Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Логика предикатов

Лекция 6

Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle \mathrm{A};\ \Sigma\rangle$, называется *подсистемой* системы $\mathfrak{B} = \langle B;\ \Sigma\rangle$, (обозначается $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если выполняются следующие условия:

а) $A \subseteq B$;

б) для любого функционального символа $F^{(n)} \in \Sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$F_A(a_1, a_2, \dots, a_n) = F_B(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

т.е. интерпретации символа F действуют одинаково на элементах из A;

в) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$ справедливо равенство $P_A = P_B \cap A^n$, т.е. предикат P_A содержит в точности те кортежи предиката P_B, которые состоят из элементов множества A.

Теорема 1. Если $\mathfrak{B} = \langle B;\ \Sigma\rangle$ - алгебраическая система, $X\ \subseteq\ \mathrm{B}$, $X \neq \emptyset$, то существует единственная подсистема $\mathfrak{B}(X) = \langle B(X);\ \Sigma\rangle$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$ такая, что $X\ \subseteq \mathrm{B}(\mathrm{X})$ и $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}$ для любой подсистемы $\mathfrak{A} = \langle \mathrm{A};\ \Sigma\rangle$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$, для которой $X\ \subseteq\ \mathrm{A}$.

Подсистема $\mathfrak{B}(X)$ из теоремы 1 называется *подсистемой алгебраической системы $\mathfrak{B}$, порожденной множеством X.*

Для описания элементов подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ определим индукцией по построению понятие *терма* сигнатуры Σ:

1. переменные и константные символы из Σ суть термы;
2. если F_{Σ} - n-местный функциональный символ, $t_1, t_2, \dots, t_n$ - термы, то $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - терм;
3. никаких термов, кроме построенных по пп. 1,2, нет.

Множество всех термов сигнатуры Σ обозначается через $\mathrm{T}(\Sigma)$.

Под *сложностью* терма будем понимать число символов, входящих в терм.

Примеры

1) Термами сигнатуры $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$ будут, например, $0, x, x + y, z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$, а $x + y \leq (0 + x) \cdot x$ термом не является.

2) Если $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$ - функциональная сигнатура, то выражения $h(f(x_1, x_2, x_3), g(x_2)), g(f(h(x_1, x_2), x_1, g(x_2))$ – термы, а $h(x_1, f(x_1, x_3))$ термом не является.

Пусть $t(x_1, \dots, x_k)$ - терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся в множестве $\{x_1, \dots, x_k\}$, $\mathfrak{A}=\langle \mathrm{A};\ \Sigma\rangle$ - алгебраическая система. *Значение терма* t на элементах $a_1, \dots, a_k \in A$ ($t(a_1, \dots, a_k)$) определяется по индукции:

- если t есть переменная x_i (константный символ c), то значение t есть a_i (c);
- если $t \rightleftharpoons F(t_1, \dots, t_n)$, где $F^{(n)} \in \Sigma$, $t_1(x_1, \dots, x_k), \dots, t_n(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{T}(\Sigma)$ и значения термов $t_1, \dots, t_n$ на элементах $a_1, \dots, a_k$ равны $b_1, \dots, b_n$, то значение терма t есть $F(b_1, \dots, b_n)$.

Теорема 2. Если $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma\rangle$ - алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то $B(\mathrm{X}) = \{t(a_1, \dots, a_n) | t \in T(\Sigma), a_1, \dots, a_n \in X\}$.

Пример 3. Построить подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle \mathrm{A}; \boldsymbol{\Sigma}\rangle$, порожденную множеством X:

1. $\mathfrak{A}=\langle \mathbf{Q}; \cdot\rangle$, *X={1/2}*;
2. $\mathfrak{A}=\langle \mathbf{Q}\backslash\{0\}; \cdot, :\rangle$, *X={1/2}*;
3. $\mathfrak{A}=\langle \mathbf{Z}; -\rangle$, *X={22;-36}*.

Формулы логики предикатов

Введем понятие *атомарной формулы* сигнатуры Σ:

1. если $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ - атомарная формула;
2. если $P^{(n)} \in \Sigma$ - предикатный символ, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T(\Sigma)$, то $\mathrm{P}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - атомарная формула;
3. никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

Формула сигнатуры Σ определяется следующим образом:

1. атомарная формула сигнатуры Σ есть формула сигнатуры Σ;
2. если φ, ψ – формулы сигнатуры Σ, то $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi$ – формулы сигнатуры Σ;
3. никаких формул сигнатуры Σ, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

Формула сигнатуры Σ определяется следующим образом:

1. атомарная формула сигнатуры Σ есть формула сигнатуры Σ;
2. если φ, ψ – формулы сигнатуры Σ, то $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi$ – формулы сигнатуры Σ;
3. никаких формул сигнатуры Σ, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

Вместо записей $\forall x_1 \ldots \forall x_n\varphi$ и $\exists x_1 \ldots \exists x_n\varphi$ будем часто использовать записи $\forall x_1, \ldots, x_n\varphi$ и $\exists x_1, \ldots, x_n\varphi$.

Определим *подформулы* формулы φ сигнатуры Σ:

1. если φ - атомарная формула, то φ - ее единственная подформула;
2. если φ имеет вид $\neg\varphi_1$, или $\forall x\varphi_1$, или $\exists x\varphi_1$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1;
3. если φ имеет вид $\varphi_1 \land \varphi_2$, или $\varphi_1 \lor \varphi_2$, или $\varphi_1 \to \varphi_2$, то подформула формулы φ - это либо φ, либо подформула формулы φ_1, либо подформула формулы φ_2;
4. других подформул формулы φ, кроме построенных по пп. 1, 2, 3, нет.

Пример 4. Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$, $\varphi = \forall x(\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z))$ - формула сигнатуры Σ. Тогда $\forall x(\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z))$, $\exists y(x = F(z, y)) \vee P(z), \exists y(x = F(z, y)), x = F(z, y), P(z)$ - все подформулы формулы φ.

Говорят, что вхождение переменной x в формулу φ *связано* в φ, если оно находится в терме или предикате подформулы формулы φ вида $\forall x\psi$ или $\exists x\psi$; в противном случае это вхождение называется *свободным* в φ. Переменная x называется *свободной (связанной)*, если некоторое вхождение x в φ свободно (связано).

Пример 5. Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1. $P_1(x)$;
2. $P_2(x, y) \to \forall x P_1(x)$;
3. $\forall x(P_2(x, y) \to P_1(x))$.

Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной, в третьей – связанной; переменная y во всех формулах свободна.