и это выражение должно равняется начальному $u^* = 45$. Отсюда $M \approx 52{,}25$, что существенно меньше, чем 75.

Пример. Пусть целевая функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, цены благ равны p_1 и p_2, а доход *I*. Очевидно,

$$x_i = \frac{I}{2p_i}; \ \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2}; \ \frac{\partial x_i}{\partial I} = -\frac{1}{2p_i}; \ \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0.$$

Пусть теперь p_1 выросла в z раз $(z > 1)$, и при этом потребитель получает необходимую компенсацию. Новый размер дохода обозначим через $\tilde{I}$, спрос - $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$. Очевидно, $\tilde{x}_1 = \dfrac{\tilde{I}}{2z \cdot p_1}$, $\tilde{x}_2 = \dfrac{\tilde{I}}{2p_2}$ и условие компенсации $\dfrac{\tilde{I}^2}{4z \cdot p_1 \cdot p_2} = \dfrac{I^2}{4p_1 \cdot p_2}$, откуда $\tilde{I} = \sqrt{z} \cdot I$, $\tilde{x}_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{z}}$, $\tilde{x}_2 = x_2\sqrt{z}$.

Итак, спрос на первый товар в случае с компенсацией сократится в $\sqrt{z}$ раз (а не в z раз, как без нее), а спрос на второй товар в $\sqrt{z}$ раз вырастет. В случае роста цены второго товара ситуация будет полностью симметричной.

Таким образом, $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ при $i = 1$, $j = 2$ или $j = 1$, $i = 2$.

Индекс *comp* означает, что перекрестная частная производная спроса рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния компенсации дохода. Условие компенсации снимает «эффект дохода», оставляя лишь «эффект замены», что позволяет более точно определить понятие взаимозаменяемости и взаимодополняемости благ и оценивать эти характеристики.

Блага *i* и *j* при $i \neq j$ называются взаимозаменяемыми, если

$\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ и $\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$ (эти два условия равносильны), и

взаимодополняемыми, если $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$ и $\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$.

Рассчитаем теперь эти частные производные для рассматриваемой задачи, когда p_1 возрастет в z раз. В этом случае приращение

$$\Delta x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z}} - x;\ \Delta x_2 = \sqrt{z} \cdot x_2 - x_2;\ \Delta p_1 = z \cdot p_1 - p_1.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{z\to 1} \frac{x_1(1-\sqrt{z})}{p_1\sqrt{z}\cdot(z-1)} = \lim_{z\to 1}\left[-\frac{x_1}{p_1\sqrt{z}(1+\sqrt{z})}\right] = -\frac{x_1}{2}\,p_1 = -\frac{1}{4p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{z\to 1} \frac{x_2(\sqrt{z}-1)}{p_1\sqrt{z}\cdot(z-1)} = \lim_{z\to 1} \frac{x_2}{p_1\sqrt{z}(\sqrt{z}+1)} = -\frac{x_2}{2p_2} = \frac{1}{4p_1\,p_2}.$$

Последняя величина положительна, что свидетельствует о взаимозаменяемости благ в рассматриваемой задаче.

1.2.3 Уравнение Слуцкого

Это уравнение позволяет установить зависимость, связывающую действие “эффекта замены” и “эффекта дохода” с результирующим изменением спроса:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) x_j \text{, при } i \neq j\,.$$

Первое слагаемое в правой части описывает действие “ эффекта замены”, второе – действие “эффекта дохода”, выраженное в тех же единицах измерения (множитель x_j приводит их к одной размерности). Слева записано результирующее воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода. Для ценных товаров величина $\frac{\partial x_i}{\partial I} > 0$, то есть спрос растет при росте дохода. В этом случае, согласно уравнению Слуцкого, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp}$, если спрос растет, то он растет в большей степени при наличии компенсации, если падает – то в меньшей степени. Может оказаться и так, что $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0$, но $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$, то есть товары i и j взаимозаменяемы, но представляются взаимодополняемыми без учета компенсации. Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих i и j (запишите его для последнего случая самостоятельно).

Проверим уравнение Слуцкого для рассмотренной выше задачи потребительского выбора с функцией полезности $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Как было получено,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{1}{2p_1^2}\,;\ \frac{\partial x_i}{\partial I} = -\frac{1}{2p_i}\,;\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0\,;\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{comp} = -\frac{1}{4}\,p_1^2\,;$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{comp} = -\frac{I}{4}\,p_1 p_2\,.$$

Отсюда получим

$$-\frac{1}{2p_1^2} = -\frac{I}{4p_1^2} - \left(\frac{1}{2p_1}\right)\left(\frac{I}{2p_1}\right) = -\frac{1}{2p_1^2}$$

и
$$0 = \frac{I}{4p_1 p_2} - \left(\frac{1}{2p_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2p_1}\right) = 0\,.$$

Итак, в обоих случаях (при $i = j$ и при $i \neq j$) уравнение Слуцкого выполняется.

Уравнение Слуцкого может быть использовано для нахождения $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp}$, то есть для расчета эффекта замены и оценки взаимозаменяемости или взаимодополняемости благ, поскольку частные производные без компенсации рассчитываются значительно легче (как это было показано выше).

Рассмотрим эластичности функции спроса $x_i = \alpha_i \dfrac{I}{\sum\limits_j \alpha_j p_i}$.

Эластичность спроса по цене равна $E_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} : \dfrac{x_i}{p_j}$, эластичность спроса по доходу $E_{iI} = \dfrac{\partial x_i}{\partial I} : \dfrac{x_i}{I}$. Для функции $x_i = \alpha_i \dfrac{I}{\sum\limits_j \alpha_j p_i}$ получим $E_{ii} = -1$, $E_{ij} = 0$, $E_{iI} = 1$.

Если в функции спроса $x_i = x_i(p_1, p_2, ..., p_n, I)$ все цены и доход увеличить в одно и то же количество раз λ, то спрос x_i не изменится. Таким образом, $x_i(\lambda \overline{p}, \lambda I) = \lambda^0 x_i(\overline{p}, I) = x_i(\overline{p}, I)$, то есть, функция спроса является однородной нулевой степени. Отсюда, согласно уравнению Эйлера должно выполнятся равенство:

$$\sum_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right) \cdot p_j + \left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) \cdot I = 0,$$

разделив которое на x_i, получим равенство $\sum\limits_j E_{ij} + E_{iI} = 0$, то есть нулю должна равняться сумма всех эластичностей спроса по ценам и доходу.

Покажем, что если в задаче потребительского выбора всего два блага, то они обязательно являются взаимозаменяемыми. Для этого воспользуемся тем, что $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$, и положительностью частных производных функции полезности.

Предположим, что выросла цена первого блага p_1. Поскольку $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{comp} < 0$, спрос на это благо при условии компенсации падает.

Если бы при этом упал спрос и на второе благо, то получили бы точку, в которой обоих благ меньше, чем в начальной. Следовательно, в этой точке значение функции полезности $u(x_1, x_2)$ должно быть также меньше (а мы знаем, что в условиях компенсации оно равно начальному значению). Следовательно, спрос на второе благо при условии компенсации должен вырасти (т.е. $\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{comp} > 0$), и он является взаимозаменяемым с первым благом.

Задачи для самостоятельного решения (к подразделам 1.1 – 1.2)

1. Определить, какой набор товаров выберет потребитель, обладающий доходом в 300 д.е., если его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, цены товаров $p_1 = 2$ д.е., $p_2 = 4$ д.е., $p_3 = 1$ д.е.

2. Предпочтения потребителя заданы следующей функцией полезности: $u(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, его доход равен I, цены благ - p_1, p_2. Найти оптимальную функцию спроса.

3. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$. Определить максимальную полезность, если потребитель имеет доход в 100 д.е., а цены товаров равны соответственно 5 д.е. и 10 д.е. Какова норма замены второго товара первым в оптимальной точке?

4. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$. Найти оптимальную функцию спроса, если доход потребителя составляет 500 д.е., а цены товаров - $p_1 = 3$ д.е., $p_2 = 5$ д.е.

5. Найти оптимальные функции спроса, при ценах благ $p_1 = 10$ д.е., $p_2 = 2$ д.е. и доходе $I = 60$, со следующими функциями полезности:

а) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$;

б) $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$;

в) $u(x_1,x_2)=(x_1-1)^{\frac{1}{4}}(x_2-3)^{\frac{3}{4}}$;

г) $u(x_1,x_2)=5(4-x_1)^2+(20-x_2)^2$

6.Функция полезности зависит от двух благ (x_1,x_2) следующим образом $u(x_1,x_2)=2\sqrt{x_1x_2}$. Цены благ равны соответственно $p_1=4$ д.е. и $p_2=2$ д.е., а доход потребителя $I=80$ д.е. Найти максимальный выбор потребителя при заданных ценах. Определить необходимый размер компенсации, если цена p_2 изменится с 2 д.е. до 4 д.е.

7.Функция потребления некоторой страны имеет вид $C(y)=12+0.37y+0.15y^{\frac{6}{7}}$, где y -совокупный национальный доход. Найти а) предельную склонность к потреблению;

б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 6д.е.

8.Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1,x_2)=(x_1+4)(x_2+5)$. Бюджет потребителя равен $I=60$, а цены товаров - $p_1=1$ д.е., $p_2=2$ д.е.

Определить максимальную функцию спроса; записать уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия; определить перекрестную эластичность спроса на второй товар в момент равновесия потребителя.

9. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1,x_2)=(x_1+2)(x_2+6)$. Бюджет потребителя равен $I=120$, а цены товаров - $p_1=2$ д.е., $p_2=3$ д.е.

Определить максимальную функцию спроса; найти перекрестную эластичность спроса на первый товар после достижения нового равновесия (цена второго товара повысилась до 4 д.е.); определить разность между компенсирующим и эквивалентным изменениями дохода.

10. Функция спроса некоторого товара $D=50-3p_1+2p_2+0{,}4\cdot I$, где p_1 - собственная цена товара, p_2 - цена альтернативного товара, I - доход потребителя. Найти эластичность спроса от собственной цены E_{p1}, перекрестный коэффициент эластичности спроса E_{p2}, эластичность спроса от дохода потребителя E_I при заданной собственной цене товара $p_1=5$, цене альтернативного товара $p_1=4$ и доходе потребителя $I=500$. Какие это товары: взаимозаменяемые или

взаимодополняющие? Как ведет себя спрос с ростом дохода потребителя?

11. Даны функции спроса на товары №1 и №2 соответственно: $D_1 = 25 - 2p_1 + p_2$, $D_2 = 20 + p_1 - p_2$. Найти эластичности спроса на каждый товар, относительно собственной цены товара и цены альтернативного товара (перекрестные эластичности).

12. Функция спроса имеет вид: $p = 20 - \sqrt{x}$, где p - цена продукта, x - выпускаемый продукт. Найти эластичность спроса на продукт при цене $p = 10$. Вычислить процентное изменение спроса, если цена увеличилась на один процент, уменьшилась на один процент, увеличилась на два процента.

13. Бюджетная линия пересекает одну из кривых безразличия в точках $A(2;4)$ и $B(4;2)$. Написать уравнение бюджетной линии; определить бюджет, если известно, что цена одного из благ равна 36 д.е.; определить, какова цена другого блага?

14.Функция полезности имеет вид $u(x, y) = \ln x + \ln y$, где x, y - количества двух благ. Известен доход $I = 270$ и цены на каждое из благ $p_x = 15$, $p_y = 45$. Определить: как требуется израсходовать доход, чтобы получить максимум полезности; как требуется израсходовать доход, чтобы получить максимум полезности, если цена одного из благ изменилась $p_x = 45$; как должен измениться доход, чтобы после изменения цены на одно из благ можно достичь первоначального уровня полезности.

15.Функция потребления некоторой страны имеет вид $C(y) = 6 + 0.36y + 0.46y^{\frac{3}{4}}$, где y -совокупный национальный доход. Найти а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 5 млрд.

16. Функция спроса на товар определяется линейным уравнением относительно цены $D(p) = 100 - 5p$, где p – цена товара. Записать уравнение зависимости между изменением выручки и спросом на товар. Рассчитать эластичность спроса и выручки при заданных значениях цены $p = 10, p = 6, p = 12$ и сделать выводы.

17.Функция полезности имеет вид $u(x, y) = xy$, где x, y - количества двух благ. Известен доход $I = 600$ и цены на каждое из благ $p_x = 25$, $p_y = 30$. Определить: как требуется израсходовать доход, чтобы получить максимум полезности; как требуется израсходовать доход, чтобы получить максимум полезности, если цена одного из благ изменилась $p_y = 20$; как должен измениться доход, чтобы после изменения цены на одно из благ можно достичь первоначального уровня полезности.

18.Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = (x_1 + 3)(x_2 + 2)$. Бюджет потребителя равен $I = 100$, а цены товаров - $p_1 = 3$ д.е., $p_2 = 4$ д.е.

Найти максимальную функцию спроса; определить перекрестную эластичность спроса на второй товар в момент равновесия потребителя; найти перекрестную эластичность спроса на первый товар после достижения нового равновесия (цена второго товара повысилась до 5 д.е.).

19.Функция полезности имеет вид: $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}$ Цены благ равны соответственно $p_1 = 3$ д.е. и $p_2 = 2$ д.е., а доход потребителя $I = 100$ д.е. Найти максимальный выбор потребителя при заданных ценах. Определить необходимый размер компенсации, если цена p_2 изменится с 2 д.е. до 4 д.е.

20. Даны функции спроса на продукцию монополиста на двух рынках соответственно: $D_1 = 70 - 3x_1$, $D_2 = 50 - 5x_2$. Определить предложение (объем продаж) и цены на продукцию на каждом из двух рынков, максимизирующие прибыль монополии.

1.3 Моделирование поведения производителя

1.3.1 Производственная функция и её характеристики

Рассмотрев модели поведения потребителя, перейдем к рассмотрению моделей поведения производителя. Существует мнение, что стоимость средств производства, в конечном счете, определяется стоимостью (полезностью) предметов потребления. Оценки предельной производительности факторов производства выступают, как полезностные оценки и непосредственно связаны с производительностью конкретных видов труда и средств производства.

Теория производства начинается с техники и технологии. При прочих равных условиях уровень эффективности производства определяется ими. Однако этот уровень существенно зависит от реально существующей или возможной комбинации средств производства и труда. При этом для каждого отдельного периода всегда существует максимальный объем выпуска продукции, которого можно достигнуть благодаря оптимальной комбинации данных факторов производства. Количественная взаимосвязь между затратами и выпуском продукции может быть выражена в виде функции. Такая функция получила название производственной функции.

Определение. Математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности (величины выпускаемой продукции) от обуславливающих эти результаты показателей факторов производства (ресурсов) называется производственной функцией (ПФ).

В простейшем случае результат производственной деятельности (выпуск продукции) может зависеть от одного фактора производства. В этом случае ПФ называется одноресурсной или однофакторной и имеет вид $y = f(a, x)$ или $F(a, y, x) = 0$, где a - параметр.

Чаще всего встречаются многофакторные ПФ, позволяющие изучить совместное влияние нескольких показателей факторов на величину изучаемого результативного показателя. В общем виде уравнение многофакторной ПФ функции можно представить в виде $y = f(\bar{a}, x_1, x_2, .., x_n)$ или $F(\bar{a}, y, x_1, x_2, .., x_n) = 0$, где $(x_1, x_2, .., x_n)$ - вектор затрат (ресурсов, производственных факторов), $\bar{a}$ - вектор параметров.

Многообразие производственных процессов предопределяет и многообразие ПФ. Эти функции для различных предприятий, фирм, даже при изготовлении одного и того же вида продукции, различны, поскольку различны затраты и выпуск. Конкретный вид функции всецело определяется видом технико–экономических зависимостей между затратами и выпуском продукции.

В настоящее время развит статистический подход к построению ПФ для конкретных хозяйственных единиц, При этом обычно используется некоторый стандартный набор алгебраических выражений, параметры которых находятся методами математической статистики.

Среди разнообразных типов ПФ наиболее часто применяются: линейные функции вида $y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$, для которых легко решается задача оценивания коэффициентов (параметров) по статистическим данным; степенные функции вида $y = a_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, для которых задача нахождения параметров сводится к оцениванию линейной формы путем перехода к логарифмам.

Под переменными производственной функции имеются в виду все измеримые факторы производства, влияющие на объем производимой продукции: различные виды средств производства, рабочая сила, природные ресурсы, в том числе и такие факторы, как уровень концентрации производства, степень организации производства, фактор времени и др. Факторы производства, как и производимая продукция, могут быть заданы в физических единицах измерения или в стоимостном, денежном выражении. Конечной целью после построения производственной функции является ее оптимизация, то есть требуется найти max ПФ $y = f(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ при ограничениях на ресурсы, которые задаются в натуральной или стоимостной форме.

Рассмотрим ПФ от двух переменных (факторов), дадим ее графическое изображение. Пусть $y = f(x_1, x_2)$ – производственная функция, где y – объем производимой продукции, x_1, x_2 – факторы производства, f – вид зависимости. В соответствии с рисунком 8 значения производственной функции y представлены производственной поверхностью, которая является геометрическим местом точек при различных комбинациях факторов производства x_1, x_2.

Предельный анализ производственной функции.

Использование методов предельного анализа, предельных полезностных оценок в экономическом анализе и ценообразовании играют существенную роль в достижении конечных результатов деятельности любого экономического объекта.

В предположении о дифференцируемости производственной функции в каждой точке множества возможных комбинаций ресурсов можно рассмотреть частные производные первого порядка $\frac{\partial y}{\partial x_i} \geq 0$, где $i = 1,2,..,n$ для любого набора возможных комбинаций ресурсов

Определение. Частные производные первого порядка ПФ называют предельной производительностью i - го ресурса, которая показывает, на сколько единиц изменится выпуск продукции, если количество потребляемого i - го ресурса изменится на единицу ("малую единицу") и обозначают $M_i y = \frac{\partial y}{\partial x_i}$.

Таким образом, предельная производительность используемых ресурсов показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного ресурса.

Предельной производительностью того или иного фактора производства, его предельным продуктом называется добавочный продукт (дополнительное расширение производства), полученный благодаря увеличению того или иного фактора производства (труда, земли, отдельного вида сырья, машин и др.) на одну единицу, при неизменности остальных факторов.

В данном определении речь идет о физическом объеме предельного продукта. Наряду с ним существует понятие предельного дохода, как денежного эквивалента предельного продукта, предельной прибыли.

Предельная производительность ресурсов (факторов производства) есть величина размерная, ее значение зависит от того, в каких единицах измеряются используемые ресурсы.

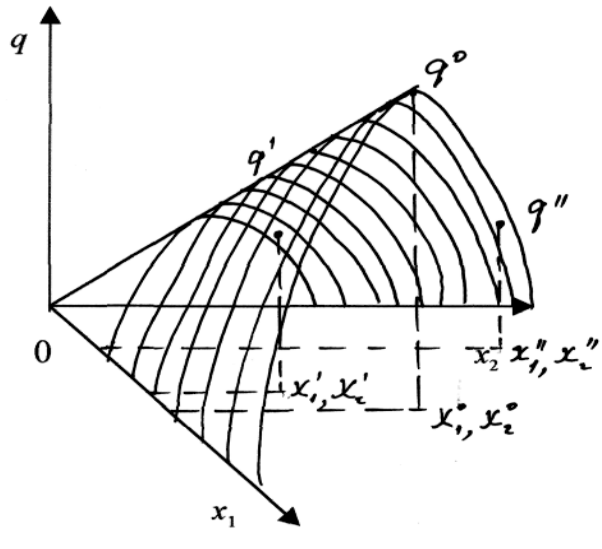


Рисунок 8-График производственной функции двух переменных

Коэффициенты эластичности выпуска по факторам производства (ресурсам).

Наряду с вычислением абсолютного прироста продукции на единицу прироста затрат в экономике используют показатель, характеризующий относительный прирост объема производства на единицу относительного увеличения ресурса. Для этого необходимо предельную отдачу ресурса разделить на объем выпускаемой продукции и умножить на величину затрат ресурса. Получим выражения $E_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y}$, называемые эластичностью выпуска продукции по затратам ресурса. Полученный показатель показывает, на сколько процентов изменится выпуск при изменении затрат ресурсов на один процент. Эластичность (коэффициенты эластичности) выпуска по факторам производства величина безразмерная и равна отношению предельной производительности ресурса (фактора) к средней $E_i = \frac{M_i y}{A_i y}$, где $A_i = \frac{y}{x_i}$ средняя производительность факторов производства.

Основные свойства производственных функций.

Сформулируем свойства производственной функции:

- переменные x_1 и x_2 меняются непрерывно и результат деятельности достаточно гладко меняется при изменении количеств используемых ресурсов, то есть с математической точки зрения предполагается, что функция $y = f(x_1, x_2)$ по крайней мере дважды дифференцируема;

- при отсутствии хотя бы одного производственного ресурса выпуск невозможен. Это значит, что $f(0, x_2) = 0, \quad f(x_1, 0) = 0$;

- с ростом потребления одного из ресурсов и при постоянном потреблении другого ресурса выпуск растет. ПФ является возрастающей по любому ее аргументу, и ее частные производные, определяющие предельную производительность факторов производства, всегда положительны $\frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$;

- предельная полезность каждого ресурса уменьшается, если объем его потребления растет, то есть скорость роста выпуска замедляется (каждая дополнительная единица приобретенного ресурса используется менее эффективно). В этом случае вторые производные ПФ отрицательны $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0$. Это свойство называют еще законом убывающей предельной эффективности;

- предельная полезность каждого ресурса увеличивается, если растет количество потребления другого ресурса. В этом случае смешанные производные второго порядка положительны

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} > 0$. Здесь ресурс, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным, поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и используется более эффективно;

- отдача от расширения масштабов производства.

Отдача от расширения масштаба производства характеризует ПФ с точки зрения изменения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат.

Производственная функция характеризуется постоянной отдачей от расширения масштаба производства, если выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты: $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$, где $t > 1$.

Производственная функция дает возрастающую (убывающую) отдачу от расширения масштаба производства, если она возрастает в большей (меньшей) степени, чем все затраты $f(tx_1, tx_2) > t \cdot f(x_1, x_2)$, $(f(tx_1, tx_2) < t \cdot f(x_1, x_2))$.

Как известно, скалярная функция $f(x)$ называется однородной функцией степени γ, если она удовлетворяет соотношению $f(tx) = t^{\gamma} f(x)$. Однородная производственная функция при $\gamma > 1$ характеризуется возрастающей, при $\gamma < 1$ убывающей, а при $\gamma = 1$ постоянной отдачей от расширения масштаба производства. Производственная функция называется линейно–однородной при $\gamma = 1$;

- одно и тоже количество продукта может быть достигнуто при различных сочетаниях ресурсов производства.

Производственные кривые безразличия (изокванты).

Определение. Линию уровня для ПФ называют производственной кривой безразличия или изоквантой.

Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы могут замещать друг друга. Это означает, что единицу одного ресурса можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции при этом не изменится.

Это достигается введением производственной кривой безразличия - изокванты. Изокванта есть геометрическое место точек всех комбинаций затрат, обеспечивающих одинаковый уровень выпуска.

Изокванта есть кривая взаимозаменяемости факторов производства, ее форма отражает экономическое содержание процесса взаимозаменяемости, его границы и экономические последствия.

Сформулируем свойства производственных кривых безразличия:

-кривая, лежащая выше и правее другой кривой, представляет большее количество продукции;

-производственные кривые безразличия никогда не пересекаются. Через любую точку на графике можно провести только одну кривую;

-производственные кривые безразличия имеют отрицательный наклон. Абсолютный наклон производственной кривой безразличия при движении вправо уменьшается, она становится более пологой.

В зависимости от вида производственной функции различают различные виды изоквант:

-линейная производственная функция с полным замещением одного ресурса другим $y = a_0 + ax_1 + bx_2$, где a и b - параметры. Уравнение изокванты имеет вид $x_2 = \frac{u - ax_1}{b}$, а график представлен на рисунке 9.

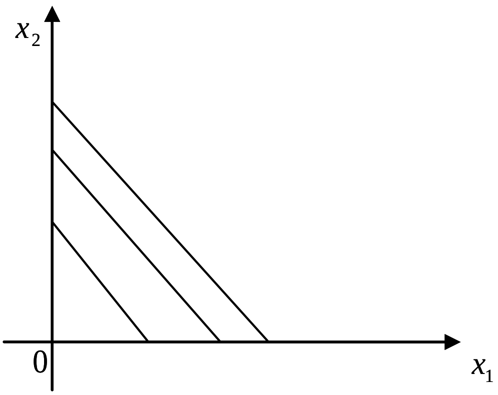


Рисунок 9- Изокванты линейного типа

-неоклассическая (мультипликативная) производственная функция $y = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha + \beta \leq 1$. Уравнение изокванты функции (при $y = u$) этого типа имеет вид $x_2 = \left(\frac{u}{x_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. График изокванты производственной функции неоклассического типа представлен на рисунке 10

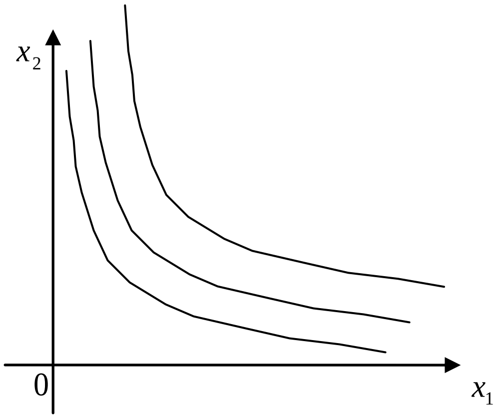


Рисунок 10 -Изокванты неоклассического типа

Когда возможность замены ресурсов отсутствует, такие ресурсы называются взаимодополняемыми, и они характеризуются нулевыми коэффициентами эластичности, например, детали, из которых собираются готовые изделия взаимодополняемые. Изокванты ПФ с постоянными пропорциями или постоянном соотношении затрат представляют собой лучи, исходящие из точек наиболее рационального сочетания этих ресурсов и параллельные осям координат.

Изокванты ПФ с постоянным соотношением затрат представлены на рисунке 11.

Рисунок 11-Изокванты ПФ с постоянными пропорциями затрат

Предельная норма замещения ресурсов.

Из третьего свойства производственных кривых безразличия следует, что они являются убывающими функциями. При доказательстве этого свойства можно получить формулу

$$R_{12} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}}\ , \tag{7}$$

которая называется предельной нормой замещения первого ресурса вторым ресурсом, и показывает, на сколько единиц увеличится (уменьшится) потребление второго ресурса, при уменьшении (увеличении) первого ресурса на единицу без изменения производственной функции.

В общем виде предельную норму замещения i - го ресурса j - м ресурсом можно записать:

$$R_{ij} = \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\frac{\partial y}{\partial x_j}}\ . \tag{8}$$

Предельная норма замещения R_{ij} имеет отрицательное значение, так как при увеличении использования одного из ресурсов, чтобы сохранить постоянное значение результата деятельности, использование другого ресурса надо уменьшить.

Предельная норма замещения ресурсов равна обратному соотношению их предельных производительностей.

Эластичность замещения ресурсов.

Следует отметить, что предельная норма замещения не остается постоянной вдоль изокванты. Она зависит от точки, в которой рассматривается производная $\frac{dx_2}{dx_1}$.

Геометрически этот факт выражается тем, что касательная к изокванте, тангенс угла которой равен рассматриваемой производной $R_{12} = \frac{dx_2}{dx_1} = tg\alpha$, изменяет свой наклон при движении вдоль кривой.

Если нас интересует величина, показывающая, на сколько процентов должно измениться отношение ресурса x_2 к ресурсу x_1, чтобы при этом предельная норма замещения изменилась на один процент, то рассматривается эластичность замещения ресурсов:

$$\sigma_{12} = \frac{\dfrac{dx_2}{x_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}} : \frac{dR_{12}}{R_{12}} = \frac{\dfrac{dx_2}{x_1}}{dR_{12}} \cdot \frac{R_{12}}{\dfrac{x_2}{x_1}} . \tag{9}$$

В общем виде эластичность замещения i - го ресурса j - м ресурсом можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\dfrac{dx_j}{x_i}}{dR_{ij}} \cdot \frac{R_{ij}}{\dfrac{x_j}{x_i}} . \tag{10}$$

Эластичность замещения ресурсов является количественной характеристикой скорости изменения предельной нормы замещения при движении вдоль изокванты, то есть при фиксированном объеме выпуска.

Для характеристики скорости изменения величины y можно было бы использовать более простой показатель - производную R_{12} по x_1 $\left(\dfrac{dR_{12}}{dx_1}\right)$. Однако, эластичность замещения ресурсов σ_{12} предпочитается в связи с тем, что у нее есть большое преимущество - она постоянна для большинства используемых на практике производственных функций, то есть не только не изменяется при движении вдоль некоторой изокванты, но и не зависит от выбора изокванты.

В случае, когда предельная норма замещения не зависит от соотношения используемых ресурсов, то есть $R_{ij} = const$, имеем,

$$\frac{d\left(R_{ij}\right)}{d\left(\dfrac{x_j}{x_i}\right)} = 0 ,$$

то есть эластичность замещения $\sigma \to \infty$. В этом случае ресурсы считаются полностью взаимозамещаемыми. При $\sigma = 0$ ресурсы не взаимозамещаемы.

Линейная производственная функция $y = ax_1 + bx_2 + c$ имеет нулевую “ кривизну” и, соответственно бесконечную эластичность замещения σ. Производственная функция Кобба – Дугласа

$y = AK^a L^b$ имеет эластичность замещения, равную единице. Производственная функция Леонтьева $y = \min(aK, bL)$ имеет нулевую эластичность замещения. Ресурсы в ней должны использоваться в заданной пропорции и не могут замещать друг друга.

Эластичность замещения ресурсов может быть как неизменной, так и меняться, то есть зависеть от объемов ресурсов. Тогда производственные функции делят на типы:

- производственные функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов или производственные функции типа CES (Constant Elasticity Substitution);

- производственные функции с переменной эластичностью замещения ресурсов или производственные функции типа VES (Variable Elasticity Substitution);

- производственные функции с постоянной, но произвольной эластичностью замещения описывается формулой

$$y = A(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho})^{-\frac{n}{p}},$$

где $\rho \geq 1$, $n > 0$ - степень однородности, $A > 0$, $0 < u < 1$. Эластичность замещения для такой функции $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$. Если $\rho = -1$, то получаем линейную функцию, при $\rho \to 0$ в пределе получаем производственную функцию Кобба – Дугласа с $\sigma = 1$, при $\rho \to \infty$ получаем производственную функцию Леонтьева.

1.3.2. Задача об оптимальном выборе потребителя

а) задача, максимизирующая объем выпуска при ограничении на затраты.

Производственная карта безразличия отражает лишь условия технологии, и чисто технологический оптимум продукции не совпадает с экономическим оптимумом. Необходимы еще данные о ценах на ресурсы и уровне денежных затрат. Эту информацию дает линия цен–издержек производства. Наклон этой линии отражает соотношение цен, а ее уровень – величину затрат в денежной форме. Каждой точке линии цен соответствует один и тот же уровень денежных затрат и различные комбинации факторов производства.

Линия цен–издержек обладает теми же свойствами, что и бюджетная линия в теории поведения потребителя.

При постоянных ценах на оба фактора она обладает следующими свойствами:

-является прямой линией;

-имеет отрицательный наклон;

-этот наклон равен обратному соотношению цен двух факторов производства, то есть $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$;

- при постоянных ценах на ресурсы разным уровням затрат в денежной форме будут соответствовать различные параллельные прямые.

При данных ценах и уровне расходов требуется решить задачу об оптимальном использовании средств, предназначенных для приобретения производственных ресурсов и максимизировать прибыль, как разницу между доходом от реализации продукции и издержками производства.

Сформулируем данную задачу. Предположим, что ресурсы $(x_1, x_2, .., x_n)$ могут быть закуплены по ценам $(p_1, p_2, .., p_n)$, а объем имеющихся средств для их приобретения составляет b д.е.

Тогда соотношение, описывающее множество допустимых наборов ресурсов, выражается ограничением $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \le b$. Граничная линия этого множества, соответствующая полному использованию имеющихся средств $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = b$, называется изокостой, ей отвечают наборы, имеющие одинаковую стоимость b.

Требуется найти набор ресурсов, который дает наибольший выпуск продукции при ограниченных финансовых средствах:

$$
\begin{gathered}
y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max, \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = b, \\
x_i \ge 0, \quad i = 1,2,..,n.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Задача об оптимальном использовании средств, предназначенных для приобретения производственных ресурсов сводится к обычной задаче отыскания условного экстремума производственной функции. Решение этой задачи на условный экстремум находится при помощи метода множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа относительно x_i и λ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = y(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - b\right),$$

где λ - множитель Лагранжа.

Необходимые условия оптимальности решения определяются системой ограничений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_i} = \lambda p_i,\ (i = 1,...,n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = b. \end{cases} \qquad (12)$$

В оптимальной комбинации ресурсов предельные производительности ресурсов должны быть пропорциональны их ценам $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = \lambda p_i$.

Оптимальный набор ресурсов $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ получают, решив систему ограничений (12).

Для двухфакторной производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ необходимые условия оптимальности будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = b. \end{cases} \qquad (13)$$

Для двух производственных факторов, задача допускает геометрическую интерпретацию (рисунок 12).

Здесь отрезок AB есть изокоста, кривая R - изокванта, касающиеся в точке D, которая и соответствует оптимальному набору факторов (x_1^*, x_2^*).

Оптимальная комбинация факторов производства приходится на точку касания изокванты с изокостой и есть геометрическое представление основного правила оптимальности развития хозяйства.

Оптимальная комбинация факторов производства x_1, x_2 достигается тогда, когда отношение их предельных производительностей (предельных продуктов) равно отношению их цен:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} : \frac{\partial y}{\partial x_2} = p_1 : p_2 \,. \qquad (14)$$

Это соотношение отражает тот факт, что наклон изокванты равен наклону линии цен-издержек в точке их касания.

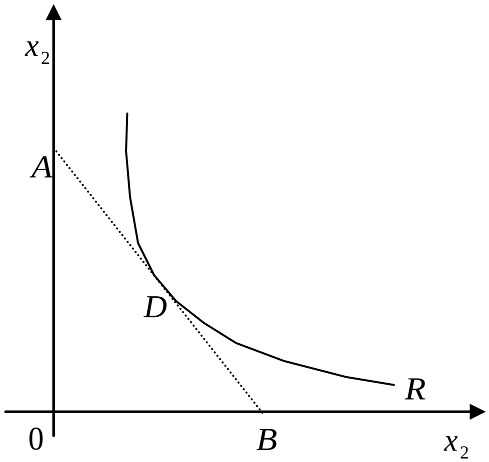


Рисунок 12- Оптимальная комбинация ресурсов

Если $\frac{\partial y}{\partial x_1} : p_1 > \frac{\partial y}{\partial x_2} : p_2$, то комбинация ресурсов не является оптимальной. Необходимо перераспределить ресурсы в пользу фактора x_1 и добиться равенства. Обеспечение минимума издержек производства для получения данного полезного эффекта, а значит, и минимума затрат на единицу эффекта, достигается процессом замещения более дорогих факторов менее дорогими. Это замещение осуществляется до тех пор, пока не достигается самая выгодная комбинация факторов производства. Таким образом, важнейшим свойством производственной функции является наличие альтернативных возможностей взаимозамещения факторов производства. Следует отметить, что в динамике при изменении цен–издержек производства на факторы производства прямая цен–издержек производства изменяется, одновременно происходит переход от прежней оптимальной комбинации к новой оптимальной комбинации факторов производства.

Пример. Дана производственная функция выпуска $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где K - капитал (основные фонды), L - затраты труда (рабочая сила). Требуется найти максимальный объем выпуска, при условии ограниченности финансовых средств:

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta} \to \max ,$$

при условии $$p_1K + p_2L = b ,$$

где: p_1 - цена использования основных фондов (услуг капитала), равная норме банковского процента;

p_2 - ставка оплаты труда.

Решение. Условия оптимальности имеют вид:

$$\begin{cases} A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \lambda p_1, \\ A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} = \lambda p_2, \\ p_1K + p_2L = b. \end{cases} \tag{15}$$

Условие $\dfrac{\partial y}{\partial K} = \lambda p_1$ означает, что объем используемого капитала должен быть принят на том уровне, когда предельная фондоотдача $\dfrac{\partial y}{\partial K}$ равна норме банковского процента. Дальнейшее увеличение капитала приведет к снижению его эффективности.

Условие $\dfrac{\partial y}{\partial L} = \lambda p_2$ требует, чтобы количество занятой рабочей силы было взято на уровне, когда предельная производительность труда $\dfrac{\partial y}{\partial L}$ равна ставке заработной платы, так как дальнейшее увеличение количества занятых приводит к убыткам (точка L^* на рисунке 13).

Угловой коэффициент касательной в точке A равен p_2.

Решение системы (15) имеет вид:

$$K^* = \frac{\alpha b}{(\alpha+\beta)p_1}; \qquad L^* = \frac{\beta b}{(\alpha+\beta)p_2};$$

$$y^* = a(K^*)^{\alpha}(L^*)^{\beta}; \qquad \lambda^* = \frac{(\alpha+\beta)y^*}{b}.$$

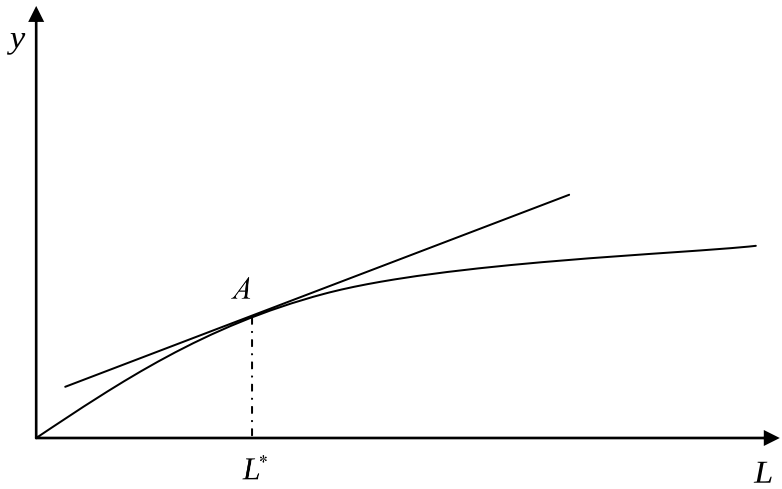


Рисунок 13- Оптимальное количество занятых

Множитель λ^* характеризует здесь предельную продуктивность финансовых средств, то есть, показывает, на какую величину изменится максимальный выпуск продукции y^*, если объем средств b увеличится на «малую» единицу

Заметим, что сумма эластичностей капитала α и труда β характеризует так называемый удельный выпуск (отдачу) при изменении масштаба производства, то есть, когда расход ресурсов (K и L) увеличивается в одинаковое число раз. Если $\alpha+\beta>1$, то отдача возрастает, если $\alpha+\beta=1$, то отдача постоянная, если $\alpha+\beta<1$, то отдача убывает, а производственная функция является выпуклой вверх;

б) задача, минимизирующая издержки при фиксированном объеме выпуска.

Рассмотрим двухфакторную производственную функцию $y=f(x_1,x_2)$, где y - объем выпускаемой продукции. В процессе производства продукции предприятие несет производственные издержки $C(x_1,x_2)$, при этом издержки возрастают с увеличением количества ресурсов $(C_i'>0, i=1,2)$. Также полагают, что $C_i''>0$ - это означает, что предельные издержки i - го ресурса возрастают на каждую дополнительную единицу приобретенного i - го ресурса.

Предположим, что ресурсы (x_1, x_2) могут быть закуплены по ценам (p_1, p_2), а общие издержки определяются величиной $C(x_1, x_2)$.

Требуется найти такой набор ресурсов, который обеспечит минимальные издержки на производство данного объема продукции:

$$C(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min$$

при условии $y = f(x_1, x_2)$, $x_i \geq 0, i = 1,2$.

Задача, минимизирующая издержки при фиксированном объеме выпуска, сводится к обычной задаче отыскания условного экстремума функции $C(x_1, x_2)$. Решение этой задачи аналогично решению задачи максимизирующей объем выпуска при ограничении на затраты.

Пример. Производственная функция задана уравнением $y = F(K, L)$, где K - капитал (основные фонды), L - затраты труда. Арендная плата (реально выплачиваемая или условно начисляемая за ед. работы капитала) равна m, а оплата труда за единицу времени n. Тогда общие издержки $C(K, L) = mK + nL$. Предположим, что предприятие принимает решение производить продукцию в объеме Q. Какой способ производства следует выбрать, чтобы минимизировать издержки?

Решение. Построим принцип минимизации издержек: требуется найти $C(K,L) = mK + nL \to \min$ при $F(K, L) = Q$.

Составим функцию Лагранжа $Z(K, L, \lambda) = mK + nL + \lambda(Q - F(K, L))$.

Для нахождения ее минимального значения составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial K} = m - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial L} = n - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial L} = 0, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial K}, \\ n = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial L}, \\ Q - F(K, L) = 0. \end{cases}$$

Из системы найдём $\lambda = \dfrac{m}{\dfrac{\partial F}{\partial K}} = \dfrac{n}{\dfrac{\partial F}{\partial L}}$, тогда

$$\frac{m}{n} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial L}}{\dfrac{\partial F}{\partial K}} = \frac{M_L}{M_K} = MRTS_{L,K},$$

то есть отношение, в котором труд и капитал $\left(\frac{m}{n}\right)$ могут быть замещены на рынке, равно отношению предельных производительностей труда M_L и капитала M_K и равно предельной норме технического замещения капитала трудом $MRTS_{L,K}$.

Итак, принцип минимизации издержек, заключается в следующем: для минимизации издержек на производство данного объема продукции должно быть выбрано такое сочетание ресурсов, при котором $\frac{m}{n} = \frac{M_L}{M_K} = MRTS_{L,K}$. Экономический смысл минимизации издержек заключается в том что, так как $\frac{M_L}{n} = \frac{M_K}{m}$, то одна денежная единица, затраченная на приобретение каждого ресурса должна приносить одинаковый предельный продукт. Так как $\lambda = \frac{m}{\dfrac{\partial F}{\partial K}} = \frac{n}{\dfrac{\partial F}{\partial L}}$, то экономический смысл множителя Лагранжа для задачи минимизации издержек заключается в том, что λ показывает, на какую величину изменятся издержки при изменении выпуска на одну единицу.

Замечание. Если данный выпуск Q обеспечивается при минимальных издержках, то это означает, что Q - это максимальный выпуск, который достигается при данных издержках $C(x_1^*, x_2^*)$. Задача максимизации выпуска выступает здесь, как двойственная для задачи минимизации издержек и может быть сформулирована так: найти $Q = f(K, L) \to \max$ при условии $mK + nL = C(x_1^*, x_2^*)$. Решение этой задачи дает тот же результат, что и решение задачи минимизации издержек.

Пример. Дана производственная функция вида $F(K, L) = 10K^{0,2}L^{0,4}$, часовая арендная плата $n = 5$, а часовая ставка оплаты труда $m = 3$. Фирма принимает решение производить $Q = 100$ единиц продукции, минимизируя издержки. Какой способ производства ей следует выбрать, и чему равны минимальные издержки?

Решение. Принцип минимизации издержек $\frac{m}{n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{M_L}{M_K}$.

Тогда, с учетом исходных данных, получим $\frac{3}{5} = \frac{4K^{0,2}L^{-0,6}}{2K^{-0,8}L^{0,4}}$ или $\frac{3}{10} = \frac{K}{L}$ и $L = 3{,}3K$. Найдем выпуск продукции $Q = 10K^{0,2}L^{0,4} = 10K^{0,2}(3{,}3K)^{0,4} = 10 \cdot (3{,}3)^{0,4} K^{0,6} = 100$. Отсюда $K^{0,6} = \frac{10}{(3{,}3)^{0,4}}$. Окончательно получим $K = \left(\frac{10}{(3{,}3)^{0,4}}\right)^{\frac{1}{0,6}} = 20{,}94$.

Тогда $L = 3{,}3K = 3{,}3 \cdot 20{,}94 = 69{,}10$. Минимальные издержки $C_{\min} = mK + nL = 5 \cdot 20{,}94 + 3 \cdot 69{,}10 = 312$.

1.4 Производственная функция Кобба-Дугласа

Для анализа зависимости «ресурсы-выпуск» широко применяется производственная функция Кобба-Дугласа $Y = F(K,L) = AK^aL^b$, где $A > 0$, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. В качестве ресурсов здесь выступают капитал K и труд L. Тогда дроби $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ называют соответственно производительностью капитала и производительностью труда. Ещё $\frac{Y}{K}$ называют фондоотдачей или капиталоотдачей (показатель, характеризующий уровень эффективности использования производственных фондов). Обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{Y}$ называются соответственно капиталоёмкостью и трудоёмкостью выпуска. Дробь $\frac{K}{L}$ называется капиталовооружённостью труда. Производственная функция Кобба-Дугласа относится к классу мультипликативных функций.

Рассмотрим основные характеристики производственного процесса, описываемого этой функцией:

-средний продукт капитала $A_K = \frac{Y}{K} = \frac{AK^aL^b}{K} = AK^{a-1}L^b$;

- средний продукт труда $A_L = \frac{Y}{L} = \frac{AK^a L^b}{L} = AK^a L^{b-1}$;

- предельный продукт капитала

$$M_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(AK^a L^b\right) = AK^a \frac{\partial}{\partial L}(L^b) = AK^a bL^{b-1} = bAK^a L^{b-1} = bA_L \ ;$$

-предельный продукт труда

$$M_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(AK^a L^b\right) = AL^b \frac{\partial}{\partial K}(K^a) = AL^b aK^{a-1} = aAK^{a-1}L^b = aA_K \ .$$

Так как $a < 1$, то $M_K < A_K$.

Найдем вторые частные производные функции Кобба-Дугласа по труду и капиталу:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right) = \frac{\partial}{\partial L}(M_L) = \frac{\partial}{\partial L}\left(bAK^a L^{b-1}\right) = bAK^a \frac{\partial}{\partial L}\left(L^{b-1}\right) =$$

$$= bAK^a (b-1)L^{b-2} = b(b-1)AK^a L^{b-2} < 0 \ ,$$

при $0 < b < 1, \ \ A > 0$, то есть, предельный продукт труда M_L убывает;

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right) = \frac{\partial}{\partial K}(M_K) = \frac{\partial}{\partial K}\left(aAK^{a-1}L^b\right) = aAL^b \frac{\partial}{\partial L}\left(K^{a-1}\right) =$$

$$= aAL^b (a-1)K^{a-2} = a(a-1)AK^{a-2}L^b < 0,$$

при $0 < a < 1, \ \ A > 0$, то есть, предельный продукт капитала M_K убывает.

Изокванта функции Кобба – Дугласа описывается уравнением $AK^a L^b = C$, где C -const, откуда получим функцию $L = \left(\frac{C}{AK^a}\right)^{\frac{1}{b}}$.

Изокванта показывает

$$\lim_{K \to +\infty}\left(\frac{C}{AK^a}\right)^{\frac{1}{b}} = 0, \ \ \lim_{K \to 0}\left(\frac{C}{AK^a}\right)^{\frac{1}{b}} = +\infty \ ,$$

то есть асимптотами изокванты являются оси координат. Изокванты показывают, как изменяется сочетание ресурсов, необходимых для получения некоторых фиксированных объёмов продукции.

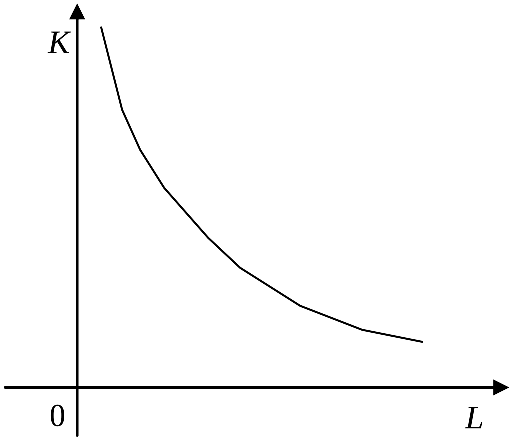


Рисунок 14 -Изокванта функции Кобба – Дугласа

Стремление к координатным осям изоквант:

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{C}{AK^{a}}\right)^{\frac{1}{b}} = +\infty\,,\quad \lim_{K\to +\infty}\left(\frac{C}{AK^{a}}\right)^{\frac{1}{b}} = 0$$

означает, что любое данное количество продукта $Y = C$ может быть произведено при сколь угодно малом количестве одного из ресурсов, был бы в достаточном количестве другой.

Так, нехватка основных фондов согласно изокванте функции Кобба-Дугласа может быть всегда компенсирована достаточным количеством рабочих. В действительности дело обстоит не так. Качественный продукт не всегда можно получить без достаточного количества необходимых основных фондов, но с большим числом рабочих. Это - недостаток функции Кобба-Дугласа.

Предельная норма замещения по абсолютной величине равна частному от деления предельной производительности труда на предельную капиталоотдачу, при этом, если предельный продукт в расчёте на единицу одного фактора, скажем, вдвое больше предельного продукта на единицу другого фактора, то и предельная норма замещения первого фактора другим равна двум. Знак минус означает, что при фиксированном объёме производства, увеличению одного ресурса соответствует уменьшение другого, и наоборот.

Предельная норма замещения капитала трудом $MRTS_{L,K}$ для производственной функции Кобба-Дугласа равна

$$MRTS_{L,K} = \frac{M_L}{M_K} = \frac{bAK^{a}L^{b-1}}{aAK^{a-1}L^{b}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{K}{L}\,.$$

Поэтому при снижении величины $\frac{b}{a}$ величина $MRTS_{L,K}$ постепенно убывает.

Коэффициент эластичности замещения ресурсов δ показывает, на сколько процентов должна измениться капиталовооруженность труда $\frac{K}{L}$, чтобы предельная норма замещения капитала трудом $MRTS_{L,K}$ изменилась на один процент. Для производственной функции Кобба-Дугласа коэффициент эластичности равен

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dMRTS_{L,K}} \frac{MRTS_{L,K}}{\frac{K}{L}} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)\frac{b}{a}\frac{K}{L}}{d\left(\frac{b}{a}\frac{K}{L}\right)\frac{K}{L}} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{b}{a}d\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{b}{a} = \frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1 .$$

Увеличим количество всех применяемых ресурсов в λ раз. Тогда

$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^a (\lambda L)^b = A\lambda^a K^a \lambda^b L^b = \lambda^{a+b} A K^a L^b = \lambda^{a+b} F(K, L) .$$

Если $a+b=1$, то $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{a+b} F(K,L) = \lambda F(K,L)$. Это постоянная отдача масштаба расширения производства.

Если $a+b>1$, то $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{a+b} F(K,L) > \lambda F(K,L)$. Это возрастающая отдача масштаба расширения производства.

Если $a+b<1$, то $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{a+b} F(K,L) < \lambda F(K,L)$. Это убывающая отдача масштаба расширения производства.

Так как для производственной функции Кобба-Дугласа предельная норма замещения капитала трудом $MRTS_{L,K} = \frac{b}{a} \cdot \frac{K}{L}$, то, изменяя коэффициенты a и b (при постоянном соотношении $\frac{K}{L}$) так, чтобы величина $\frac{b}{a}$ понижалась, можно добиться снижения $MRTS_{L,K}$. Это – капиталоинтенсивный технический прогресс. Изменяя коэффициенты a и b (при постоянном отношении $\frac{K}{L}$) так, чтобы величина $\frac{b}{a}$ повышалась, мы добиваемся роста $MRTS_{L,K}$. Это – трудоинтенсивный технический прогресс.

При изменении коэффициентов a и b при постоянных соотношениях $\frac{K}{L}$ и $\frac{b}{a}$ предельная норма замещения капитала трудом $MRTS_{L,K}$ не меняется. Это нейтральный технический прогресс.

Коэффициент эластичности выпуска по затратам капитала:

$$E_K(Y) = \frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{K}{AK^aL^b} aAK^{a-1}L^b = a ;$$

коэффициент эластичности выпуска по затратам трудовых ресурсов:

$$E_L(Y) = \frac{L}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{L}{AK^aL^b} bAK^aL^{b-1} = b .$$

Получаем, что параметрами производственной функции Кобба-Дугласа являются коэффициенты эластичности выпуска по затрам капитала a и по затратам трудовых ресурсов b, то есть параметры a и b характеризуют «вклад» соответственно капитала и трудовых ресурсов в увеличение выпуска.

Пример. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид: $Y = 10K^{0,2}L^{0,4}$. Найти предельные продукты труда M_L и капитала M_K, предельную норму замещения капитала трудом $MRTS_{L,K}$, коэффициент эластичности замещения σ, коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала $E_K(Y)$ и по затратам трудовых ресурсов $E_L(Y)$. Какова отдача расширения производства?

Решение. Предельный продукт труда (предельная производительность труда:

$$M_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = 10 \cdot 0,4 \cdot K^{0,2}L^{-0,6} = 4K^{0,2}L^{-0,6} .$$

Предельный продукт капитала (предельная производительность капитала): $M_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = 10 \cdot 0,2 \cdot K^{-0,8}L^{0,4} = 2K^{-0,8}L^{0,4}$.

Предельная норма замещения капитала трудом

$$MRTS_{L,K} = \frac{b}{a}\frac{K}{L} = \frac{0,4}{0,2}\frac{K}{L} = 2\frac{K}{L} .$$

Коэффициент эластичности замещения $\sigma = 1$. Так как $a + b = 0,2 + 0,4 = 0,6 < 1$, то наблюдается убывающая отдача от расширения масштабов производства.

Коэффициент эластичности выпуска по труду

$$E_L(Y) = \frac{L}{Y} M_L = \frac{L \cdot 4K^{0,2}L^{-0,6}}{10K^{0,2}L^{0,4}} = 0,4 .$$

Коэффициент эластичности выпуска по капиталу

$$E_K(Y) = \frac{K}{Y} M_K = \frac{K \cdot 2K^{-0,8}L^{0,4}}{10K^{0,2}L^{0,4}} = 0,2 .$$

1.5 Моделирование предложения

Функция предложения и её характеристики.

Функция предложения $S(p)$ описывает зависимость между рыночной ценой товара и его предложением на изолированном рынке этого товара. В такой ситуации естественно считать, что каждый производитель стремится к наибольшей прибыли и увеличивает выпуск товара по мере роста цены на него. Тогда предложение товара на рынке $S(p)$ является возрастающей функцией цены, то есть $S'(p) > 0$.

В более специфических ситуациях (олигополия, монополия) поведение предприятия необязательно определяется стремлением к максимальной прибыли, поскольку при повышении цены производитель может обеспечить себе заметный прирост прибыли и без увеличения объема выпуска. Таким образом возможны случаи, когда $S(p) = const$ или даже $S'(p) < 0$.

На рисунке 15 представлены возрастающая, неизменная и убывающая функции предложения: семейство функций предложения.

Линия AB соответствует совершенной конкуренции и стремлению производителей к получению максимальной прибыли, линия AC отвечает неизменному выпуску, который тем не менее дает возможность вести хозяйство с приличной прибылью в условиях несовершенной конкуренции; линия AD представляет снижающийся объем производства, что возможно в условиях монополии и резкого роста цен.

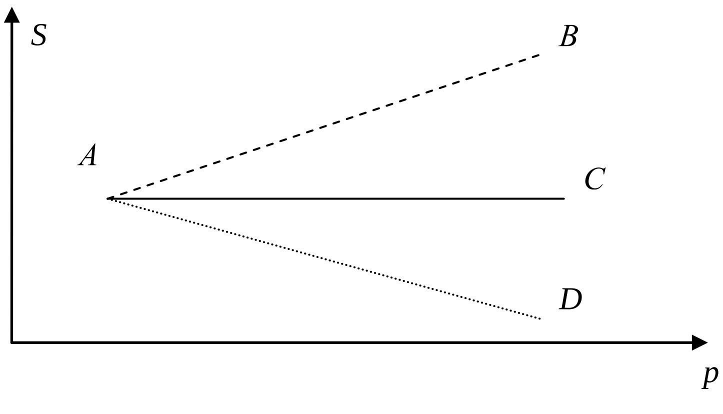


Рисунок 15-Возрастающая, неизменная и убывающая функции предложения

Основные виды функций предложения.

Для практических расчетов применяются функции предложения двух основных видов, параметры которых определяются путем обработки статистических данных:

а) линейная функция

$$S(p) = b_0 + b_1 p\ ,\ (b_0 > 0;\quad b_1 > 0)\ ;$$

б) степенная функция

$$S(p) = b_0 p^{\beta}\ ,\ (b_0 > 0;\ \ \beta > 0)\ .$$

Коэффициенты эластичности функции предложения.

Коэффициент эластичности предложения по цене $E_p(s)$ показывает, на сколько процентов увеличится предложение товара, если его цена вырастает на один процент.

Для линейной функции предложения

$$E_p(s) = \frac{b_1 \overline{p}}{\overline{S}}\ ,$$

где $\overline{p}$, $\overline{S}$ - среднее значения цены и предложения по таблице наблюдений.

Для степенной функции

$$E_p(s) = \frac{d \ln S}{d \ln p} = \beta\ .$$

В более общем случае объем предложения i -того товара рассматривается не только в зависимости от его цены p_i, но и от цен на другие товары. В этой ситуации система функций предложения имеет вид

$$S_i = S_i(p_1, ..., p_i, ..., p_j, ..., p_n)\ ,\ \ (i = 1, ..., n),$$

где n – количество наименований товаров.

Товары i и j называются конкурирующими, если перекрестная эластичность $E_{ij} < 0$,то есть при увеличении цены p_i уменьшается выпуск j - того товара; товары являются комплексным, если $E_{ij} > 0$.

В этом случае рост производства одного товара необходимо вызывает увеличение выпуска другого.

Задачи для самостоятельного решения (к подразделам 1.3-1.5)

1.Производственная функция фирмы имеет вид $y(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2$, где x_1, x_2 - затраты ресурсов. Определить максимальный выпуск и обеспечивающие этот выпуск затраты ресурсов.

2.Производственная функция фирмы имеет вид $y(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$, где x_1, x_2 - затраты ресурсов. Определить предельные продукты по ресурсам и построить изокванту $y = 3$. Написать уравнение изоклинали (линии наибольшего роста выпуска), проходящей через точку $x_1 = 1, x_2 = 1$, найти норму замены первого ресурса вторым в этой точке.

3.Производственная функция фирмы $y(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}$ описывает зависимость между затратами ресурсов x_1, x_2, x_3 и выпуском y. Определить максимальный выпуск, если $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Каковы предельные продукты в оптимальной точке?

4. Рекламное объявление в газете стоит 500 марок, минута телевизионного времени – 1500 марок. Недельный рекламный бюджет фирмы – 15000 марок. Если x_1, x_2 - соответственно число объявлений в газете и число минут рекламного времени на телевидении в неделю, то прибыль фирмы за неделю $\Pi(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 - 5x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 100$. Как следует использовать рекламный бюджет, чтобы прибыль была максимальной?

5. Найти среднюю и предельную эффективность ресурса x_2, если производственная функция имеет вид $y(x_1, x_2) = x_2 \dfrac{2x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$.

6.Производственная функция небольшого цеха, изготавливающего рамы для картин, имеет вид $F(K, L) = 5K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$, где F - число картин, вставленных в раму за день; K - число часов работы машины за день; L - число работающих. Каковы средний и предельный продукты труда при $K = 9$, $L = 9$? Как изменятся эти продукты при удвоении затрат ресурсов?

7. Производственная функция фирмы $y(x_1, x_2) = 10x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. Цены покупки ресурсов 5 д.е. и 10 д.е. соответственно. Каков наибольший выпуск при издержках $C = 100$ д.е.? Какой смысл имеет множитель Лагранжа?

8.Прибыль хозяйства определяе тсяформулой $\Pi(x_1, x_2) = My - x_1 - x_2 - k$, где x_1 - затраты на удобрение, x_2 - затраты на семена, y - урожайность с/х культуры определяется из соотношения $y(x_1, x_2) = 15{,}6 x_1^{0,4} x_2^{0,2}$, M - цена единицы с/х культуры, k - постоянные затраты, не зависящие от x_1, x_2. Найти те значения x_1, x_2, при которых прибыль максимальна.

9. Выпуск однопродуктовой фирмы задается производственной функцией $F(K,L)=3K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. Определить максимальный выпуск, если на аренду фондов и оплату труда выделено 150 д.е., стоимость единицы фондов $p_K = 5$ д.е./е.ф., ставка заработной платы $p_L = 10$ д.е./чел. Какова предельная норма замены одного занятого фондами в оптимальной точке? Найти множитель Лагранжа и объяснить его экономический смысл.

10. Фирма-монополист производит два вида продукции в количестве y_1 и y_2 соответственно. Функция затрат имеет вид: $C = 100y_1 + y_1y_2 + 10y_2$, а кривые спроса для каждого вида продукции: $p_1 = 50 - y_1 + y_2$; $p_2 = 30 + 2y_1 - y_2$, где p_1 и p_2 - цена единицы продукции первого и второго видов соответственно. Кроме того, фирма связана ограничением на общий объем производства продукции первого и второго видов в количестве 15 единиц, то есть $y_1 + y_2 = 15$. Требуется найти максимальную прибыль, которая может быть достигнута при этом условии.

11. Издержки предприятия на изготовление единицы некоторого вида продукции определяются формулой $C = x + y - x^2y + 15$, где $x \geq 0$ – затраты капитала, тыс. руб., $y \geq 0$ – расходы на оплату рабочей силы, тыс. руб. При каких значениях x и y издержки производства будут минимальными, если суммарные затраты на единицу продукции составляют 5 тыс. руб.

12.Технология производства фирмы представлена производственной функцией $F = L^{\frac{1}{3}}$, L – затраты труда. Единица труда обходится в одну денежную единицу $p_L = L$, а цена единицы выпускаемой продукции равна p. Каким уравнением описывается функция предложения на труд, при условии максимизации прибыли фирмы?

13.Функция полных издержек имеет вид $C = x^3 - x^2 + 2x$, где $x \geq 0$ - количество выпускаемой продукции. При каких объемах выпускаемой продукции выполняется закон наиболее экономичного производства. Построить графики функций полных, средних и предельных издержек, исследовать характер их изменения. Рассчитать эластичность полных издержек в точках экстремума функций $MC(x)$ и $AC(x)$, где $MC(x)$- предельные издержки и

$AC(x)$ - средние издержки.

14.Технология производства фирмы представлена производственной функцией $Q = 4\sqrt{L}$, L – затраты труда. Единица труда обходится в одну денежную единицу, $p_L = L$,а стоимость единицы выпускаемой продукции равна p . Каким уравнением описывается максимальная прибыль?

15.Технология производства фирмы представлена производственной функцией $Q = 3L^{\frac{1}{3}}$, где L – затраты труда. Единица труда обходится в 1 денежную единицу $p_L = L$, а стоимость единицы выпускаемой продукции равна p . Каким уравнением описывается функция спроса на труд, при условии максимизации прибыли фирмы?

16.Функция затрат предприятия монополиста описывается уравнением $C(x) = 30 + 20x$, а функции спроса на продукцию монополиста на двух рынках описываются уравнениями вида: $p_1 = 40 - 2x_1$, $p_2 = 80 - 10x_2$. Определить объем продаж и цены на каждом из двух рынков, максимизирующие прибыль монополии, если: $C(x)$ - общие затраты; p_1, p_2 - цены на продукцию на двух рынках; x_1, x_2 - объемы продаж на каждом рынке; x - общий объем продаж.

17.Сахарный завод производит x единиц продукции в месяц, а суммарные издержки составляют $C(x) = \frac{x^2}{50.} + 15x + 800$. Зависимость между ценой p на продукцию завода и ее количеством x описывается уравнением $p = 50 - \frac{x}{10}$. Рассчитать, при каких объемах производства, прибыль будет максимальна?

18.Производственная функция описывается уравнением $F(K, L) = 5K^{0,2}L^{0,4}$. Часовая арендная плата $n = 4$, часовая ставка оплаты труда $m = 2$. Фирма принимает решение производить $Q = 50$ единиц продукции, минимизируя издержки. Какой способ производства ей следует выбрать? Чему равны минимальные издержки?

19.Производственная функция Кобба - Дугласа описывается уравнением $Q = F(K, L) = 5K^{0,35}L^{0,45}$, где K - затраты капитала, L - затраты труда. Найти: выпуск Q при $K = 10$, $L = 6$;

предельные продукты труда M_L и капитала M_K; предельную норму замещения капитала трудом; эластичность замещения труда капиталом; коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала $E_K(Q)$ и по затратам трудовых ресурсов $E_L(Q)$. Что можно сказать об отдаче от масщтаба производства?

20.Производственная функция Кобба - Дугласа описывается уравнением $Q = F(K, L) = 5K^{0,35}L^{0,45}$, где K - затраты капитала, L - затраты труда. Арендная плата (реально выплачиваемая или условно начисляемая за час работы капитала) равна $n = 5$, часовая ставка оплаты труда равна $m = 3$. На рынке установилась цена единицы товара $p = 6$. Определить максимальную величину предложения и максимальную прибыль.