Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
Т.Ю. ПЛЕШКОВА

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов-заочников
по специальностям: 03030165 «Психология»
10010365 «Социально-культурный сервис и туризм»

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2007

ББК 22.11
Н 65

Рецензенты: Н.Ю. Голодная, доцент каф. ММ;
Л.Я. Дубинина, ст. преп. каф. ММ

Никулина Л.С., Плешкова Т.Ю.
Н 65 МАТЕМАТИКА: практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 64 с.

Практикум является методическим руководством для изучения общего курса математики студентами-заочниками специальностей «Психология» и «Социально-культурный сервис и туризм» и содержит контрольные задания и методические указания к выполнению контрольных работ. Приводятся примеры решения типовых задач.

Все задания составлены в тридцати вариантах, поэтому пособие можно использовать и для работы со студентами очной формы обучения как в аудитории, так и для индивидуальных и контрольных работ.

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в высшем учебном заведении. Математические методы широко используются для решения всевозможных прикладных задач, и поэтому их изучение необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом специальности.

Данное учебно-практическое пособие соответствует учебной программе курса «Математика» для специальностей «Психология» и «Социально-культурный сервис и туризм». В пособие включены такие разделы математики как элементы линейной алгебры, элементы комбинаторики, основные понятия и теоремы теории вероятностей, элементы статистики, некоторые понятия дискретной математики (последний раздел только для психологов).

Практикум разделен на три части. В первой содержится программа курса, во второй – краткое изложение теории и решение типовых задач, и в третьей – задания для контрольных работ. Решение задач производится со ссылками на определения, теоремы, формулы и обозначения, приводящиеся в пособии, поэтому особое внимание следует обращать на определение основных понятий, формулировки теорем, подробно разбирать примеры, которые поясняют эти определения или ту или иную теорему. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа.

В процессе изучения курса математики ***студент заочной формы обучения*** должен выполнить контрольную работу. Контрольную работу необходимо выполнять самостоятельно, так как несамостоятельно выполненная контрольная работа не дает студенту возможности приобретения навыков решения задач, в результате чего он оказывается неподготовленным к сдаче экзамена.

Контрольные работы после их выполнения высылаются на проверку в университет. Без прорецензированных работ студент к экзамену не допускается. Номера задач в контрольных работах должны соответствовать последней цифре учебного шифра студента, который обязательно пишется на обложке тетради.

Студенты заочной формы обучения выполняют первые 10 вариантов контрольных заданий, например, задачи 1-10, 31-40, выбирая задачи соответственно своему шифру. При этом студенты специальности «Психология» выполняют все задания, а студенты специальности «Социально-культурный сервис и туризм» решают все задачи, кроме задач темы «Комбинаторика и элементы теории множеств».

Данное пособие можно использовать и для работы со студентами очной формы обучения.

1. ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Определители. Определители второго и третьего порядков. Правила вычисления определителя третьего порядка Транспонирование определителя. Понятие минора и алгебраического дополнения. Свойства определителей.

2. Матрицы. Действия над матрицами. Понятие матрицы. Виды матриц**.** Размерность матрицы. Умножение матрицы на число, сложение матриц, умножение матриц. Определитель квадратной матрицы. Вырожденная и невырожденная матрицы. Единичная матрица. Нулевая матрица. Обратная матрица. Условие существования и вычисление. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований..

3. Системы линейных уравнений. Системы двух и трех линейных алгебраических уравнений и их решение по правилу Крамера. Представление системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме. Матричный способ решения СЛАУ. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса решения систем.

4. Производная. Задача о касательной. Определение производной функции. Геометрическое значение производной. Производные некоторых функций. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложной функции.

5. Применение производных к исследованию функций. Формулировка признаков монотонности функции. Геометрическая интерпретация. Локальный экстремум. Необходимое и достаточное условия экстремума. Направление выпуклости кривой, точки перегиба. Достаточное условие выпуклости кривой. Понятие об асимптотах. Вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты. Определение параметров уравнения наклонной асимптоты.

6. Интегралы. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Табличное интегрирование. Вычисление некоторых интегралов методом подведения функции под знак дифференциала. Определенный интеграл как приращение первообразной. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла в декартовых координатах.

7. Элементы комбинаторики и теории множеств. Перестановки, размещения, сочетания. Объединение, пересечение и разность множеств. Диаграммы Венна. Декартово произведение множеств.

8. Элементы теории вероятностей. Предмет теории вероятностей. Событие. Пространство элементарных событий. Классификация событий: достоверное событие, невозможное, случайное, равновозможные события, совместные, несовместные, единственно возможное среди нескольких событий, полная группа событий, противоположные события. Алгебра событий.

Частота события. Формулировка свойств частоты. Статистическое определение вероятности события. Классическое определение вероятности. Аксиомы теории вероятностей.

9. Методы исчисления вероятностей. Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Сумма вероятностей полной группы несовместных событий. Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Независимые события. Вероятность произведения нескольких независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного события. Полная вероятность. Формула Бейеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

10. Дискретные случайные величины. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина. Понятие закона распределения дискретной случайной величины. Ряд распределения, многоугольник распределения. Функция распределения, ее свойства. Построение функции распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение. Мода.

11. Законы распределения дискретных случайных величин. Биномиальный закон распределения. Вероятности значений, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по биномиальному закону. Закон Пуассона. Числовые характеристики.

12. Непрерывные случайные величины. Понятие непрерывной случайной величины. Функция распределения непрерывной случайной величины. Ее свойства. Плотность вероятности. Свойства плотности. Отыскание функции распределения по известной плотности. Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Понятие о нормальном законе распределения непрерывной случайной величины. Вероятностный смысл параметров нормального распределения. Кривая Гаусса. Асимметрия и эксцесс. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Вероятность отклонения от математического ожидания. Правило трех сигм.

13. Основные понятия математической статистики. Предмет и типичные задачи математической статистики. Генеральная совокупность. Выборка. Вариационный ряд. Частоты и относительные частоты наблюдений. Статистическое распределение частот и относительных частот. Полигон частот. Накопленные частоты. Статистическая совокупность. Построение статистической совокупности по результатам наблюдений. Гистограмма частот. Гистограмма относительных частот. Эмпирическая функция статистического распределения. Ее свойства и график. Генеральная и выборочная средние, генеральная и выборочная дисперсии.

14. Статистические оценки. Виды оценок неизвестного статистического параметра: несмещенная и смещенная, эффективная, состоятельная. Оценка генеральной средней по выборочной средней. Исправленная выборочная дисперсия. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной. Выборочное среднее квадратическое отклонение. Исправленное среднее квадратическое отклонение. Интервальные оценки. Понятие о точности и надежности оценок. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ.

15. Методы расчета характеристик выборки. Равноотстоящие и неравноотстоящие варианты. Условные варианты. Сведение распределения вариант выборки к распределению условных вариант. Условные эмпирические моменты. Метод произведений расчета характеристик выборки.

16. Статистическая проверка статистических гипотез. Статистическая гипотеза о виде неизвестного распределения. Нулевая гипотеза. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Критерий согласия Пирсона χ-квадрат. Схема применения критерия Пирсона. Вычисление теоретических частот в случае задания выборки равноотстоящими вариантами.

17. Понятие о линейной корреляции. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Понятие о регрессии. Условные средние. Уравнения линии регрессии У на Х и регрессии Х на У. Прямая линия регрессии У на Х. Понятие выборочного коэффициента регрессии. Отыскание прямой линии регрессии по несгруппированным данным методом наименьших квадратов. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Элементы линейной алгебры

2.1.1. Определители

Определителем 2-го порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определителем 3-го порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -5\cdot 6 + (24-6) + 2\cdot 10 = 8.$$

Свойства определителей справедливы для определителей любого порядка:

а) определитель не меняет своего значения, если строки и столбцы поменять местами, т.е. транспонировать.

б) при перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак;

в) определитель, у которого две строки или два столбца одинаковы, равен нулю;

г) общий множитель элементов какой-либо строки или столбца определителя можно выносить за знак определителя.

д) если все элементы какой-либо строки или столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю;

е) величина определителя не изменяется, если к элементам какой–либо строки или столбца прибавить (или отнять) элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

2.1.2. Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, где $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..,n$, состоящая из m строк и n столбцов.

Суммой $A + B$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..,n$.

Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B = (b_{ij})$, элементы которой $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Пример 2. Вычислить 3A+2B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$. Тогда

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 9-4 \\ -3+6 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Произведением AB матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой c_{ij}, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки матрицы A и *j*-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{in} b_{nj},$$

$$i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,k.$$

Так как строки и столбцы матриц участвуют в произведении AB неравноправно, то AB≠BA.

Пример 3. Вычислить $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножим элементы первой строки первой матрицы на соответствующие элементы первого столбца второй матрицы и сложим все произведения. Полученный элемент поставим в первую строку и первый столбец матрицы-произведения. Далее вычислим остальные элементы произведения матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 & 5\cdot 2-8\cdot 1-4\cdot 6 \\ 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 & 6\cdot 2-9\cdot 1-5\cdot 6 \\ 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 & 4\cdot 2-7\cdot 1-3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ называют единичной. Легко проверить, что $AE = A$, если, конечно, число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы E, и $EA=A$.

Если матрица А имеет одинаковое число строк и столбцов, то ее называют *квадратной*.

Определителем квадратной матрицы A называется определитель, составленный из ее элементов.

Обозначают определитель матрицы A либо $\det A$ (от слова детерминант, т.е. определитель), либо $|A|$, либо Δ.

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрицу называют вырожденной.

Матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, называется *обратной* к матрице A. Если A – невырожденная матрица, то существует и при этом единственная матрица, обратная к матрице A. Ее вычисляют по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам исходной матрицы.

2.1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. Тогда систему можно решить *матричным методом* по формуле

$$X = A^{-1}B,$$

где A – матрица системы, A^{-1} – ее обратная матрица, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрица – столбец свободных членов, а $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных.

Матричный метод решения систем линейных уравнений не имеет серьезного практического применения, так как связан с громоздкими выкладками. Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется *метод Гаусса,* состоящий в последовательном исключении неизвестных по следующей схеме. Для того чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

выписывают расширенную матрицу этой системы

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

и над строками этой матрицы производят элементарные преобразования, приводя ее к виду, когда ниже главной диагонали, содержащей элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$, будут располагаться нули.

Разрешается: 1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений; 2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа; 3) прибавлять к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число. С помощью этих преобразований каждый раз получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной, т. е. такой системы, решение которой совпадает с решением исходной системы.

Пример 4. Доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x-3y+5z=-4, \\ 2x+y-z=5, \\ 4x+2y+3z=0 \end{cases}$$

и решить ее матричным методом.

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных: $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислим ее определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

$$\Delta=1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=1(3+2)+3(6+4)+5(4-4)=35.$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение найдем матричным методом. Для этого найдем обратную матрицу. Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=19,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-17,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-14,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=11,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7.$$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 5 & 19 & -2 \\ -10 & -17 & 11 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$.

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 5 & 19 & -2 \\ -10 & -17 & 11 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -5\cdot 4+19\cdot 5-2\cdot 0 \\ -10\cdot(-4)-17\cdot 5+11\cdot 0 \\ 0\cdot(-4)-14\cdot 5+7\cdot 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 75 \\ -45 \\ -70 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 75/35 \\ -45/35 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2\frac{1}{7}, y = -1\frac{2}{7}, z = -2$.

Пример 5. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду, когда ниже главной диагонали матрицы A будут стоять нули.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Получим нули в первом столбце матрицы, для чего умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй, а затем первую строку умножим на -1 и прибавим к последней строке. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавим теперь вторую строку к третьей и к четвертой. Тогда

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выпишем систему, полученную после преобразований:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \qquad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Неизвестные x_3, x_4 перенесем в правую часть уравнений системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ \qquad 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4. \end{cases}$$

Назовем эти неизвестные свободными.

Ясно, что остальные неизвестные зависят от того, какие значения имеют свободные неизвестные x_3 и x_4. Обозначим $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, где C_1 и C_2 – это произвольные значения свободных неизвестных, т. е. любые числа. Тогда преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + C_1 + 3C_2, \\ \qquad 2x_2 = 1 + 3C_1 - C_2. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = \dfrac{1+3C_1 - C_2}{2}$. Подставим найденное x_2 в первое уравнение: $2x_1 = 2 + C_1 + 3C_2 - \dfrac{1+3C_1 - C_2}{2}$ и $x_1 = 1 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{3}{2}\cdot C_2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\cdot C_1 + \dfrac{C_2}{4} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{C_1}{4} + \dfrac{7}{4}\cdot C_2$.

Таким образом, решение системы, которое в данном случае называют общим, имеет вид

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot C_1 + \frac{7}{4}\cdot C_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot C_1 - \frac{1}{2}\cdot C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

2.2. Элементы комбинаторики

Основной принцип комбинаторики (*правило умножения*).

Пусть надо совершить k последовательных действий, причем первое можно сделать n_1 способами, второе – n_2 способами, …, k-тое – n_k способами. Тогда все k действий можно сделать $n_1 n_2 ... n_k$ способами.

Пример 6. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 1,3,4,5,6,7,0?

Решение. Трехзначное число состоит из трех цифр. Первую можно выбрать шестью способами (нуль не подходит). Вторую можно выбрать семью способами, а третью – тремя способами, так как число четное. Таким образом, по правилу умножения имеем 6·7·3=126.

Перестановками называются множества, состоящие из одних и тех же n элементов, отличающиеся лишь порядком их расположения.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(n-1)n.$$

Пример 7. У прилавка стоят три человека. Сколькими способами из них можно составить очередь?

Решение. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Перестановками из n элементов с повторениями называются множества из n элементов k различных типов (каждого типа по $n_1, n_2, ..., n_k$ одинаковых элементов), отличающихся друг от друга порядком расположения элементов.

Число всевозможных перестановок с повторениями равно:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

Пример 8. Сколькими способами можно расположить в ряд две белые и три красные лампочки?

Решение. Имеем n=5, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. Значит, число способов расположения в ряд $P_5(2,3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Размещениями из n по m называются упорядоченные выборки объема m из n элементов ($m \le n$).

Число размещений вычисляют по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 9. Сколькими способами можно выбрать трех человек на три различные должности из семи кандидатов на эти должности?

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Размещениями из n по m с повторениями называются упорядоченные выборки объема m из n элементов, элементы в которых могут повторяться. В таком случае число размещений равно

$$A_n^m = n^m.$$

Пример 10. Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько всего телефонных номеров можно составить из цифр 2, 3, 5, 7?

Решение. Всего имеется четыре цифры, т. е. n=4. В каждом номере должно быть семь цифр, значит, m=7. Тогда можно составить $A_4^7 = 4^7 = 16384$ номера.

Сочетаниями из n по m называются неупорядоченные множества объема m из n элементов ($m \le n$).

Число сочетаний вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m}.$$

Пример 11. Сколькими способами можно выбрать трех рабочих из десяти для работы на одном участке?

Решение. Имеем n=10, m=3. Тогда число способов будет равно $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120$.

Сочетаниями из из n по m с повторениями называются неупорядоченные выборки объема m из n элементов, элементы в которых могут повторяться. Тогда

$$C_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 12. В кондитерской пять различных сортов пирожных. Сколькими способами можно купить одному человеку четыре пирожных?

Число способов вычисляем по формуле числа сочетаний с повторениями:

$$C_5^4 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

2.3. Элементы теории множеств

Множеством называется совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством P(x). Обозначаются множества заглавными латинскими буквами. Например:

$A = \{x | P(x)\}$.

Читается: «A состоит из элементов x, таких, что выполняется $P(x)$»

Пример 13. $B = \{x | x^2 - 7x - 3 = 0\}$.

Если x входит в A, то пишут $x \in A$, если x не входит в A, то $\overline{x \in A}$ или $x \notin A$.

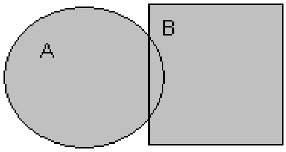
Множество A называется *подмножеством* B, если для любого $x(x \in A \to x \in B)$. Обозначается $A \subseteq B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \ \textit{или} \ \ x \in B\}.$$

Пример 14. Пусть $A = \{1,3,4\}$, $B = \{2,3,5\}$.

Тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. На диаграмме Венна операция объединения изображается так

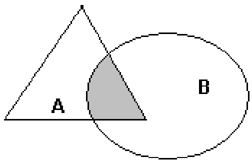


Объединение закрашено.

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример 15. Пусть A={1,3,4,5} и B={3,5,7} , тогда $A \cap B = \{3,5\}$. На диаграмме Венна операция пересечения изображается так



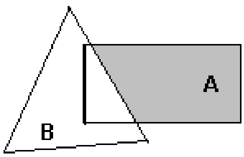
Пересечение закрашено.

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } \overline{x \in B}\}.$$

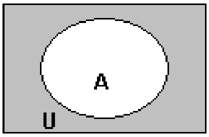
Пример 16. Пусть A={2,5,6,7}, B={5,7,8,9} , тогда A\B={2,6}.

На диаграмме Венна разность изображается так



Разность закрашена.

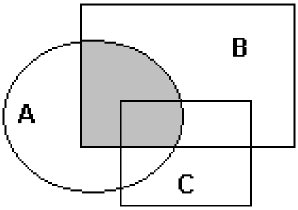
Пусть U универсальное множество и $A \subseteq U$. *Дополнением* A до U называется множество $\overline{A} = U \setminus A = \{x | \overline{x \in A}\}$.

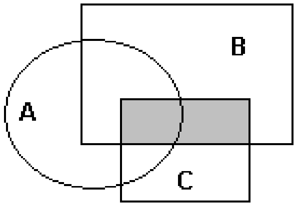


Пример 17. Пусть U={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={1,3,7}.

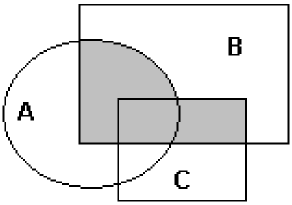
Тогда $\overline{A} = \{2,4,5,6,8,9\}$. .

Пример 18. Изобразить на диаграмме Венна множество $(A \cap B) \cup (B \cap C)$. Сначала изобразим $A \cap B$,затем $B \cap C$.





Объединив эти множества, получим искомое



Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\} . .$$

Замечание. *Порядок элементов в парах важен.*

Пример 19. Пусть A={1,2}, B={a,b,c}. Тогда декартовы произведения

$$A \times B = \{(1;a),(1;b),(1;c),(2;a),(2;b),(2;c)\},$$

$$B \times A = \{(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)\}.$$

2.4. Элементы теории вероятностей

2.4.1. Основные понятия теории вероятностей

Под *испытанием* или наблюдением подразумевается наличие определенного комплекса условий.

Событие – это результат (исход) испытания. События обозначают буквами $A,B,C\ldots$

Виды событий

Событие называют *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате испытания. Если же событие не может наступить, то его называют *невозможным*.

Случайным называется событие, которое в результате опыта может появиться, а может и не появиться, о чем заранее неизвестно.

Несовместными называются события, которые не могут появиться вместе в процессе испытания.

Единственно возможными называют события, если в процессе испытания не могут появиться другие события.

Равновозможными называют события, если условия их появления одинаковы и нет основания полагать, что одно из них более возможно, чем другое.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них и никакое другое.

Два несовместных события A и $\overline{A}$,образующих полную группу, называются *противоположными*.

Если несколько событий образуют полную группу, несовместны и равновозможны, то они называются *элементарными исходами* или *случаями*. Множество всех равновозможных исходов назовем *пространством элементарных событий*, а каждое элементарное событие – *точкой этого пространства*.

Совокупность элементарных событий, объединяющих все те исходы, при которых происходит событие A, называют *множеством элементарных событий, благоприятствующих событию A*.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к числу всех возможных элементарных исходов испытания: $P(A) = m / n$.

Суммой $A+B$ событий A и B называют событие, состоящее в появлении или события A, или B, или обоих сразу.

Произведением событий A и B называют событие AB, состоящее в одновременном наступлении обоих событий.

Пример 20. В ящике находится 30 изделий, причем 20 изделий первого сорта, а 10 – второго. Из ящика наудачу извлекают пять изделий.

Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий окажется три изделия первого сорта и два – второго.

Решение. По определению $P(A) = m/n$. Найдем общее число элементарных исходов:

$$n = C_{30}^{5} = \frac{30!}{5!25!} = 142506.$$

Так как каждые три детали, взятые из 20 деталей первого сорта, должны сочетаться с двумя деталями, взятыми из 10 деталей второго сорта, то

$$m = C_{20}^{3} \cdot C_{10}^{2} = \frac{20!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 1140 \cdot 45 = 51300.$$

Так что $P(A) = \dfrac{C_{20}^{3} C_{10}^{2}}{C_{30}^{5}} = 0{,}36$.

Пример 21. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы *а*, *а*, *а*, *н*, *н*, *с*, получится слово «*ананас*»?

Решение. Найдем общее число элементарных исходов испытания. Так как в слове «*ананас*» три буквы *а*, две буквы *н* и одна буква *с*, то пространство элементарных событий состоит из всех перестановок с заданным числом повторений, имеющих состав (3, 2, 1). Значит, здесь $n = 6, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$. Поэтому число всех исходов будет равно

$$n = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события, один. Таким образом, $P = \dfrac{1}{60}$.

2.4.2. Теоремы сложения и умножения

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей для нескольких событий. Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Если события несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице*:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 .$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(B) = 1 .$$

Условной вероятностью события А при наличии *В* называется вероятность события *В*, вычисленная при условии, что событие *В* наступило. Эту вероятность обозначают $P(A|B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) .$$

Для *независимых событий*

$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий.

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)...P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1}) .$$

В случае, когда события независимы в совокупности, т. е. появление любого числа из них не меняет вероятностей появления остальных,

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) .$$

Вероятность появления хотя бы одного события. Пусть события A_i, где $i = 1,2,..., n,$ независимы в совокупности, причем $P(A_i) = p_i$. Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо какая-то их часть, либо ни одного события.

Вероятность наступления хотя бы одного из таких событий находят по формуле:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n ,$$

где $q_i = 1 - p_i$, $i - 1,2,..., n$, -вероятности противоположных событий.

Пример 22. Готовясь к экзамену по математике, студент должен выучить 20 вопросов по алгебре и 30 – по теории вероятностей. Однако он выучил только 15 вопросов по алгебре и 20 по теории вероятностей. В билете три вопроса, из которых один по алгебре и два по теории вероятностей.

Найти вероятность того, что: а) студент получит отличную оценку (т.е. ответит на все вопросы билета); б) ответит на два вопроса и получит хорошую оценку.

Решение. а) Событие, состоящее в том, что студент ответит на все вопросы билета, означает, что он ответит и на первый, и на второй, и на третий вопросы билета. Вероятность ответить на вопрос по алгебре равна 15/20. Вероятность ответить на второй вопрос билета (это вопрос по теории вероятностей) не зависит от того, ответил студент или нет на первый вопрос, и равна $20/30$. Вероятность ответить на третий вопрос при условии, что на один вопрос по теории вероятностей студент уже ответил, равна 19/29. Так что вероятность получить отличную оценку по теореме умножения будет равна

$$P(A)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{15}{20}\frac{20}{30}\frac{19}{29}=\frac{19}{58}.$$

б) Обозначим событие, состоящее в том, что студент ответит на два вопроса и не ответит на один $(AB\overline{B}+A\overline{B}B+\overline{A}BB)$, где A – ответ на вопрос по алгебре, B – ответ на вопрос по теории вероятностей, соответственно – $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – противоположные события. Таким образом, найдем вероятность того, что студент ответит на вопрос по алгебре, затем на один вопрос по теории вероятностей и не ответит на другой вопрос по теории вероятностей или ответит на вопрос по алгебре, не ответит на вопрос по теории вероятностей и ответит на следующий вопрос по теории вероятностей или ответит на оба вопроса по теории вероятностей, но не ответит на вопрос по алгебре.

Имеем по теремам умножения и сложения вероятностей

$$P(AB\overline{B}+A\overline{B}B+\overline{A}BB)=P(AB\overline{B})+P(A\overline{B}B)+P(\overline{A}BB)=$$
$$=\frac{15}{20}\frac{20}{30}\frac{10}{29}+\frac{15}{20}\frac{10}{30}\frac{15}{29}+\frac{5}{20}\frac{20}{30}\frac{19}{29}=\frac{143}{348}.$$

Пример 23. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность разрушения, если на мост сбрасывают три бомбы с вероятностями попадания 0,3, 0,4 и 0,7 соответственно.

Решение. Мост будет разрушен, если в него попадет хотя бы одна бомба. Вычислим вероятность по формуле $P(A)=1-q_1q_2q_3$, где q_1, q_2, q_3 – вероятности промаха при бомбометании, т.е. находим вероятность разрушения как вероятность противоположного события, состоящего в том, что в мост не попала ни одна бомба:

$$P(A)=1\text{-}(1\text{-}0{,}3)(1\text{-}0{,}4)(1\text{-}0{,}7)=1\text{-}0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3=1\text{-}0{,}126=0{,}874.$$

2.4.3. Формулы полной вероятности и Бейеса

Формула полной вероятности. Вероятность события A, которое может наступить лишь с одним из несовместных событий $H_{1,} H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу, вычисляют по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + ... + P(H_n)P(A|H_n),$$

где $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Формула Бейеса для оценки вероятности события после испытания:

$P(H_{i/A}) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$, где $P(A)$-полная вероятность события A.

Пример 24. Имеются две урны. В первой 5 белых и 9 черных шаров, во второй – 8 белых и 2 черных шара. Из первой урны во вторую случайным образом перекладывается один шар, после чего во второй урне шары перемешиваются и из нее наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Решим задачу по формуле полной вероятности. Выберем гипотезы. H_1 – из первой урны во вторую переложен белый шар, H_2 – из первой урны во вторую переложен черный шар. Тогда $P(H_1) = \dfrac{5}{14}$, $P(H_2) = \dfrac{9}{14}$. Вычислим условную вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар, если туда переложен из первой урны белый шар. Так как в этом случае во второй урне стало 9 белых шаров, а всего там теперь 11 шаров, то $P(A|H_1) = \dfrac{9}{11}$. Аналогично находим $P(A|H_2) = \dfrac{8}{11}$. Подставляя в формулу полной вероятности найденные значения, имеем: $P(A) = \dfrac{5}{14}\dfrac{9}{11} + \dfrac{9}{14}\dfrac{8}{11} = \dfrac{117}{154}$.

Пример 25. Один из двух стрелков вызывается для сдачи норматива и производит два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, а для второго-0,7.

Мишень не поражена. Найти вероятность того, что стрелял первый стрелок.

Решение. Пусть событие A – мишень не поражена. Решим задачу по формуле Бейеса. Выберем гипотезы. H_1 – вызывается первый стрелок, H_2 – вызывается второй стрелок. $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$.

Условная вероятность того, что первый стрелок промахнулся равна $P(A\,|\,H_1) = (1-0{,}4)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$, а условная вероятность того, что промахнулся второй стрелок $P(A\,|\,H_2) = (1-0{,}7)^2 = 0{,}3^2 = 0{,}09$. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}36+0{,}5\cdot 0{,}09=0{,}18+0{,}045=0{,}225.$$

Находим теперь вероятность того, что был вызван первый стрелок. По формуле Бейеса эта вероятность будет равна

$$P(H_1\,|\,A) = \frac{0{,}18}{0{,}225} = 0{,}8\,.$$

2.4.4. Повторение испытаний

Формула Бернулли. Если в каждом из *n* независимых испытаний событие *A* наступает с одной и той же вероятностью *p* ($0<p<1$), то вероятность того, что в *n* испытаниях событие наступит ровно k раз равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}\,,\; q = 1 - p\,.$$

Локальная теорема Лапласа. Если *n* велико, то комбинаторные формулы неудобны в применении. В этом случае приближенное значение вероятности находят по формуле:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\text{ , где }\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находят по таблице приложения 1 (В.Е. Гмурман, «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике»). Функция $\varphi(x)$ является четной.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна *p*, событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')\,.$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, значения которой находят по таблице приложения 2. Заметим, что функция Лапласа нечетная.

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\,,\quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Пример 26. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0.4 –блондин, с вероятностью 0,1-рыжий, с вероятностью 0,3-шатен и с вероятностью 0,2-брюнет. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятность того, что в составе группы а) не менее 4-х блондинов; б) хотя бы один рыжий; в) нет ни блондинов, ни брюнетов.

Решение. Событие «в группе из шести человек не мене 4-х блондинов» означает, что в этой группе или 4, или 5, или 6 блондинов. Все эти события несовместны, поэтому $P_6(k \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$. Эти вероятности найдем по формуле Бернулли.

$$P_6(4) = C_6^4 0{,}4^4 0{,}6^2 = C_6^2 0{,}4^4 0{,}6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 0{,}0256 \cdot 0{,}36 = 0{,}1382\,.$$

$$P_6(5) = C_6^5 0{,}4^5 0{,}6 = 0{,}0369, \quad P_6(6) = 0{,}4^6 = 0{,}0041\,.$$

Тогда $P_6(k \geq 4) = 0{,}1382 + 0{,}0369 + 0{,}0041 = 0{,}1792$.

Вероятность того, что в группе хотя бы один рыжий, найдем по формуле вероятности хотя бы одного события: $P = 1 - q^n$. Обозначим это событие A. В нашем случае n=6, p=0,1, $q = 0{,}9$.

Значит, $P(A) = 1 - 0{,}9^6 = 1 - 0{,}5314 = 0{,}4686$.

Событие «в группе нет ни блондинов, ни брюнетов» означает, что в группе имеются лишь шатены и рыжие. Это событие обозначим B.

Найдем вероятность $P(ш+р)$ =0,3+0,1=0,4. Тогда вероятность того, что в группе из шести человек нет ни блондинов, ни брюнетов находим как вероятность противоположного события.

$P(B) = 1 - 0{,}4^6 = 1 - 0{,}0041 = 0{,}9959$.

Пример 27. В первые классы школы должно быть принято 200 детей. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Решение. Решаем задачу по локальной теореме Лапласа.

$P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеем $k = 100, n = 200, p = 0{,}485, q = 0{,}515$.

Тогда $x = \dfrac{100 - 200 \cdot 0{,}485}{\sqrt{200 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515}} = 0{,}4243$.

По таблице приложения 1 находим значение функции $\varphi(x)$. Получаем φ(0,4243)=0,3652. Далее по формуле найдем

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515}} = \frac{1}{7{,}07}.$$

Таким образом, $P_{200}(100) = \frac{1}{7{,}07} 0{,}3652 = 0{,}0516$.

Пример 28. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет будет от 45 до 55 монет, расположенных гербом кверху.

Решение. Вероятность этого события найдем по интегральной теореме Лапласа. Вычислим $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Вероятности выпадения герба и цифры одинаковы и равны 0,5. n=100. Так что имеем

$$x' = \frac{45 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{-5}{\sqrt{25}} = -1, \quad x'' = \frac{55 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.$$

По формуле $P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$ найдем искомую вероятность:

$$P(45;55) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

2.4.5. Дискретная случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Обозначают случайные величины буквами X, $У$, Z, …

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Таких значений может быть либо конечное число, либо счетное множество.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Ясно, что непрерывная случайная величина имеет бесконечно много значений.

Законом распределения случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Его можно задать таблично и тогда он называется *рядом распределения,* в виде формулы и графически.

Ряд распределения записывают в виде:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $\sum p_i = 1$.

Графиком ряда распределения является *многоугольник распределения*. В прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а потом соединяют их отрезками прямых.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события в n независимых испытаниях, в каждом их которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения $X=m$ вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Характеристиками положения случайной величины являются *числовые характеристики*.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

Это характеристика среднего значения.

Математическое ожидание биномиального распределения равно np.

Дисперсией случайной величины называется

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсия биномиального распределения равна:

$$D(X) = npq.$$

Дисперсию обычно вычисляют по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.

Функцией распределения называют функцию $F(x)=P(X<x)$, т. е. функцию, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Для дискретной случайной величины функцию распределения можно задать формулой:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i),$$

где суммируются вероятности тех значений x_i, которые меньше x.

Пример 29. У электрика имеется 8 лампочек, 3 из которых бракованные. Электрик наудачу отбирает 3 лампочки и ввинчивает их в сеть. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных лампочек, отобранных электриком, вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Вероятность того, что лампочка окажется бракованной, p=3/8=0,375. Число бракованных лампочек среди трех отобранных может быть равно 0, 1, 2, 3, т. е. случайная величина X принимает такие возможные значения. Вероятности этих возможных значений вычислим по формуле Бернулли.

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}625^3 = 0{,}2441;\ P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3\cdot 0{,}375\cdot 0{,}3906 = 0{,}4395;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3p^2 q = 3\cdot 0{,}375^2 \cdot 0{,}625 = 0{,}2637;$$

$P_3(3) = p^3 = 0{,}375^3$ =0,0527. Контроль:0,2441+0,4395+0,2637+0,4395=1.

Искомый закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,2441	0,4395	0,2637	0,0527

Математическое ожидание

$M(X)$=0·0,2441+1·0,4395+2·0,2637+3·0,0527=1,125.

Дисперсия $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9
p	0,2441	0,4395	0,2637	0,0527

Тогда $M(X^2)$ =0·0,2441+1·0,4395+4·0,2695+9·0,0527=3,1168. $D(X)$ =3,1168-1,2656=1,8512. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ =1,3606.

Найдем теперь функцию $F(x)=P(X<x)$. Значения случайной величины разбивают числовую ось на пять интервалов. В каждом интервале вычислим функцию.

Если $x\le 0$,то левее этого x нет ни одного значения случайной величины, и, значит, $F(x)=P(X<x)=0$.

Если $0<x\le 1$, то $F(x)$=0,2441.

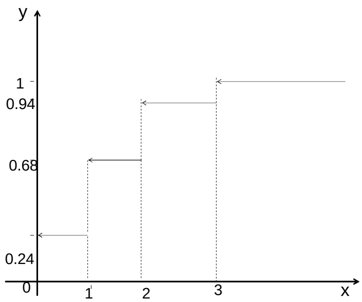
Если$1<x\le2$, то $F(x)$=0,2441+0,4395=0,6836.

Если $2<x\le3$, то $F(x)$=0,6836+0,2637=0,9473.

Наконец, если $x>3$,то $F(x)$=0,9473+0,0527=1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0{,}2441, & 0<x\le1,\\ 0{,}6836, & 1<x\le2,\\ 0{,}9473, & 2<x\le3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Строим график функции $F(x)$.



2.4.6. Непрерывная случайная величина

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$f(x)=F'(x).$$

По известной плотности можно найти функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), определяется равенством

$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Плотность распределения обладает свойствами:

$$1)\ f(x)\ge0;\ 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, все возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b), определяется равенством

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx .$$

Дисперсию непрерывной случайной величины находят по формуле

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 .$$

Модой непрерывной случайной величины называется то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} .$$

Здесь a и σ – соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины. *Вероятность попадания в заданный интервал* такой случайной величины находят по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) ,$$

где $\Phi(x)$ – это функция Лапласа, значения которой находят по таблице приложения 2 (Гмурман В.Е.).

Пример 30. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ Cx^2, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, вероятность попадания значений X в интервал (2;2,5).

Решение. Для нахождения постоянной C воспользуемся свойством плотности вероятности: $\int_a^b f(x)dx = 1$.

$$\int_0^3 Cx^2dx = C\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = C\cdot 9 = 1, \Rightarrow C = \frac{1}{9}, \text{ а } f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{9}x^2, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины находим по формуле

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3dx = \frac{1}{9}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{4},$$

$$D(X) = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4dx - (\frac{9}{4})^2 = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = 4{,}8625,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4{,}8625} = 2.2 .$$

Функцию $F(x)$ найдем по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

При $x \le 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$,

при $0 < x \le 3$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{27}x^3$,

при $x > 3$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^3 \frac{1}{9}x^2dx + \int_3^x 0dx = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{27}x^3 & ,0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал найдем по формуле

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

В нашем случае $P(2 < x < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(2) = \frac{125}{8\cdot 27} - \frac{8}{27} = \frac{61}{216}$.

2.5. Элементы математической статистики

2.5.1. Выборочный метод

Математическая статистика позволяет получать обоснованные выводы о параметрах или виде распределения случайных величин по совокупности наблюдений над ними – *выборке*.

Совокупность всех возможных значений исследуемой случайной величины называют *генеральной совокупностью*.

Совокупность n случайно отобранных объектов из генеральной совокупности называется *выборкой*.

Число объектов в выборке или генеральной совокупности называют *объемом выборки или генеральной совокупности* соответственно.

Генеральная совокупность может быть и бесконечной. Выборка всегда имеет конечный объем. Случайный эксперимент связан со случайной величиной, имеющей определенное распределение, поэтому обязательным требованием является независимость повторений эксперимента или случайность извлечений элементов выборки из генеральной совокупности.

Выборка может быть записана в виде *вариационного* или *статистического рядов.*

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором ее элементы записывают в возрастающем порядке.

Элементы $x_i, i = 1,2,..., n$, называют *вариантами.*

Разность между максимальным и минимальным элементами выборки называется ее *размахом.*

Пусть в выборке объема n варианта x_i встречается n_i раз. Число n_i называется *частотой* варианты x_i . Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n .$$

Статистическим распределением называется соответствие между вариантами и их частотами.

Статистическое распределение записывают в виде таблицы. Графиком статистического распределения является *полигон* частот или относительных частот $W_i = n_i / n$. *Полигоном* частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i).

При большом объеме выборки ее *записывают в виде статистической совокупности*, которую строят следующим образом:

1) находят минимальную и максимальную варианты;

2) определяют размах выборки $x_{\max} - x_{\min}$;

3) промежуток $[x_{\min}; x_{\max}]$ делят на l интервалов, подбирая это число так, чтобы шаг $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{l}$ был целым числом (в случае необходимости можно заменить $x_{\max}$ на большее число). Число интервалов берется от 6 до 20 в зависимости от объема выборки;

4) для каждого частичного интервала подсчитывают число вариант n_i, попавших в этот интервал (варианта, совпадающая с верхней границей интервала, относится к предыдущему интервалу);

5) составляют таблицу

$[x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	$\cdots$	$(x_{i-1}; x_i]$	$\cdots$	$(x_{l-1}; x_l]$
n_1	n_2		n_i		n_l

Замечание. Можно найти число интервалов иначе, используя формулу

$$l = 1 + 3{,}2 \lg n .$$

Тогда при n=60 получим $l = 1 + 3{,}2 \cdot 1{,}77 \approx 6{,}7$.Число интервалов возьмем равным 6. Тогда $h = 40/6 \approx 6{,}7$. В этом случае берут величину шага, равной 7, а за последнюю варианту число 102.

Графиком статистической совокупности является *гистограмма* частот или относительных частот. Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны W_i / h. Гистограмма относительных частот служит оценкой плотности распределения.

2.5.2. Эмпирическая функция и статистические оценки

Эмпирической функцией распределения называется функция

$$F^*(x) = n_X / n ,$$

определяющая для каждого x относительную частоту события $X<x$.

Выборочной средней называется величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} .$$

Она служит оценкой математического ожидания.

Выборочной дисперсией является величина

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 .$$

Несмещенной называют оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. Несмещенной оценкой дисперсии является «исправленная» дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B .$$

$\sigma_B = \sqrt{D_B}$ является выборочным средним квадратическим отклонением.

Оценки параметров удобно находить методом произведений по формулам:

$$\bar{x} = M_1^* h + c, \quad s^2 = \frac{n}{n-1}[M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 ,$$

где

$M_1^* = \dfrac{\sum n_i u_i}{n}$ – условный момент первого порядка,

$M_2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2}{n}$ – условный момент второго порядка,

$u_i = \dfrac{x_i - c}{h}$ – условная варианта,

с – ложный нуль.

В качестве ложного нуля выбирают варианту, стоящую в середине вариационного ряда.

Пример 31. Составить статистическое распределение, построить гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию, найти методом произведений выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии, среднее квадратическое отклонение, доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания по данным выборки

82 63 96 90 66 85 71 80 75 97 70 91

65 85 60 80 75 83 67 69 74 87 79 92

79 72 71 72 71 84 80 86 100 91 76 81

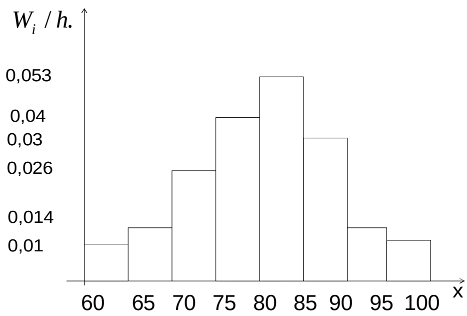
76 81 86 93 89 82 84 84 77 78 78 88

87 81 82 76 83 84 82 86 83 86 88 78.

Решение. Максимальная варианта равна 100, а минимальная -60. Размах выборки равен 100-60=40. Берем 8 интервалов длиной 40/8=5. Результаты группировки сведем в таблицу.

№	$x_{i-1} - x_i$	$x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$	n_i	$\sum_{j=1}^{i} n_j$	$\dfrac{n_i}{n}$	$\sum_{j=1}^{i} \dfrac{n_j}{n}$
1	60-65	62,5	3	3	0,0500	0,0500
2	65-70	67,5	4	7	0,0667	0,1167
3	70-75	72,5	8	15	0,1333	0,2500
4	75-80	77,5	12	27	0,2000	0,4500
5	80-85	82,5	16	43	0,2667	0,7167
6	85-90	87,5	10	53	0,1666	0,8833
7	90-95	92,5	4	57	0,0667	0,9500
8	95-100	97,5	3	60	0,0500	1,0000

По данным таблицы построим гистограмму относительных частот.



Из рисунка видно, что гистограмма относительных частот является приближением плотности нормального распределения.

Эмпирическую функцию распределения строим с использованием данных последнего столбца вышеприведенной таблицы.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ определяется по значениям накопленных относительных частот соотношением

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n} .$$

Очевидно, что при $x < x_1^*$ $F^*(x) = 0$, а при $x > x_n^*$ $F^*(x) = 1$.

Записываем функцию $F^*(x)$, которая на промежутке $(x_1^*; x_8^*]$ представляет собой неубывающую кусочно-постоянную функцию.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 62{,}5, \\ 0{,}05, & 62{,}5 < x \le 67{,}5, \\ 0{,}1167, & 67{,}5 < x \le 72{,}5, \\ 0{,}25, & 72{,}5 < x \le 77{,}5, \\ 0{,}45, & 77{,}5 < x \le 82{,}5, \\ 0{,}7167, & 82{,}5 \le x < 87{,}5, \\ 0{,}8833, & 87{,}5 < x \le 92{,}5, \\ 0{,}95, & 92{,}5 < x \le 97{,}5, \\ 1, & x > 97{,}5. \end{cases}$$

Построение графика эмпирической функции производят так же, как и построение графика теоретической функции $F(x)$.

Для вычисления числовых характеристик выборки составим еще одну таблицу.

i	x_i^*	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
1	62,5	3	-4	-12	48	27
2	67,5	4	-3	-12	36	16
3	72,5	8	-2	-16	32	8
4	77,5	12	-1	-12	12	0
5	82,5	16	0	0	0	16
6	87,5	10	1	10	10	40
7	92,5	4	2	8	16	36
8	97,5	3	3	9	27	48
$\sum$		60		-25	181	191

Последний столбец таблицы служит для контроля вычислений при помощи тождества $\sum n_i (u_i+1)^2 \equiv \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + \sum n_i$.

Подставим в это тождество данные последней строки таблицы. Получим: 181+2(-25)+60=191. Вычисления сделаны правильно. Находим $M_1^* = -25/60 \approx -0{,}4167$, $M_2^* = 181/60 \approx 3{,}0167$.

Тогда подставляя эти значения в формулы

$\overline{x} = M_1^* h + c$, $D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2$, имеем $\overline{x} =$ -0,4165·5+82,5= =80,4165, а $D_B = (3{,}0167 - (-0{,}4167)^2)25 = 71{,}0765$.

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = 71{,}0765 \cdot 60/59 \approx 72{,}2812\,, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 8{,}5218\,.$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания находим по формуле

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\,,$$

где значения t_γ находим по таблице приложения 3 (Гмурман В. Е.)при заданной надежности γ= 0,95 и объему выборки n=60: t_γ =2,001. Подставляя в формулу выборочное среднее $\bar{x} = 80{,}4165$, s= $\sqrt{72{,}2812} = 8{,}50$, имеем $\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{17}{7{,}74} \approx 2{,}197$.

Тогда получаем: 80,416-2,197<a<80,416+2,197 и окончательно

77,949<a<82,613.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

3.1. Элементы линейной алгебры

1-30. Дана матрица A. Вычислить произведения $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; **5**. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; **8**. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; **9**. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; **11**. $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 9 \\ 2 & 13 & -7 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; **12**. $\begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 \\ -8 & 9 & 2 \\ 11 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix} 14 & -3 & 10 \\ -5 & 13 & 11 \end{pmatrix}$; **14**. $\begin{pmatrix} -5 & 8 & -11 \\ 9 & 20 & 3 \end{pmatrix}$; **15**. $\begin{pmatrix} -9 & 12 & 10 \\ 6 & -5 & 15 \end{pmatrix}$;

16. $\begin{pmatrix} 21 & 0 & 3 \\ 12 & -4 & 2 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$; **17**. $\begin{pmatrix} 4 & -13 & 7 \\ -7 & -3 & 2 \\ 1 & 14 & -11 \end{pmatrix}$; **18**. $\begin{pmatrix} 30 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$;

19. $\begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 12 & -8 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$; **20**. $\begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -7 & 13 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; **21**. $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -13 & 2 & -8 \\ -14 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

22. $\begin{pmatrix} 23 & 2 & -2 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}$; **23**. $\begin{pmatrix} -9 & 13 & 12 \\ 6 & -8 & 10 \end{pmatrix}$; **24**. $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 9 \\ 7 & -7 & -12 \end{pmatrix}$;

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -6 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; **26**. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 21 \\ 3 & -5 & 20 \end{pmatrix}$; **27**. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 12 & -3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$;

28. $\begin{pmatrix} -11 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & 11 \\ -8 & 20 & 3 \end{pmatrix}$; **29**. $\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 6 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$; **30**. $\begin{pmatrix} 23 & 7 & -4 \\ 12 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

31-60. Решить: систему а) матричным методом; систему б) методом Гаусса.

31. а) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$

32. а) $\begin{cases} 3x+y-2z=9, \\ 2x+\quad 3z=11, \\ -3x-y+4z=-7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+\quad x_3-7x_4=3, \\ \quad 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} x+2y-z=6, \\ 3x-4y+z=2, \\ x+y+2z=7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6, \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} 7x-5y\quad =31, \\ 4x+\quad 11z=-43, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} 5x-y+2z=-2, \\ 2x+3y-4z=19, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} 2x+4y+z=1, \\ 3x-y+2z=16, \\ -x+2y+3z=-5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} x+3y-z=11, \\ 2x+2y+4z=2, \\ 3x-5y+2z=-5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=4. \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=1, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=3. \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 2x-4y+z=-4, \\ 4x-3y+z=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=6. \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} -2x+2y+3z=2, \\ 3x+y+z=2, \\ 2x-3y-z=-10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3, \\ 3x_1-x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4, \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7. \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} 3x-y+z=-4, \\ 2x+2y-z=5, \\ x+3y+z=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=3, \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=2, \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} x-2y+5z=24, \\ 5x+y-z=5, \\ x+2y+3z=12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4, \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2, \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3. \end{cases}$

43. а) $\begin{cases} x-y+2z=10, \\ x+y-z=-3, \\ 3x+4y+z=12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} 3x+y+z=7, \\ -2x+2y+z=3, \\ 2x+3z=11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6, \\ 3x_1-x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} 5x-y+2z=1, \\ 2x-y-2z=2, \\ 6x-3y-5z=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} 7x+y+z=7, \\ x-3y+3z=13, \\ 2x+2y-4z=-10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6, \\ 3x_1-x_2-2x_4=6. \end{cases}$

47. а) $\begin{cases} 3x+2y-2z=-2, \\ 2x-y+3z=14, \\ 4x-5y+z=16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+3x_3-x_4=10, \\ x_1+x_2-5x_3=-10, \\ 3x_2+2x_3=1. \end{cases}$

48. а) $\begin{cases} 3x+y+2z=4, \\ 2x+\qquad 3z=9, \\ -3x+y+4z=10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3. \end{cases}$

49. а) $\begin{cases} x+2y+3z=9, \\ 3x+y+z=8, \\ 2x+y+2z=9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+2z=2, \\ 4x+y+4z=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} -x+y-z=-6, \\ 2x\qquad +3z=10, \\ x+4y-z=-8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$

52. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=15, \\ 3x_1-x_2+x_3=8, \\ -2x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$

53. а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=13, \\ x_1+3x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1-x_2+4x_3=11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$

54. а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=-5, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1, \\ 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$

55. а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3, \\ 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2. \end{cases}$

56. а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

57. а) $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2, \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=5. \end{cases}$

58. а) $\begin{cases} 3x-4y+5z=18, \\ 2x+4y-3z=26, \\ x-6y+8z=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+3x_3+3x_4=14. \end{cases}$

59. а) $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$

60. а) $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2, \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3, \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$

3.2. Комбинаторика

61.Сколько существует делителей числа 210?

62. У Тани 7 книг по математике, а у Коли 4 книги по психологии. Сколькими способами 3 свои книги Таня может обменять на три книги Коли?

63. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

64. Сколькими способами можно разместить 9 студентов в трех комнатах, рассчитанных на трех человек каждая?

65.Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров в три вагона?

66. В лифт сели 7 человек. Сколькими способами они могут выйти на трех этажах?

67. Расписание одного дня содержит 5 разных уроков. Найти количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.

68. Сколько диагоналей у выпуклого 12-угольника?

69. Ребенок ставит на первую линию доски белые фигуры (два слона, два коня, две ладьи, ферзя и короля). Сколькими способами он может это сделать?

70. Буквы азбуки Морзе состоят из символов точка и тире. Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

71.Из вазы, где стоят 10 красных и 3 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

72. Докажите, что в Москве проживают, по крайней мере, два человека с одинаковыми инициалами.

73. Сколькими способами могут быть брошены две игральные кости?

74. Сколькими способами могут быть переставлены буквы в слове математика?

75. Сколькими способами из 7 изумрудов, 5 сапфиров, 6 рубинов можно выбрать 4 камня для кольца?

76. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки, если известно, что все сдали экзамен?

77. Сколько четырехзначных чисел оканчиваются цифрой 8?

78. Имеются пять монет достоинством 10 коп., 50 коп., 1 руб., 2 руб., 5 руб. Сколькими способами можно разложить эти монеты в два кармана?

79. На складе 5 ящиков с разными фруктами и 3 ящика с разными овощами. Сколькими способами можно каждой из двух овощных палаток выдать по одному ящику с фруктами и овощами?

80. В группе 10 мальчиков и 5 девочек. Сколькими способами можно выбрать из группы 4 человек так, чтобы среди них было не менее 2 девочек?

81. Сколько всего семизначных чисел, у каждого из которых цифра 3 встречается 4 раза, цифра 5 встречается один раз и цифра 2 встречается два раза?

82. Сколько будет костей домино, если использовать в их образовании все цифры?

83. Сколько всего чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

84. Сколькими способами можно выбрать три монеты из 5 рублевых и 4 двухрублевых монет?

85. Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг разных авторов?

86. Сколько всего трехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

87. Сколько можно составить целых чисел, каждое из которых изображается тремя различными цифрами?

88. Сколькими способами два студента могут сдать два экзамена?

89. Сколько трехзначных чисел оканчиваются цифрой 7?

90. Сколько чисел меньше 1000 можно составить из цифр 2, 7, 0?

3.3. Элементы теории множеств

91-120. Изобразить с помощью диаграмм Венна:

91. $(A\cap B)\setminus(A\setminus C)$

92. $(A\setminus B)\setminus C$

93. $A\setminus(B\cup C)$

94. $(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

95. $(A\cup B)\setminus(C\setminus A)$

96. $A\cap(B\setminus C)$

97. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

98. $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$

99. $\overline{A\cap B}\cup C$

100. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

101. $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$

102. $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$

103. $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$

104. $(\overline{A}\cup B)\cap A$

105. $\overline{A\cup\overline{B}}\cap C$

106. $A\cap B\cap\overline{C}$

107. $\overline{A\cup B}\cap(B\cap C)$

108. $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup C$

109. $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$

110. $U\setminus(A\cap B\cap C)$

111. $U\setminus(A\cup B\cup C)$

112. $A\setminus(U\cap C\cap B)$

113. $B\cap(U\cap A\cap C)$

114. $C\setminus(U\cap A\cap B)$

115. $U\cap(A\cap B)\cap C$

116. $\overline{A\cap B}\cap U$

117. $U\setminus(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

118. $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\cap C$

119. $U\cap(A\setminus(B\cap C))$

120. $U\cap(\overline{A\cup B}\cap C)$

3.4. Определение вероятности

121. Семь друзей решили ехать в одной электричке, состоящей из семи вагонов. Садиться они будут по отдельности. Какова вероятность того, что никакие два друга не сядут в один вагон?

122. В коробке пять занумерованных одинаковых шариков. Наудачу по одному извлекают все шарики. Найти вероятность того, что номера извлеченных шариков появятся в убывающем порядке.

123. На полке расставляют 5 книг. Найти вероятность того, что определенные две книги будут стоять рядом.

124. Телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что он читается одинаково слева направо и справа налево.

125. Абонент забыл последние три цифры телефонного номера, но помнил, что они образуют число, делящееся на 5. С учетом этого он набрал забытые цифры наугад, Найти вероятность того, что он угадал нужный номер.

126. В группе 15 студентов, среди них 5 девушек. По списку случайным образом отобрано 7 студентов. Найти вероятность того, что среди них 3 девушки.

127. Студент знает 15 из 20 вопросов к экзамену. Найти вероятность того, что он ответит на все три заданные ему преподавателем вопроса.

128. Маленький ребенок, не умеющий читать, рассыпал карточки с буквами «м», «о», «р», «е» и собрал их наугад. Найти вероятность того, что у него получится слово море.

129. В замке на общей оси три диска, каждый из которых разделен на 9 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно открыть.

130. Задумано трехзначное число. Найти вероятность того, что задуманным окажется случайно названное трехзначное число.

131. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным окажется случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

132. Номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры номера одинаковы.

133. Семь человек садятся произвольным образом в ряд. Найти вероятность того, что определенный человек окажется в центре.

134. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна семи.

135. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет одну окрашенную грань.

136. В урне 2 белых и 4 черных шара. Из урны один за другим вынимают все шары, находящиеся в ней. Найти вероятность того, что последний вынутый шар будет черным.

137. Игральная кость подбрасывается два раза. Найти вероятность того, что оба раза выпадет одно и тоже число очков.

138. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно 8.

139. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 343 кубика одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу вынутый кубик имеет две окрашенные грани.

140. Из урны, содержащей 3 красных и 4 зеленых шара, вынимаются по одному все шары. Найти вероятность того, что вторым будет извлечен зеленый шар.

141. Пять пассажиров могут сесть в любой из трех вагонов. Найти вероятность того, что все они сядут в один вагон.

142. Найти вероятность того, что трехзначное число оканчивается цифрой 4.

143. Найти вероятность того, что у четырехзначного числа все цифры четные.

144. Найти вероятность того, что трехзначное число делится на 5.

145. Пятитомное сочинение произвольно расставляется на полке. Найти вероятность того, что оно будет расставлено в правильном порядке слева направо.

146. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу белую и черную туру. С какой вероятностью они будут «бить» друг друга?

147. В урне 3 белых и 5 красных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся красными?

148. На 10 одинаковых карточках написаны цифры от 0 до 9. Найти вероятность того, что случайно составленное с помощью этих карточек двузначное число делится на 15.

149. На полке случайным образом расставлено 10 разных книг. Найти вероятность того, что определенные три окажутся рядом.

150. В группе из 7 спортсменов 5 мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух наудачу отобранных спортсменов оба мастера спорта.

3.5. Теоремы сложения и умножения

151. Вероятность сдачи студентом первого экзамена 0,4, второго – 0,7, третьего – 0,9. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) все экзамены; в) не более одного экзамена.

152. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе: а) будет ровно одно попадание; б) будет три попадания; в) будет не менее двух попаданий.

153. Вероятность того, что девушка купит розовую помаду, равна 0,8, красную – 0,7, оранжевую – 0,6. Найти вероятность того, что девушка купит: а) три помады; б) две помады; в) не менее двух помад.

154. На участке для бега с препятствиями три барьера. Вероятность того, что бегун пройдет хорошо первый барьер, равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что бегун хорошо пройдет: а) все три барьера; б) не менее одного барьера; в) ровно два барьера.

155. Студент выполняет работу по теории вероятности, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что нужные данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) в трех справочниках; в) хотя бы в двух справочниках.

156. Первый рабочий делает 10% брака, второй – 15% брака, третий делает 20% брака. У каждого рабочего берут наугад по одному изделию. Найти вероятность того, что среди взятых изделий качественных будет: а) ровно одно; б) не менее одного; в) ровно три.

157. Три шахматиста команды А играют с тремя шахматистами команды В. Вероятности выигрыша первого, второго, третьего шахматистов команды А соответственно равны: 0,7; 0,6; 0,4. Найти вероятность того, что из команды В выиграют: а) три шахматиста; б) один шахматист; в) не менее двух шахматистов.

158. Вероятность выигрыша по лотерейному билету одной серии равна 0,2, другой – 0,1. Имеется по два билета каждой серии. Найти вероятность того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трех билетов; в) ни одного билета.

159. Вероятности того, что маленькой девочке купят куклу, мишку, лошадку, соответственно равны: 0,9; 0,7; 0,5. Найти вероятность того, что девочке купят: а) ровно одну игрушку; б) не менее одной игрушки; в) три игрушки.

160. Стрелок произвел три выстрела по удаляющейся от него цели. Вероятность попасть в цель в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) один раз; в) не менее двух раз.

161. Вероятность попасть в самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,5, из второго – 0,6. Сделано по оному выстрелу из каждого орудия. Найти вероятность того, что: а) самолет поражен ровно одним снарядом; б) самолет не поражен; в) самолет поражен.

162. Вероятности того, что студент купит себе первый, второй, третий диск, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что студент купит: а) один диск; б) два диска; в) не менее одного диска.

163. Вероятность того, что дождь будет сегодня, равна 0,5, завтра – 0,6, послезавтра – 0,7. Найти вероятность того, что: а) ровно два из трех ближайших дней будут дождливы; б) ровно один; в) в ближайшие три дня дождя не будет.

164. Для сигнализации установлено два независимых сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,8, второй – 0,6. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработает хотя бы один сигнализатор; б) сработают оба; в) не сработает ни один сигнализатор.

165. В ящиках находятся детали: в первом – 30, из них 25 стандартных, во втором – 20, из них 17 стандартных. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе взятые детали – стандартны; б) обе взятые детали – нестандартны; в) стандартна хотя бы одна из взятых деталей.

166. Первый мастер делает 10% изделий второго сорта, второй – 15%. У каждого мастера наугад берут по два изделия. Найти вероятность того, что из взятых изделий: а) три второго сорта; б) нет второго сорта; в) не менее одной второго сорта.

167. Три студента университета едут на соревнования по трем разным видам спорта. Вероятность того, что выиграет первый, равна 0,5, второй – 0,6, третий – 0,9. Найти вероятность того, что из этого университета выиграют: а) два студента; б) один студент; в) хотя бы один студент.

168. В первой группе 15 студентов, из них 5 девочек, во второй группе 20 студентов, из них 10 девочек. Из каждой группы наугад выбирают по одному студенту. Найти вероятность того, что среди выбранных: а) два мальчика; б) две девочки; в) мальчик и девочка.

169. Первый автомат делает 1% брака, второй – 2%, третий – 3%. Случайным образом с каждого автомата взяли по одной детали. Найти вероятность того, что среди них качественных будет: а)две детали; б) три детали; в) не менее двух деталей.

170. Три подруги сдают экзамен. Вероятность того, что первая получит 5, равна 0,9, вторая – 0,8, третья – 0,7. Найти вероятность того, что: а) три получат 5; б) одна получит 5; в) не менее двух получат 5.

171. Вероятность того, что ребенок съест суп, равна 0,8, плов – 0,5, компот – 0,9. Найти вероятность того, что ребенок съест: а) три блюда; б) одно блюдо; в) не менее двух блюд.

172. Вероятность того, что первый банк обанкротится, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Найти вероятность того, что обанкротятся: а) один банк; б) три банка; в) не менее двух банков.

173. Вероятность того, что студент сегодня позавтракает, равна 0,7, пообедает – 0,8, поужинает – 0,9. Найти вероятность того, что студент сегодня: а) поест два раза; б) не поест ни разу; в) поест не менее одного раза.

174. Три друга сдают экзамен. Вероятность того, что экзамен сдаст первый друг, равна 0,7, второй – 0,9, третий – 0,6. Найти вероятность того, что экзамен не сдадут: а) два друга; б) не менее одного друга; в) три друга.

175. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,6. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

176. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый, равна 0,7, второй – 0,8. Найти вероятность: а) поражения одного бомбардировщика; б) поражения двух бомбардировщиков; в) поражения хотя бы одного бомбардировщика.

177. В сессию студент сдает три зачета. Вероятности сдачи студентом первого, второго, третьего зачета соответственно равны: 0,9; 0,5; 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) три зачета; б) хотя бы один зачет; в) три зачета.

178. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока из строя выйдут: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна радиолампа.

179. На заводе делают панели, 90% которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) две панели; б) хотя бы одна панель; в) три панели.

180. Вероятность поражения цели первым стрелком 0,9, вторым – 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) одним стрелком; б) двумя стрелками; в) ни одним из стрелков.

3.6. Формулы полной вероятности. Формулы Бейеса

181. В первом ящике 20 деталей, из них 17 стандартных, во втором ящике 30 деталей, из них 25 стандартных. Наудачу (из наудачу взятого ящика) взята одна деталь. Найти вероятность того, что: а) эта деталь окажется стандартной; б) случайно взятая стандартная деталь – из второго ящика.

182. В 10 урнах синие и желтые шары, причем в 9 урнах по два синих и два желтых шара, а в одной урне 5 желтых и 4 синих шара. Наудачу из наудачу выбранной урны берут один шар. Найти вероятность того, что: а) шар окажется синим; б) шар, оказавшийся синим – взят из урны с 4 шарами.

183. Среди поступивших на сборку деталей 40% с завода № 1, остальные с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1–0,02, для завода № 2 – 0,01.Найти: а) вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартная; б) вероятность того, что деталь, оказавшаяся стандартной, поступила с завода №1.

184. В вычислительной лаборатории 40% дисплеев первого типа и 60% второго. Во время вычислений 90% дисплеев первого типа и 85% второго работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая машина проработает безотказно. б) Найти вероятность того, что безотказно проработавшая машина первого типа.

185. В классе 10 девочек и 15 мальчиков. Вероятность того, что девочка выучит урок, равна 0,9, для мальчика – 0,8. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятый ребенок выучил урок; б) ребенок, выучивший урок, оказался мальчиком.

186. Имеется 6 коробок изделий типа А и 8 коробок изделий типа В. Вероятность безотказной работы изделия А – 0,8, для В – 0,9. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятое изделие безотказно проработает; б) безотказно проработавшее изделие типа В.

187. В группе 15 юношей и 12 девушек. Вероятность того, что юноша сдаст зачет – 0,9, для девушки – 0,8. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный студент сдаст зачет; б) студент, сдавший зачет, оказался девушкой.

188. Из первой группы отобрано 8 спортсменов, из второй 5. Вероятность того, что в сборную попадет спортсмен первой группы, равна 0,8, для второй – 0,6. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный спортсмен попал в сборную; б) попавший в сборную – из второй группы.

189. По линии связи передают два сигнала типа А и В с вероятностями соответственно 0,7 и 0,3. В среднем из-за искажения принимается 70% сигналов типа А и 80% типа В. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал был типа В.

190. Сообщение состоит из «точек» и «тире», причем они встречаются в отношении 5:3. При передаче искажается в среднем 2/5 «точек» и 1/3 «тире». Найти вероятность того, что: а) принят сигнал без искажений; б) принятый без искажения сигнал – «тире».

191. Обследовано 10 мужчин и 10 женщин. Оказалось, что среди женщин 0,2% дальтоников, среди мужчин 5%. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом; б) дальтоник является мужчиной.

192. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятность того, что резистор проработает гарантийный срок, для этих партий соответственно равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад резистор проработает гарантийный срок; б) проработавший гарантийный срок резистор был из второй партии.

193. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25%, второй –35%, третий – 40% деталей. С первого конвейера поступает 1% брака, со второго – 2%, с третьего – 3%. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая бракованная деталь была с первого конвейера.

194. Девушке понравились 5 моделей обуви одной фирмы и 3 модели обуви другой. Вероятность того, что выдержит гарантию модель первой фирмы, равна 0,9, для второй – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наудачу купленная из понравившихся пар выдержит гарантию; б) выдержавшая гарантию обувь была второй фирмы.

195. В семье 3 девочки и 2 мальчика. Вероятность того, что мальчик вымоет посуду – 0,5, для девочки – 0,9. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный ребенок помоет посуду; б) помывший посуду ребенок – мальчик.

196. В одной коробке 30 деталей, из них 3 – брак. Во второй коробке 40 деталей, из них 7 – брак. Из наудачу выбранной коробки наудачу взята деталь. Найти вероятность того, что: а) деталь стандартна; б) деталь взята из первой коробки, при условии, что она стандартна.

197. Обследовано 10 мужчин и 10 женщин. Оказалось, что из опрошенных 70% женщин и 40% мужчин занимаются спортом. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный человек из этих 20 занимается спортом; б) занимающийся спортом человек – женщина.

198. В пяти ящиках с 10 шарами в каждом содержится по два красных шара, в семи других ящиках с 15 шарами в каждом – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наугад взятый шар – красный; б) наугад взятый красный шар– из первых 5 ящиков.

199. В двух коробках находятся однотипные конденсаторы: в первой – 20, из них 2 неисправны, во второй – 10, из них 3 неисправны. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятый из наудачу выбранной коробки прибор – исправен; б) исправный прибор окажется из второй коробки.

200. В телевизионном ателье 2 кинескопа первого типа и 8 второго. Вероятность выдержать гарантию для первого типа равна 0,9, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантию; б) выдержавший гарантию кинескоп– второго типа.

201. Есть 6 коробок диодов типа А и 8 типа В. Вероятность безотказной работы диода типа А равна 0,7, для типа В – 0,9. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятый диод проработает гарантийный срок; б) проработавший гарантийный срок диод– типа В.

202. Для поисков аппарата космического корабля выделено 4 вертолета типа А и 6 типа В. Вероятность обнаружения для вертолетов типа А – 0,6, для В – 0,8. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный вертолет обнаружит аппарат; б) обнаруживший аппарат вертолет – типа В.

203. У охотника три собаки одной породы и две другой. Вероятность того, что собака первой породы поймает лису, равна 0,6, для второй – 0,5. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранная собака поймает лису; б) наудачу выбранная собака, поймавшая лису, первой породы.

204. Прибор состоит из 2 узлов одного типа и 3 узлов другого. Надежность в течение гарантии для первого типа 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранный узел проработает гарантию; б) проработавший гарантию узел– второго типа.

205. У ребенка в ванне 5 корабликов одного вида и 4 другого. Вероятность того, что утонет кораблик первого вида, равна 0,7, для второго – 0,9. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный кораблик утонул; б) наудачу выбранный утонувший кораблик – первого вида.

206. В первой урне 10 зеленых и 10 белых шаров, во второй урне 5 зеленых и 15 белых шаров. Из первой урны наугад один шар переложен во вторую урну, после этого извлекли шар из второй урны. Найти вероятность того, что этот шар зеленый.

207. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 8 второго. Гарантийный срок выдерживают 80% ламп первого типа и 90% второго. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранная лампа выдержит гарантийный срок; б) лампа, выдержавшая гарантийный срок, второго типа.

208. На участке, изготавливающем болты, первый станок делает 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом сделан на 3 станке.

209. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый обрабатывает 40%, второй 60%. Первый делает 0,1% брака, второй 0,2% брака. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь сделана вторым автоматом.

210. Для сигнализации используют индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит одному из типов, соответственно равны 0,4 и 0,6. При нарушении первый срабатывает с вероятностью 0,9, второй – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранный индикатор сработает; б) сработавший индикатор– первого типа.

3.7. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

211. На факультете 700 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в этот день равна 1/365. Вычислить вероятность того, что найдутся 5 студентов, у которых дни рождения совпадают.

212. Найти вероятность того, что при 500 испытаниях событие появится не менее 100 раз, если вероятность его наступления в каждом из независимых испытаний равна 0,3.

213. Всхожесть семян данного растения равна 0,8. Найти вероятность того, что из 1000 посаженных семян число проросших будет заключено между 760 и 810.

214. Вероятность того, что изделие высшего качества, равна 0,4. Найти вероятность того, из 500 изделий число изделий высшего качества составит от 180 до 197.

215. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет 525.

216. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность того, что будет не менее 3 поражений.

217. Вероятность того, что студент сдаст экзамен, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 5 экзаменов он сдаст не более 3.

218. Вероятность наступления события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что событие наступит не более 50 раз.

219. Вероятность того, что рейс данной компании задержится, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 300 рейсов задержатся от 30 до 57.

220. Вероятность того, что секретарша опоздает на работу, равна 0,6. Найти вероятность того, что из 100 раз она опоздает ровно 28 раз.

221. Вероятность того, что студент позавтракает, равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение учебной шестидневки студент позавтракает не более 2 раз

222. Вероятность изготовления изделий первого сорта для данного завода равна 0,87. Найти вероятность того, что среди 456 изделий первого сорта будет от 350 до 398.

223. Вероятность того, что студент спортсмен, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 500 студентов спортсменов ровно 17.

224. Вероятность того, что ребенок помоет руки после улицы, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 10 прогулок руки будут помыты не менее чем после трех.

225. Вероятность брака на некотором производстве равна 0,4. Найти вероятность того, что из 7 изделий бракованных будет не более 3.

226. По данным ОТК завода 0,8 всего объема выпускаемых изделий первого сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наугад для проверки 400 изделий 70 будет не первого сорта.

227. Вероятность поражения мишени для каждого из 10 стрелков равна 0,8. Каждый делает по одному выстрелу. Найти вероятность того, что попадут не менее 7 стрелков.

228. Вероятность выигрыша в каждой шахматной партии для игрока равна 0,6. Найти вероятность того, что из 7 партий он выиграет не более 3.

229. Всхожесть семян лимона 80%. Найти вероятность того, что из 200 семян взойдут от 123 до 176.

230. Вероятность того, что ребенок выучит урок, равна 0,7. Найти вероятность того, что из 8 уроков ребенок выучит менее 2.

231. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,25. Найти вероятность того, что из 100 билетов выигрышных будет от 10 до 20.

232. Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,15. Найти вероятность того, что из 7 билетов проигрышных будет не менее 5.

233. При штамповке изделий бывает в среднем 15% брака. Для контроля отобрано 9 изделий. Найти вероятность того, что два изделия окажутся бракованными.

234. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,6. Найти вероятность того, что из 400 изделий контроль пройдут от 234 до 276 изделий.

235. Вероятность того, что торпеда попадет в судно, равна 0,3. Выпущено 5 торпед. Найти вероятность того, что не менее 2 попало в судно.

236. Вероятность попадания в цель для зенитного орудия равна 0,6. Найти вероятность того, что из 3 выстрелов было хотя бы одно попадание.

237. Найти вероятность поражения мишени 80 раз при 100 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7.

238. Установка состоит из 500 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого транзистора равна 0,4. Найти вероятность того, что из строя выйдут не более 30.

239. Вероятность того, что хоккеист попадет в ворота, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 100 его бросков по воротам попаданий будет от 40 до 60.

240. Найти вероятность того, что из 7 подбрасываний монеты, орел выпадет не менее 3 раз.

3.8. Дискретная случайная величина

241-270. Найти закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ (X). Построить график функции распределения $F(X)$.

241. Вероятности того, что студент сдаст первый, второй, третий, четвертый экзамены, соответственно равны 0,5; 0,7; 0,9; 1. СВ X – количество сданных студентом экзаменов.

242. Вероятность того, что студент сдаст каждый из 4 экзаменов, равна 0,8. СВ X – количество сданных студентом экзаменов.

243. Монета подбрасывается 4 раза. СВ X – количество выпавших гербов.

244. Вероятность выиграть по каждому из 4 лотерейных билетов равна 0,3. СВ X – количество выигравших билетов.

245. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 билетов с выигрышем 5 тысяч рублей, 12 билетов с выигрышем 10 тысяч рублей, 8 билетов с выигрышем 15 тысяч рублей. Остальные билеты не выигрывают. СВ X – выигрыш для владельца одного билета.

246. Из 20 изделий 3 бракованных. Случайным образом отобрали 2 изделия. СВ X – количество бракованных изделий среди отобранных.

247. В группе, состоящей из 10 девочек и 15 мальчиков, разыгрывают 3 билета в кино. СВ X – количество мальчиков, получивших билет.

248. Вероятность того, что каждый из 4 студентов сдаст экзамен, равна 0,7. СВ X – количество студентов, сдавших экзамен.

249. В хлопке содержится 10% коротких волокон. СВ X – количество коротких волокон среди 4 отобранных.

250. Вероятности попадания в цель для каждого из 3 стрелков соответственно равны 0,5; 0,7; 0,9. СВ X- количество попаданий в цель при одном залпе.

251. Вероятности того, что теннисистка выиграет в первой, второй, третьей партиях, соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. СВ X – количество выигранных теннисисткой партий.

252. В урне 4 зеленых и 6 желтых шаров. Из нее три раза подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. СВ X – количество извлеченных зеленых шаров.

253. В урне 4 шара с номерами 1,2,3,4. Вынули два шара. СВ X – сумма номеров шаров.

254. На полке стоит 4 тома «Война и мир». Наугад берут том. СВ X – номер тома, который взяли.

255. Один раз подбрасывают игральную кость. СВ X – количество выпавших на кости очков.

256. В урне 4 желтых и 6 синих шаров. Из урны наугад достали 3 шара. СВ X – количество синих среди вынутых.

257. Вероятность того, что клиент застрахуется, равна 0,5. СВ X – количество застраховавшихся клиентов среди 4 опрошенных.

258. При прессовке болванок 2/3 общего числа из них не имеют зазубрин. СВ X – количество болванок с зазубринами среди 3 рассмотренных.

259. Вероятность того, что заказчик согласится на проект, равна 0,5. СВ X – количество согласившихся на проект заказчиков среди 3 обратившихся.

260. Вероятность того, что будет снег в ближайшие 4 дня, равна 0,4. СВ X – количество снежных дней среди 4 рассматриваемых.

261. Вероятности того, что первый, второй, третий абитуриенты поступят в институт, соответственно равны 0,5; 0,7; 0,9. СВ X – количество поступивших абитуриентов, среди рассматриваемых.

262. Вероятность того, что рабочий опоздает, равна 0,6. СВ X – количество опозданий среди 3 рассматриваемых дней.

263. Вероятность того, что ребенок откажется от еды за завтраком, равна 0,5, за обедом – 0,4, за ужином – 0,3. СВ X – количество отказов от еды за один день.

264. В урне 10 белых шаров и 15 синих. Вынули 3 шара. СВ X – количество белых шаров среди вынутых.

265. Вероятность отказа прибора за время испытания равна 0,1. СВ X – количество отказавших среди 4 рассматриваемых.

266. У стрелка 3 патрона. Он стреляет до первого попадания. Вероятность попасть в цель равна 0,8. СВ X – количество израсходованных патронов.

267. Вероятность выхода из строя каждого из 3 блоков в течение гарантийного срока, равна 0,2. СВ X – количество блоков, не вышедших из строя в течении гарантийного срока.

268. Из 20 приборов 5 высшей категории. Случайным образом взяли 3 прибора. СВ X – количество приборов высшей категории среди взятых.

269. Вероятности выхода из строя каждого из трех узлов соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – количество вышедших из строя узлов.

270. В урне 5 шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Наудачу достают один шар. СВ X – номер вытянутого шара.

3.9. Непрерывная случайная величина

271-300. Дана плотность распределения $f(x)$ СВ X. Найти параметр a, Функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$,

σ (X). Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что из n испытаний СВ X попадет в интервал [a, b] ровно k раз.

271. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<1 \\ ax,\ 1\le x\le 5 \\ 0,\ x>5 \end{cases}$, a=2, b=3, n=5,k=2.

272. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<1 \\ ax^2,\ 1\le x\le 4 \\ 0,\ x>4 \end{cases}$, a=2, b=3, n=4, k=2

273. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<1 \\ ax^3,\ 1\le x\le 3 \\ 0,\ x>3 \end{cases}$, a=2,5; b=2,7; n=4; k=3

274. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<1 \\ a(x-1),\ 1\le x\le 2 \\ 0,\ x>2 \end{cases}$, a=1,2; b=1,4; n=5, k=3

275. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<2 \\ a(x+1),\ 2\le x\le 4 \\ 0,\ x>4 \end{cases}$, a=2,5; b=3; n=3; k=1

276. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ a,\ 0\le x\le 6 \\ 0,\ x>6 \end{cases}$, a=3, b=4, n=4, k=2

277. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ a(2x+3),\ 0\le x\le 2 \\ 0,\ x>2 \end{cases}$, a=0,5; b=1,5; n=5; k=4

278. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ a(3x^2+3),\ 0\le x\le 2 \\ 0,\ x>2 \end{cases}$, a=0, b=1, n=5, k=2

279. $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ a(2x+2),\ 0\le x\le 3 \\ 0,\ x>3 \end{cases}$, a=0, b=2, n=5, k=3

280. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0 \\ a(3x^2+8), \; 0\le x\le 4 \\ 0, \; x>4 \end{cases}$, a=1, b=2, n=4, k=2

281. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0 \\ a(4x+5), \; 0\le x\le 3 \\ 0, \; x>3 \end{cases}$, a=1, b=2, n=5, k=1

282. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0 \\ a(2x+1), \; 0\le x\le 4 \\ 0, \; x>4 \end{cases}$, a=1, b=2, n=4, k=3

283. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0 \\ a(2x+2), \; 0\le x\le 4 \\ 0, \; x>4 \end{cases}$, a=3, b=4, n=5, k=3

284. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<-1 \\ 2a(x+1), \; -1\le x\le 2 \\ 0, \; x>2 \end{cases}$, a=0, b=1, n=3, k=2

285. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<-1 \\ 3ax^2, \; -1\le x\le 2 \\ 0, \; x>2 \end{cases}$, a=1, b=2, n=5, k=1

286. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<2 \\ 2a(x-2), \; 2\le x\le 3 \\ 0, \; x>3 \end{cases}$, a=2,5; b=2,8; n=4, k=2

287. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<1 \\ a(2x-1), \; 1\le x\le 2 \\ 0, \; x>2 \end{cases}$, a=1,5; b=1,7; n=5, k=3

288. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<1 \\ a(3x^2-2), \; 1\le x\le 2 \\ 0, \; x>2 \end{cases}$, a=1,3; b=1,4; n=6, k=2

289. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0 \\ a(6x+2), \; 0\le x\le 3 \\ 0, \; x>3 \end{cases}$, a=1, b=2, n=5, k=2

290. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 3ax^2, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$, a=0,5; b=0,7, n=3, k=1

291. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ a(x+2)^2, & -1\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, a=0, b=1, n=5, k=5

292. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ a(x+3)^2, & -1\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$, a=1,5; b=1,7; n=3, k=2

293. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a(3x^2+7), & 0\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$, a=1, b=2, n=4, k=2

294. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ a(x^2+x), & 1\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$, a=2, b=3, n=5, k=4

295. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ a(x^2+2x), & 2\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$, a=2, b=3, n=4, k=1

296. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a(2x+2)^2, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, a=1, b=2, n=3, k=1

297. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ a(x+7), & -2\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, a=1, b=1,5; n=5, k=2

298. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ a(x+1), & 3\le x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$, a=4, b=5, n=4, k=2

299. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 2a(2x+3), & 1\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$, a=2, b=3, n=5, k=1

300. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ a(x^2+3), & 2\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$, a=2,5; b=2,7; n=5, k=4

3.10. Элементы математической статистики

301-330. Составить статистическое распределение, построить гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию, найти методом произведений выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии, среднее квадратическое отклонение, доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания по данным выборки:

301. 190 105 121 85 125 146 165 189 206 225 200 107 112 146 167 114 129 141 142 125 150 154 146 128 128 160 164 180 114 130 140 151 172 184 167 172 135 151 135 156 137 152 181 156 162 158 180 161 160 170.

302. 80 64 97 110 60 63 57 72 88 79 95 112 89 64 71 58 67 103 100 81 92 87 80 62 81 91 89 72 67 70 83 79 72 75 68 70 92 74 69 77 79 79 84 87 84 76 86 76 75 76.

303. 137 105 119 147 96 124 116 135 139 159 112 118 146 159 174 186 171 107 121 129 153 165 157 126 129 168 127 152 160 137 148 156 146 126 132 154 154 140 131 145 145 142 139 132 140 144 145 132 140 148.

304. 45 59 68 77 74 53 58 66 79 80 85 94 38 44 50 57 54 75 75 83 90 86 62 40 54 65 62 67 71 78 71 93 59 56 66 75 82 68 61 64 78 70 65 63 68 70 88 71 58.

305. 118 124 144 139 128 131 134 123 130 164 148 129 115 127 121 101 114 142 130 135 151 160 128 117 109 113 141 138 145 141 111 139 124 119 125 132 127 136 121 143 140 124 132 135 128 125 131 122 130 130.

306. 294 324 296 270 252 260 372 314 272 324 212 349 321 277 294 329 289 274 300 255 340 230 274 283 361 318 275 303 310 265 293 318 250 355 263 298 280 309 316 298 271 277 303 273 281 310 285 277 290 283.

307. 182 215 208 169 190 205 196 200 213 172 185 190 195 220 178 156 185 210 205 207 212 194 180 175 188 191 202 201 210 166 176 170 162 225 218 236 174 186 215 186 178 205 230 189 193 202 204 190 201 198.

308. 301 355 304 263 294 313 320 270 291 339 281 302 314 335 296 317 310 338 259 279 250 284 352 326 353 266 314 319 307 310 328 332 345 275 287 303 283 316 284 314 319 326 299 301 304 292 296 312 350 273.

309. 220 252 72 257 217 170 205 256 179 229 249 145 98 156 212 197 278 220 230 149 200 272 191 215 230 241 162 219 225 193 182 110 202 102 157 182 197 267 139 118 135 202 208 208 185 189 167 237 177 189.

310. 207 130 142 114 137 120 145 160 179 182 193 126 139 157 167 150 145 169 165 173 190 195 154 152 212 157 187 171 160 164 171 169 182 215 231 217 199 175 175 178 196 203 188 190 177 191 178 184 200 201.

311. 172 198 217 165 152 174 189 200 212 179 201 169 177 181 180 178 178 190 182 187 180 210 188 181 184 195 233 190 177 183 205 190 194 184 187 213 223 185 200 203.

312. 99 102 110 117 146 150 77 105 82 134 130 159 175 92 110 133 181 124 137 148 179 161 117 163 112 144 113 113 122 135 153 131 120 127 128 168 147 131 122 128 125 135 127 148 140 153 140 144 128 104.

313. 179 187 162 202 184 195 158 200 206 241 193 208 167 205 219 208 219 190 204 216 222 237 233 211 214 224 234 223 214 227 217 236 246 259 221 225 228 250 223 228 215 227 229 262 249 266 244 252 240 234.

314. 146 151 173 195 128 178 139 162 185 190 195 135 170 217 238 222 225 241 262 193 192 197 203 209 217 199 245 271 206 233 252 209 212 225 258 247 292 229 236 231 278 280 297 247 259 300 304 269 212 237.

315. 211 215 242 200 222 225 231 238 244 258 261 261 272 207 213 225 241 259 249 297 242 223 273 240 258 248 244 250 250 263 282 205 270 252 276 284 264 254 279 292 266 255 273 283 290 266 278 283 256 312.

316. 353 369 326 357 335 360 340 351 349 306 360 369 390 387 422 372 375 412 371 377 382 402 385 392 372 379 382 430 428 407 392 395 431 362 367 380 398 414 407 448 399 399 442 435 439 420 414 425 364 372.

317. 252 233 226 231 212 244 264 255 221 230 215 263 254 238 241 248 291 275 235 249 260 284 289 239 241 243 251 266 269 280 287 253 245 251 258 266 271 268 249 256 245 269 271 260 267 261 261 256 256 253.

318. 220 267 234 212 189 174 252 257 233 258 199 249 209 202 192 225 270 277 207 309 196 229 234 218 235 273 278 254 292 222 263 285 214 230 254 215 233 261 236 261 263 225 237 240 236 242 236 239 239 245.

319. 138 140 148 155 164 172 142 146 123 133 150 157 165 167 135 127 144 130 152 169 174 142 174 186 145 177 178 150 167 170 176 149 154 161 163 166 153 170 162 162 152 157 164 154 159 161 161 158 159 180.

320. 196 186 205 225 239 246 175 165 170 187 198 219 241 230 255 179 232 244 202 202 234 192 216 209 221 232 224 194 209 214 223

229 223 189 220 183 209 207 213 193 200 208 211 192 203 204 207 198 248 250.

321. 202 217 229 241 249 219 242 266 280 230 194 232 199 244 258 270 277 246 274 286 290 256 255 234 239 225 244 272 260 263 247 247 222 236 236 243 256 232 240 248 250 253 260 263 250 261 253 209 272 270.

322. 468 456 446 438 479 425 412 485 451 459 474 492 497 428 448 457 470 476 464 464 488 511 418 482 449 454 460 470 484 431 472 505 469 440 444 433 442 459 453 462 446 474 451 454 462 463 462 464 460 460.

323. 115 125 136 143 153 165 174 119 103 122 128 137 144 155 167 177 130 139 145 155 167 180 193 182 132 140 145 156 169 171 140 146 148 142 157 157 148 142 162 162 150 160 160 151 151 161 172 151 162 154.

324. 200 192 183 174 166 160 153 142 148 156 161 185 201 174 167 194 165 171 180 180 197 204 214 175 195 185 164 186 168 172 173 173 208 189 168 172 188 193 187 170 180 181 176 176 175 177 176 178 177 181.

325. 179 217 189 227 198 184 171 187 195 201 175 207 218 193 186 201 223 233 224 243 206 208 192 220 229 240 206 239 209 222 214 192 201 209 230 220 199 211 214 205 203 205 198 212 212 199 197 213 196 202.

326. 112 136 206 137 227 155 122 103 147 160 140 155 171 171 189 210 221 239 213 199 167 127 157 174 158 174 200 219 204 160 142 132 173 197 174 200 192 151 164 177 180 169 175 182 177 185 176 181 170 172.

327. 158 174 181 194 203 160 175 187 197 204 137 148 171 165 174 181 189 238 202 180 189 207 223 230 199 212 220 153 163 195 179 183 199 201 191 188 186 169 172 151 218 209 213 201 191 186 184 177 195 227.

328. 346 350 347 358 382 387 336 339 386 352 326 369 320 348 358 369 390 402 350 365 370 373 399 389 374 343 379 373 375 368 394 371 330 314 363 362 379 360 375 354 365 367 354 356 362 365 360 364 362 359.

329. 128 190 159 129 162 148 180 195 172 159 172 134 149 114 175 145 138 142 161 127 118 99 175 197 122 132 164 153 182 170 153 177 181 178 158 165 167 187 188 185 180 210 151 219 164 167 169 187 173 203.

330. 80 89 120 160 100 152 90 111 67 140 94 148 158 149 150 163 105 111 115 140 106 132 120 161 152 165 121 70 140 142 78 92 132 122 135 157 118 116 125 123 134 155 157 171 110 118 117 123 127 130.

3.11. Правила выполнения контрольных работ студентами-заочниками

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины. Здесь же указывается название учебного заведения, дата отсылки контрольной работы и адрес студента.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

В случае незачета работы студент должен сделать исправления всех неверно решенных задач и выслать исправления вместе с уже проверенной тетрадью. Вносить исправления в сам текст прорецензированной работы не разрешается.

4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

4.1. Основная литература

1. Кудрявцев, В.А., Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1986.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979.

4. Судоплатов, С.В., Овчинникова, Е.В. Дискретная математика / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.; Новосибирск, ИНФРА-М-НГТУ, 2005.

4.2. Дополнительная литература.

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. Ч. 1.

4.3. Учебно-методические разработки

1. Шишмарев, Ю.Е. Дискретная математика / Ю.Е. Шишмарев. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 1997.

2. Сборник задач по высшей математике / Сост. И.В. Пивоварова, Л.Я. Дубинина, Л.С. Никулина. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2003.

3. Одияко, Н.Н., Бажанова, Н.А. Статистическая обработка одномерной выборки / Н.Н. Одияко, Н.А. Бажанова. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2003.

4. Дубинина, Л.Я., Курс лекций по высшей математике / Л.Я. Дубинина, Л.С. Никулина, И.В. Пивоварова. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Никулина Людмила Сергеевна
Плешкова Татьяна Юрьевна

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов-заочников
по специальностям: 03030165 «Психология»
10010365 «Социально-культурный сервис и туризм»

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 12.10.07. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,7.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57