Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса (ВГУЭС)

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Электронное учебное пособие

Владивосток
2018

УДК 519.816
ББК 22.183.1
Т33

Рецензенты: *К.С. Солодухин,* д-р экон. наук, профессор кафедры математики и моделирования (ВГУЭС);
А.А. Степанова, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа (ДВФУ)

Т33 **Теория принятия решений** : электронное учебное пособие / А.А. Гресько, Е.Д. Емцева, А.Л. Мазелис, М.А. Первухин; Владивостокский государственный университет экономики и сервиса ; Электрон. текст. дан. (1 файл: 11,2 МБ). – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2018. – 1 электрон, опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей), 500 МГц; 512 Мб оперативной памяти; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); 5 Мб свободного дискового пространства; операц. система Windows XP и выше; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

ISBN 978-5-9736-0521-6

Рассматриваются количественные методы, используемые в процессе принятия решения. Теоретический материал базируется на математических курсах по исследованию операций, математической статистике, теории игр и включает в себя задачи принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности.

Для студентов всех форм обучения и направлений, изучающих дисциплину «Теория принятия решений».

УДК 519.816
ББК 22.183.1

Электронное учебное издание

Минимальные системные требования:
Компьютер: Pentium 3 и выше, 500 МГц; ОЗУ 512 Мб; 5 Мб на жестком диске; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); привод CD-ROM. **Операционная система**: Windows XP/7/8.

Программное обеспечение: Internet Explorer 8 и выше или другой браузер; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

Редактор Шкарубо М.А.
Компьютерная верстка Портновой М.А.
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41
Тел./факс: (423)240-40-54
E-mail: riac@vvsu.ru

Изготовитель CD-ROM: Издательство ВГУЭС,
690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Подписано к использованию 17 декабря 2018 г.
Объем 4,1 Мб
Тираж 100 (1-20) экз

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса (ВГУЭС)

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Электронное учебное пособие

Владивосток
2018

ISBN 978-5-9736-0521-6

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса (ВГУЭС)

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Электронное учебное пособие

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2018

УДК 519.816
ББК 22.183.1
Т33

Рецензенты: *К.С. Солодухин,* д-р экон. наук, профессор кафедры математики и моделирования (ВГУЭС);
А.А. Степанова, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа (ДВФУ)

Т33 **Теория принятия решений** : электронное учебное пособие / А.А. Гресько, Е.Д. Емцева, А.Л. Мазелис, М.А. Первухин; Владивостокский государственный университет экономики и сервиса ; Электрон. текст. дан. (1 файл: 11,2 МБ). – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2018. – 1 электрон, опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей), 500 МГц; 512 Мб оперативной памяти; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); 5 Мб свободного дискового пространства; операц. система Windows XP и выше; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

ISBN 978-5-9736-0521-6

Рассматриваются количественные методы, используемые в процессе принятия решения. Теоретический материал базируется на математических курсах по исследованию операций, математической статистике, теории игр и включает в себя задачи принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности.

Для студентов всех форм обучения и направлений, изучающих дисциплину «Теория принятия решений».

УДК 519.816
ББК 22.183.1

ISBN 978-5-9736-0521-6

Электронное учебное издание

Минимальные системные требования: Компьютер: Pentium 3 и выше, 500 МГц; ОЗУ 512 Мб; 5 Мб на жестком диске; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); привод CD-ROM. Операционная система: Windows XP/7/8.

Программное обеспечение: Internet Explorer 8 и выше или другой браузер; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

ISBN 978-5-9736-0521-6

Редактор М.А. Шкарубо

Компьютерная верстка М.А. Портновой

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41
Тел./факс: (423)240-40-54
Подписано к использованию 26 ноября 2018 г.
Объем 11,2 Мб
Тираж 100 (I – 20) экз.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Каждому человеку ежеминутно приходится принимать решения. Проснувшись утром, мы решаем вставать или полежать в постели еще пять минут. Затем мы думаем о том, что съесть на завтрак, если за нас это не решил кто-нибудь другой. Потом решаем: что надеть, идти ли на учебу (работу), что нужно сделать в течение дня и т.д. Конечно, в большинстве ситуаций мы принимаем решения, опираясь на свой жизненный опыт, настроение, самочувствие, советы близких людей.

Но бывают ситуации, особенно в профессиональной сфере, когда для принятия решения следует провести серьезный анализ всех факторов. В этом случае не обойтись без методов теории решений.

Теория принятия решений – область исследования, использующая понятия и методы математики, статистики, экономики, менеджмента и психологии с целью изучения закономерностей выбора людьми путей решения разного рода задач, а также способов поиска наиболее выгодных из возможных решений.

В данном пособии рассматриваются количественные методы, используемые в процессе принятия решения. Теоретический материал базируется на математических курсах по исследованию операций, математической статистике, теории игр и включает в себя задачи принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности.

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Люди и их роль в процессе принятия решений

В процессе принятия решений люди могут играть разные роли.

Лицо, принимающее решения (ЛПР), – человек, фактически осуществляющий выбор наилучшего варианта действий.

Владелец проблемы – человек, который, по мнению окружающих, должен решать данную проблему и несёт ответственность за принятые решения.

Активная группа – группа людей, имеющих общие интересы и старающихся оказать влияние на процесс выбора и его результат.

Эксперт – профессионал в той или иной области, к которому обращаются за оценками и рекомендациями все люди, вовлечённые в процесс принятия решений.

Консультант по принятию решений. Его роль сводится к разумной организации процесса принятия решений: помощи ЛПР и владельцу проблемы в правильной постановке задачи, выявлении позиций активных групп, организации работы с экспертами [2].

1.2. Роль природы в процессе принятия решений

Окружающие условия, обстановка или обстоятельства, в которых необходимо действовать при осуществлении операции, получили название *природа*.

Принципиальными в понятии природы являются следующие особенности:

- *объективность*, т.е. независимость от желаний человека и предпринимаемых им действий,
- *нейтральность*, означающая, что природа не ведет активного противодействия решениям человека, не старается извлечь для себя никакой выгоды или обратить в свою пользу его ошибки.

Примером природы является состояние погоды сегодня или в любой другой день: наличие дождя или засуха, холод или жара. Она наступает и управляется объективными не зависящими от нас, физическими законами. И дождь идет не потому, что природа хочет нам досадить. Человек не может предотвратить возникновение урагана, землетрясения или цунами, но он может постараться спрогнозировать их появление и принять меры для своей безопасности. Во власти человека принять во внимание возможное наступление определенных природных явлений в данном регионе и постараться обратить их в свою пользу. Например, обилие солнечных дней в одних странах используется для выработки электроэнергии посредством солнечных батарей, а замерзающие реки и каналы в других странах – как транспортные магистрали.

Другой пример природы – совершенный рынок товаров и услуг. Для производителя, выходящего на рынок с новой продукцией, спрос населения на его продукцию также является природой [3].

В теории принятия решений выделяют три класса задач:

1) принятие решений в условиях определенности;

2) принятие решений в условиях риска;

3) принятие решений в условиях полной неопределенности.

Каждый класс задач определяется полнотой информации о состояниях природы, имеющейся в распоряжении лица, принимающего решения. В моделях в ***условиях полной определенности*** имеются несколько альтернатив (их может быть бесконечно много), а о природе все точно известно, у нее имеется только одно-единственное состояние. Задачи принятия решений в ***условиях риска*** характеризуются наличием нескольких альтернатив и нескольких состояний природы, относительно которых известны вероятности их наступления. В задачах принятия решений в ***условиях полной неопределенности*** имеется несколько альтернатив и несколько состояний природы, но о вероятностях их наступления ничего неизвестно в принципе.

Для каждого класса задач разработаны свои методы и подходы для принятия наилучших решений. В отличие от методов принятия оптимальных решений в условиях полной определенности, методы принятия наилучших решений в условиях риска и полной неопределенности позволяют лишь выдавать рекомендации по выбору того или иного решения, в то время как окончательное решение остается полностью за лицом, его принимающим.

Тема 2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Задачи принятия решений в условиях риска характеризуются наличием нескольких альтернатив и состояний природы, а также известными вероятностями наступления различных состояний природы.

2.1. Использование платежной матрицы

Пример 2.1.1. *Управляющий кафе «Розовая пантера» ВГУЭС решает, какое количество салатов следует изготовить на следующий день. По прошлому опыту известно, что спрос на салаты может составлять 150, 200, 250 и 300 порций. Себестоимость салата 30 рублей, а кафе продает его за 50 рублей. Непроданные к концу дня салаты уничтожаются. Определить, сколько порций салатов следует изготовить, чтобы максимизировать прибыль, если вероятности спроса в 150, 200, 250 и 300 порций соответственно равны 0,2, 0,25, 0,2 и 0,35.*

Вначале следует составить платежную матрицу. *Платежная матрица* – это таблица чисел, в которой указаны различные альтернативы и состояния природы, а для каждой комбинации альтернатив и состояний природы указаны платежи. Вместо понятий выигрыши и убытки в теории принятия решений используется термин платежи. Ниже приведен общий вид платежной матрицы (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Платежная матрица

Альтернативы	Платежи при различных состояниях природы			
	C_1	C_2	…	C_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
Вероятности	p_1	p_2	…	p_n

Алгоритм составления платёжной матрицы

1. Исходя из проводимой операции или мероприятия определяется понятие природы.
2. Определяются все возможные состояния природы C_1, C_2, … C_n.
3. Вырабатываются все возможные варианты решений A_1, A_2, …, A_m.
4. Определяется формула для расчёта величины платежа (выигрыша или убытка).
5. Последовательно, одно за другим, начиная с первого, просматривается каждое решение при каждом состоянии природы и определяются значения платежей a_{ij}, $i = 1,2, \ldots , m$, $j = 1,2,\ldots, n$.

Составим платежную матрицу для задачи из примера 2.1.1. В данном примере множество состояний природы и множество альтернатив будут совпадать – это будут различные варианты спроса.

Формула для расчета платежа:

$$\{\text{Платеж}\} = \{\text{Объем продажи}\} \cdot 50 - \{\text{Объем заказа}\} \cdot 30.$$

К примеру,

$$a_{11} = 150 \cdot 50 - 150 \cdot 30 = 3000,$$

$a_{12} = 150 \cdot 50 - 150 \cdot 30 = 3000$ (продать больше, чем изготовили, нельзя),

$$a_{41} = 150 \cdot 50 - 300 \cdot 30 = -1500.$$

Рассчитав все платежи, составляем платежную матрицу (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Платежная матрица задачи из примера 2.1.1

Альтернативы	Возможный спрос			
	150	200	250	300
150	3000	3000	3000	3000
200	1500	4000	4000	4000
250	0	2500	5000	5000
300	–1500	1000	3500	6000

Наличие вероятностей различных вариантов спроса позволяет рассчитать для каждой альтернативы ожидаемый (средний) платеж как среднее всех возможных значений платежей для данной альтернативы с весами, равными вероятностям этих значений.

Если некоторая случайная величина x может принимать одно из значений x_1, x_2, … x_n с вероятностями p_1, p_2, …, p_n, то среднее значение $\bar{x}$ случайной величины x вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n .$$

Алгоритм нахождения наилучшего решения по критерию максимального ожидаемого платежа

1. Для каждой альтернативы A_i, т.е. для каждой строки i платёжной матрицы, рассчитать ожидаемое значение платежа $\bar{a}_i$ по формуле:

$$a_i = a_{i1} \cdot p_1 + a_{i2} \cdot p_2 + ... + a \cdot p_n .$$

2. Из всех найденных ожидаемых платежей $\bar{a}$, $i = 1,2,\ldots, m$ выбрать максимальное значение:

$$a_{\max} = \max_i \{'a_i\}.$$

3. Решение, которому соответствует найденная на предыдущем этапе величина $\bar{a}_{max}$, и будет наилучшим.

Для нашего примера ожидаемые значения платежей будут следующими:

$$a_1 = 0{,}2 \cdot 3000 + 0{,}25 \cdot 3000 + 0{,}2 \cdot 3000 + 0{,}35 \cdot 3000 = 3000,$$

$$a_2 = 0{,}2 \cdot 1500 + 0{,}25 \cdot 4000 + 0{,}2 \cdot 4000 + 0{,}35 \cdot 4000 = 3500,$$

$$a_3 = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 2500 + 0{,}2 \cdot 5000 + 0{,}35 \cdot 5000 = 3375,$$

$$a_4 = 0{,}2 \cdot (-1500) + 0{,}25 \cdot 1000 + 0{,}2 \cdot 3500 + 0{,}35 \cdot 6000 = 2750.$$

С учетом дополнительной информации платежная матрица с ожидаемыми платежами примет следующий вид (табл. 2.3).

Далее из найденных ожидаемых платежей следует выбрать наибольший. В нашем примере он соответствует $a_2 = 3500.$. Тогда оптимальным решением будет приобрести 200 салатов.

Другой способ решения задач в условиях риска, обладающий большей наглядностью, основан на применении деревьев решений.

Таблица 2.3

Платежная матрица с ожидаемыми платежами

Альтернативы	Возможный спрос				Ожидаемый платеж
	150	200	250	300	
150	3000	3000	3000	3000	3000
200	1500	4000	4000	4000	3500
250	0	2500	5000	5000	3375
300	-1500	1000	3500	6000	2750
Вероятность	0,2	0,25	0,2	0,35	

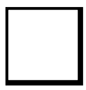
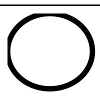
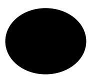
2.2. Деревья решений

Дерево решений – графическое представление процесса принятия решения, в котором отображаются возможные варианты решений, состояний природы, вероятности их наступления, а также платежи (выигрыши или убытки) при различных сочетаниях состояний природы и возможных решений [3].

Дерево решений состоит из узлов и ветвей. Узлы и ветви могут быть трёх видов и иметь следующие обозначения (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Узлы дерева и их обозначения

	***Узел решений*** соответствует моменту времени, в котором ЛПР принимает решение
	***Узел событий*** соответствует моменту времени, в котором исходы решений носят случайный характер
	***Конечный узел*** замыкает ветви дерева

Составим дерево решений для задачи из примера 2.1.1. Сначала управляющий кафе должен принять решение (узел решений), какое количество заказов нужно изготовить, затем в дело вступает случай – спрос на салаты (узел событий). Дерево решений приведено на рис. 2.1.

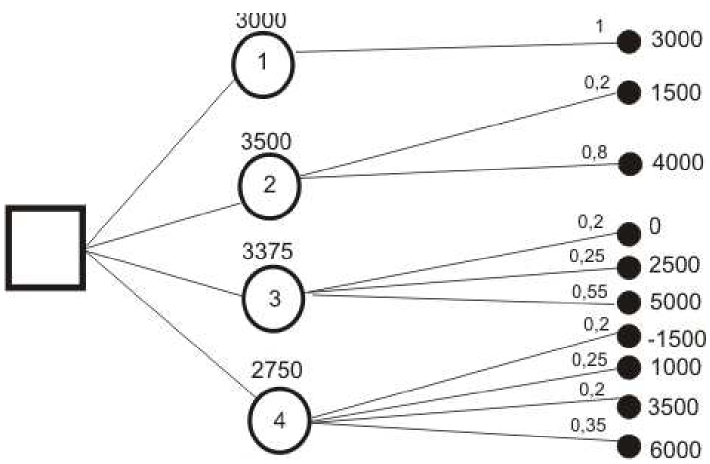


Рис. 2.1. Дерево решений

Над ветвями, которые идут к конечным узлам, проставлены вероятности соответствующих исходов. Далее, двигаясь справа налево от конечных ветвей, в каждом узле событий рассчитываем ожидаемые значения платежей. А в каждом узле решений выбираем ветку с наибольшим ожидаемым платежом.

Пример 2.2.1. *Фирма может принять решение о строительстве крупного или мелкого предприятия. Строительство крупного предприятия относительно дешевле, в случае, если будет высокий спрос на производимые товары, мелкое предприятие можно расширить. Деятельность фирмы рассматривается в течение десяти лет, причём в случае строительства мелкого предприятия вопрос о расширении будет рассматриваться через два года. Спрос заранее неизвестен.*

Решение. Введём градацию спроса: высокий и низкий ($p < 0{,}25$). Затраты и доходы: строительство крупного предприятия – 5 млн долл.; строительство мелкого – 1 млн долл.; затраты на расширение – 4,2 млн долл.; крупное предприятие при высоком спросе даёт доход – 1 млн долл. ежегодно, а при низком – 300 тыс. долл.; мелкое предприятие при высоком спросе – 250 тыс. долл. ежегодно, при низком – 200 тыс. долл.

Расширенное предприятие в случае высокого спроса приносит доход 900 тыс. долл. в год, а при низком спросе – 200 тыс. долл.; мелкое предприятие без расширения при высоком спросе на производимый продукт приносит в течение двух лет по 250 тыс. долл. ежегодно, а в течение следующих восьми по 200 тыс. долл. Дерево решений приведено на рис. 2.2.

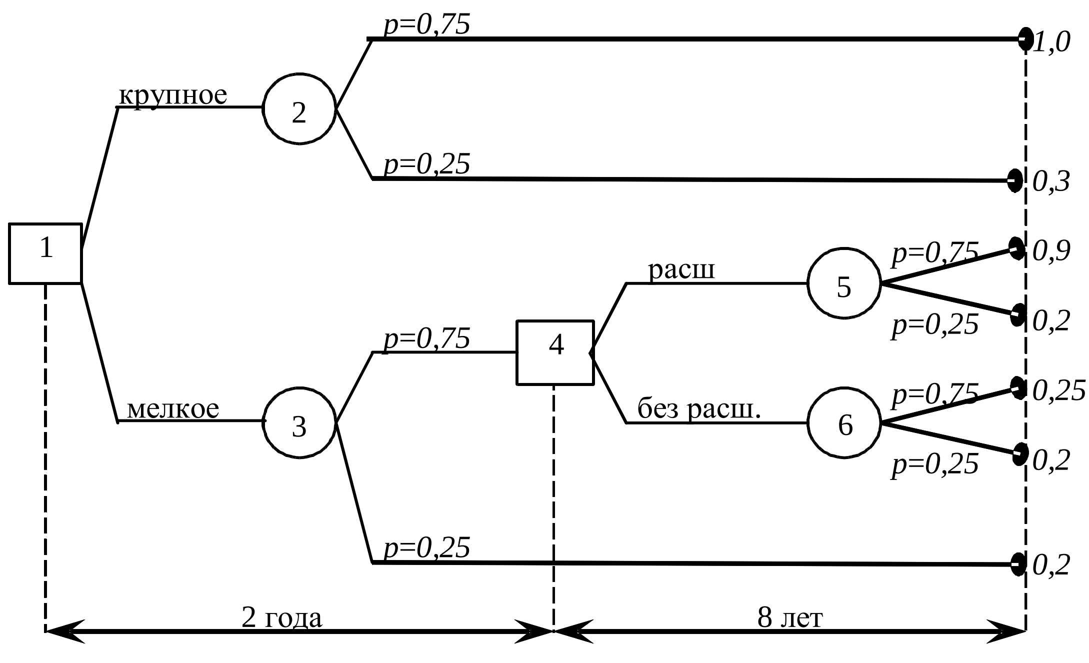


Рис. 2.2. Дерево решений для задачи из примера 2.2.1

Применим для решения этой задачи метод динамического программирования. В качестве критерия применим средний выигрыш, т.е. МО выигрыша. Сама величина критерия равна доходу без затрат на строительство. Начнём с последнего четвёртого шага: подсчитаем средний выигрыш:

$$a_5 = (0{,}9 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}25) \cdot 8 - 4{,}2 = 1{,}6,$$

$$a_6 = (0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}25) \cdot 8 = 1{,}9,$$

$$a_2 = (1 \cdot 0{,}75 + 0{,}3 \cdot 0{,}25) \cdot 10 - 5 = 3{,}25,$$

$$a_3 = (1{,}9 + 2 \cdot 0{,}25) \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}25 = 1{,}3.$$

В данной задаче мы должны сделать два осознанных выбора. В первом случае мы видим, что выгодней не расширять мелкое предприятие через 2 года работы, средний выигрыш будет выше на 300 тыс.

Если выбирать между строительством крупного или мелкого предприятия, то оптимальным будем сразу строить крупное предприятие, поскольку средний выигрыш составит 3,25 млн, тогда как при строительстве мелкого предприятия – 1,3 млн.

Пример 2.2.2. Задача о секретарше. *Директор собирается принять на работу секретаршу. Прежний опыт делит секретарш на три категории: отличных (3 балла), хороших (2 балла) и посредственных (1 балл). Анализ учебных заведений по подготовке секретарш даёт статистику выпускниц заведений: вероятность взять на работу отличную секретаршу – 0,2, хорошую – 0,5, посредственную – 0,3. Директор может испытать только трёх претенденток, причём в случае отказа директора кандидат убывает на другую работу.*

Решение. Построим дерево решений.

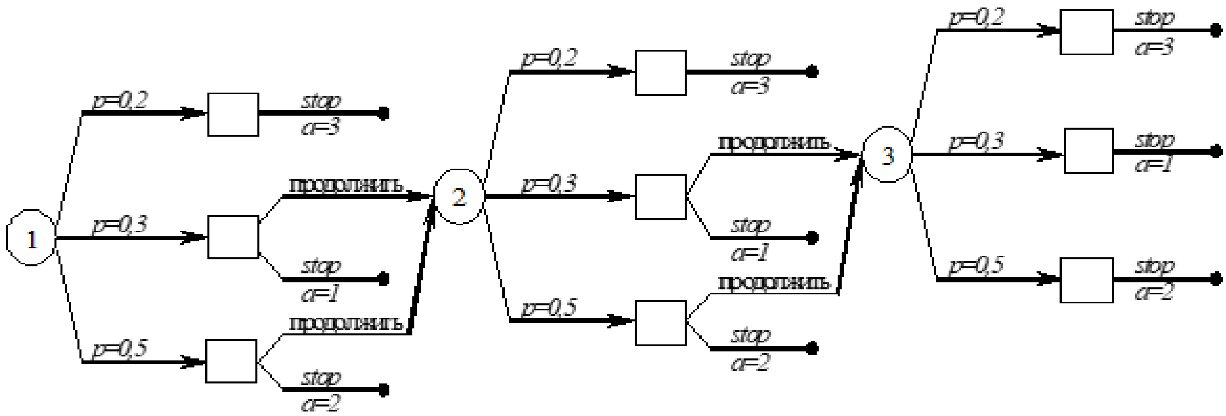


Рис. 2.3. Дерево решений задачи о секретарше

Начнём искать оптимальное решение с последнего шага. Определим средние «выигрыши» директора, если мы испытываем трёх кандидаток:

Во втором испытании, если попалась хорошая секретарша, надо остановиться, а в первом испытании, надо остановиться, только если попалась отличная, а в третьем испытании берём любую. Найдём средний оптимальный выигрыш после всех испытаний:

$$a_1 = 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 2{,}17 + 0{,}3 \cdot 2{,}17 = 2{,}336.$$

Тема 3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

3.1. Экономико-математические модели

Задачи принятия решений в условиях определенности характеризуются наличием единственного критерия. Оптимальные решения носят объективный характер и не зависят от ЛПР.

Экономико-математические модели – это математическое описание задач, связанных с исследованием экономических процессов или объектов. Для математической постановки рассматриваемой задачи необходимо четко понять свойства изучаемого процесса или объекта, указанные в задаче или подразумеваемые условием, и перевести их на математический язык.

Цель исследования при экономико-математическом моделировании выражается с помощью целевой функции и критерия ее оптимальности. Математическая модель решаемой экономической задачи может включать в себя различные условия, описанные с помощью уравнений, неравенств, таблиц, схем и других ограничений, формализованных различными математическими способами. Кроме того, задача, связанная с вопросами оптимизации, содержит целевую функцию, наилучшее значение которой согласно заданному критерию оптимальности необходимо найти.

Так, например, в модели производственных процессов система ограничений описывает условия, которые можно разделить на четыре типа: по использованию производственных ресурсов, по объемам выполняемых работ и выпуску продукции, по соотношениям между переменными величинами. Производственные ресурсы, как правило, ограничены запасами и возможностями предприятия, выпускаемая продукция и производимые работы ограничены планом и потребностями.

Рассмотрим алгоритм создания экономико-математической модели для задачи оптимизации работы промышленного предприятия. Пусть предприятие обладает m видами ресурсов (оборудование, персонал, сырье, материалы, финансы и т.д.). Обозначим объемы этих ресурсов через: b_1, b_2, …, b_m. Организация производит видов продукции. Нормы затрат i-го ресурса на производство единицы продукции j-го вида обозначим: a_{11}, … , a_{ij}, … , a_{mn}. Известна выручка от производства единицы продукции каждого вида: c_1, c_2, …, c_n. Задача состоит в поиске такого плана производства каждого вида продукции x_1, x_2, …, x_n, который позволит обеспечить получение наибольшей прибыли предприятия при имеющихся ограничениях на ресурс.

Модель оптимизации деятельности промышленного предприятия можно описать следующим образом:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \text{где } i = 1,\dots,k. \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \text{где } i = k+1,\dots,m. \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0. \qquad (4)$$

Описанную модель называют *задачей линейного программирования (ЗЛП)*. ЗЛП является частным случаем задачи оптимизации. В ЗЛП целевая функция является линейной, а система ограничений, описывающая условия экономической ситуации, представляет собой систему линейных неравенств и уравнений. Задача линейного программирования состоит в определении оптимального значения линейной функции (1). Условия (2), (3) отражают ограничение по расходу ресурсов. Неравенство (4) учитывает в случае необходимости невозможность отрицательных значений переменных.

Совокупность чисел, удовлетворяющих ограничениям ЗЛП, называют *допустимым решением* поставленной задачи. *Оптимальным решением* ЗЛП называют такое допустимое решение, при котором целевая функция принимает оптимальное значение (максимальное или минимальное).

Пример 3.1.1. *Автомобильный завод выпускает седаны и кроссоверы с разными характеристиками двигателя и конструкцией кузовов. Завод имеет несколько цехов. Ограничения по мощности для каждого вида автомобилей приведены в табл. 3.1.*

Таблица 3.1

Производственные мощности цехов

Вид цеха	Производственная мощность (шт. в мес.)	
	Седан	Кроссовер
Кузовной	7000	3200
Моторный	7200	3540
Сборочный:		
Седан	7100	–
Кроссовер	–	3100

Известно, что прибыль от выпуска одного автомобиля типа седан составляет 6700 у.е, а для типа кроссовер 8100 у.е. Требуется найти объемы выпуска автомобилей, обеспечивающих максимальную прибыль.

Решение. Пусть x – число выпускаемых автомобилей типа седан, y – число выпускаемых автомобилей типа кроссовер. Сборочный цех не может собрать более, чем 7100 автомобилей типа седан и 3100 типа кроссовер. Кузовной цех не может изготовить более, чем 7000 кузовов типа седан и 3200 типа кроссовер. Моторный цех может изготовить не более, чем 7200 двигателей для седанов и 3540 для кроссоверов. Значит, $x \le min\{7000,7200,7100\} = 7000$, $y \le min\{3200,3540,3100\} = 3100$.

Прибыль от продажи автомобилей рассчитаем по формуле $z = 16000x + 11000y$.

Получим математическую модель для данной задачи:

$$z = 6700x + 8100y \to max$$

$$\begin{Bmatrix} x \le 7000, \\ y \le 3100, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{Bmatrix}$$

Данная задач легко решается, так как, очевидно, чем больше автомобилей выпускается, тем больше прибыль. С учетом ограничений находим максимальную прибыль 72,01 млн у.е., которая достигается при $x = 7000, y = 3100$.

Пример 3.1.2. *Фабрике нужно закупить станки двух видов. Производительность станка первого вида составляет 30 изделий в час, при этом доля бракованной продукции составляет 5% . Станок второго вида способен изготавливать 40 изделий в час с долей брака 3%. Расходы на обслуживание станка первого вида составляют 12 у.е., второго вида 7 у.е. в день. За каждое бракованное изделие фабрика несет убыток в размере 60 у.е. Фабрика вмещает 10 станков первого вида и 8 станков второго вида. За восьмичасовой рабочий день фабрика должна изготавливать не менее 3200 изделий. Требуется определить количество станков каждого вида, при котором затраты будут минимальными.*

Решение. Пусть x_1 – количество станков первого вида, x_2 – количество станков второго вида. Убытки от брака, полученного от станка первого вида, в день составят $30 \cdot 0,05 \cdot 8 \cdot 60 = 720$у.е., а от станка второго вида $40 \cdot 0,03 \cdot 8 \cdot 60 = 576$у.е.

Тогда экономико-математическая модель данной задачи имеет вид:

$$z = (12 + 720)x_1 + (7 + 576)x_2 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ 30 \cdot 8x_1 + 40 \cdot 8x_2 \ge 3200, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Или

$$z = 732x_1 + 583x_2 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ 240x_1 + 320x_2 \ge 3200, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3.1.3. *Школьнику выдали 300 рублей для покупки канцелярских принадлежностей. Нужно купить гуашь по цене 30 руб. за баночку, ручки по цене 20 рублей за штуку, простые карандаши по цене 12 рублей за штуку, стирательные резинки по цене 10 рублей. Гуаши нужно купить не менее трех баночек, стирательных резинок столько, сколько банок гуаши и ручек вместе. Простых карандашей не более пяти. В каком количестве требуется купить указанные канцелярские принадлежности, чтобы общее их количество было наибольшим?*

Решение. Составим экономико-математическую модель данной задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 – количество гуаши, ручек, простых карандашей, стирательных резинок соответственно. По условию задачи между переменными существует зависимость: $x_4 = x_1 + x_2$ кроме того имеются ограничения по количеству предметов $x_1 \ge 3$, $x_3 \le 5$,а также по денежным средствам $30x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 300$.

Целевая функция описывает количество канцелярских предметов:

$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, которую нужно максимизировать.

Имеем следующую ЗЛП:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_3 \le 5, \\ x_4 = x_1 + x_2, \\ 30x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 300, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Учитывая равенство $x_4 = x_1 + x_2$, можно уменьшить количество переменных и получить ЗЛП следующего вида:

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_3 \le 5, \\ x_4 = x_1 + x_2, \\ 40x_1 + 30x_2 + 12x_3 \le 300, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Транспортная задача

Транспортная задача заключается в разработке наиболее оптимальных путей и способов перевозки грузов (товаров) из пунктов отправления в пункты назначения. При этом оптимальность способов перевозки заключается в минимизации затрат предприятий, связанных с осуществлением процессов доставки груза (сырья, материалов, топлива, оборудования и т.п.).

В задаче рассматриваются m пунктов отправления груза (поставщики) и пунктов назначения (потребители). Обозначим запасы (количество груза в каждом пункте отправления): $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а потребности в грузе в каждом пункте назначения: $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Стоимость перевозки груза из пунктов отправления в пункты назначения задана в виде тарификационной матрицы $C = c_{ij_{m \times n}}, \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$. Требуется составить такой план перевозок грузов ij из пунктов отправления в пункты назначения, который позволил бы вывести весь груз от поставщиков, максимально удовлетворив все потребности потребителей. При этом затраты на перевозку груза должны быть минимальными. Все известные данные транспортной задачи можно занести в распределительную табл. 3.2.

Таблица 3.2

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Составим экономико-математическую модель транспортной задачи. Так как цель транспортной задачи состоит в минимизации стоимости всех запланированных перевозок, то целевая функция ЗЛП будет иметь следующий вид: $z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to min.$.

Так как нужно перевезти весь груз из каждого пункта отправления A_i, то должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \quad\quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases}$$

В каждый пункт назначения B_j должен быть завезен весь требуемый груз, поэтому должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \quad\quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Размер поставок должен выражаться неотрицательным числом:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\ .$$

В общем случае математическая модель транспортной задачи может быть записана следующим образом:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Такая модель транспортной задачи называется закрытой. ЗЛП является сбалансированной. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то модель является открытой. В случае открытой транспортной задачи выполнение условия сбалансированности достигается введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с соответствующими тарифами, равными нулю.

Пример 3.1.4. *Решить транспортную задачу. На двух складах A_i хранится груз в количествах 40, 25 единиц. Данный груз необходимо перевезти в три пункта назначения B_j в количествах 10, 35, 20 единиц. Тарификационная матрица имеет вид:* $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Найти план перевозок описанной транспортной задачи с минимальной стоимостью всех запланированных перевозок.

Решение. Условие задачи можно оформить в табличном виде. Модель является закрытой, так как $40 + 25 = 10 + 35 + 20$, т.е. суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей (табл. 3.3).

Таблица 3.3

B / A	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	7	3	2	40
A_2	3	8	9	25
Потребности	10	35	20	65

Нетрудно увидеть, что минимизация стоимости связана с минимизацией количества дорогостоящих перевозок и максимизацией дешевых. Поставим в ячейку с минимальным тарифом (на пересечении A_1 и B_3) максимально возможное количество груза, равное 20 ед., тогда в ячейку с минимальным из оставшихся тарифов первой строки (на пересечении A_1 и B_2) возможно поставить максимальное количество груза, равное 40–20=20. Первая строка сформирована, запасы распределены. Переходим ко второй строке. Выбираем наименьший тариф, равный 3. В ячейку на пересечении и возможно поставить максимальное количество груза, равное 10. Выбираем минимальный из оставшихся во второй строке тарифов и в соответствующую ячейку на пересечении A_2 и B_2 поставим максимально возможное количество груза, равное 15. Запасы и потребности распределены (табл. 3.4).

Таблица 3.4

B / A	B_1		B_2		B_3		Запасы
A_1		7	20	3	20	2	40
A_2	10	3	15	8		9	25
Потребности	10		35		20		65

Логическим путем, не используя строгих математических методов, получили следующий результат, который далее будет проверен с помощью программного средства MS Excel. Оптимальное решение:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix}, z_{min} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 15 = 250.$$

Задача о назначениях

Задача о назначениях – это модель для количественного анализа ситуаций, когда менеджер должен назначить рабочих для выполнения различных производственных операций, распределить ряд производственных заданий по различным машинам (которые могут эти задания выполнить с различной эффективностью) или решить, какого торгового агента в какую область послать для продвижения продукции фирмы [1].

Распределение должно быть выполнено наиболее оптимальным способом. Эта задача является частным случаем транспортной задачи с совпадающими количествами поставщиков и потребителей, а, значит, и с квадратной тарификационной матрицей. Кроме того, все запасы и все потребности равны единице, так как каждую рабочую единицу можно назначить на одно рабочее место. Все переменные в этом типе задач – бинарные, и в каждом столбце и строке может быть только одна единица.

В случае несбалансированности задачи о назначениях, так же как и для транспортной задачи, добавляют фиктивные работы или рабочие единицы.

Пример 3.1.5. *Менеджер запускает проект, для реализации которого нужно назначить пять сотрудников на пять видов работ. Количество часов, необходимое на выполнение каждой работы, представлено в табл. 3.5.*

Таблица 3.5

	Работы				
Сотрудники	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
S_1	75	30	10	25	15
S_2	20	35	40	50	25
S_3	15	55	70	65	37
S_4	25	30	20	100	48
S_5	46	65	54	35	74

Составить математическую модель, позволяющую определить расстановку сотрудников по видам работ, при которой временные затраты на реализацию проекта будут минимальные.

Решение. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to min,$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1, \\ \sum_j x_{ij} = 1,, \\ x_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

где $(c_{ij})_{5\times5} = \begin{pmatrix} 75 & 30 & 10 & 25 & 15 \\ 20 & 35 & 40 & 50 & 25 \\ 15 & 55 & 70 & 65 & 37 \\ 25 & 30 & 20 & 100 & 48 \\ 46 & 65 & 54 & 35 & 70 \end{pmatrix}$.

3.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим графический метод решения задачи линейного программирования (*ЛП*) на примере задачи о рационе.

Пример 3.2.1. *На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используют три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца приведены в табл. 3.6.*

Таблица 3.6

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	560
Прибыль от реализации одной шкурки (у.е.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Переменные x_1, x_2 будут выражать количество лисиц и песцов соответственно, которое нужно выращивать на звероферме.

По условию необходимо максимизировать прибыль от продажи шкурок животных. Прибыль задается функцией:

$$z = 16x_1 + 12x_2.$$

По условию количество корма каждого вида ограничено, нам необходимо это учесть при построении математической модели. Для того чтобы прокормить x_1 лисицу и x_2 песца, нам понадобится следующее количество единиц корма:

- корм I вида – $2x_1 + 3x_2$,
- корм II вида – $4x_1 + x_2$,
- корм III вида – $6x_1 + 7x_2$.

С учетом запасов корма каждого вида приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 560. \end{cases}$$

Заметим, что число животных не может быть отрицательным и дробным, но добавление условия целочисленности требует использования более сложных методов, а их рассмотрение выходит за рамки нашего курса.

Окончательно математическая модель данной задачи будет иметь вид:

x_1, x_2 – количество лисиц и песцов.

$$z = 16x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 560, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Это задача линейного программирования (ЛП), так как все функции, входящие в модель, являются линейными. Для решения задач ЛП разработаны эффективные методы. Данная задача содержит всего 2 переменные, поэтому ее можно решить графическим методом. Рассмотрим алгоритм решения задач ЛП графическим методом:

1. Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств. В нашем примере необходимо построить прямые:

$$l_1 : 2x_1 + 3x_2 = 180,$$
$$l_2 : 4x_1 + x_2 = 240,$$
$$l_3 : 8x_1 + 7x_2 = 560.$$

2. Чтобы это сделать, нужно для каждой прямой найти координаты любых двух точек, лежащих на данной прямой (табл. 3.7). Затем через эти точки проводим прямые (рис. 3.1).

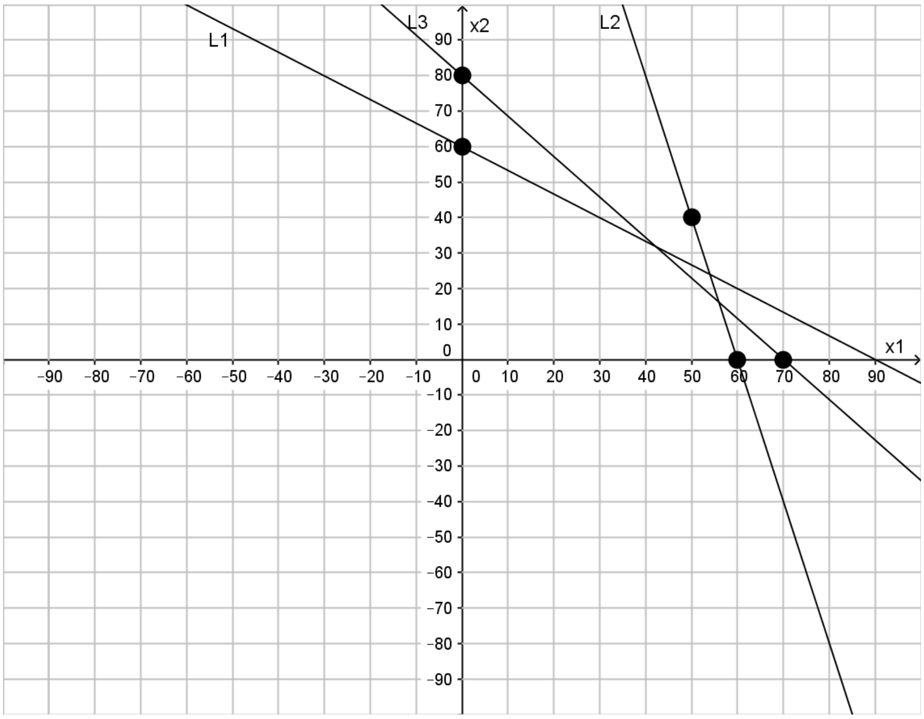


Рис. 3.1. Построение прямых

Таблица 3.7

l_1		l_2		l_3	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
90	0	60	0	70	0
0	60	50	40	0	80

3. Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Другими словами, для каждого неравенства выбираем любую точку, не лежащую на соответствующей прямой, и подставляем ее координаты в неравенство. Если неравенство выполняется, то заштриховываем полуплоскость, содержащую данную точку, в противном случае штрихуем другую полуплоскость (рис. 3.2).

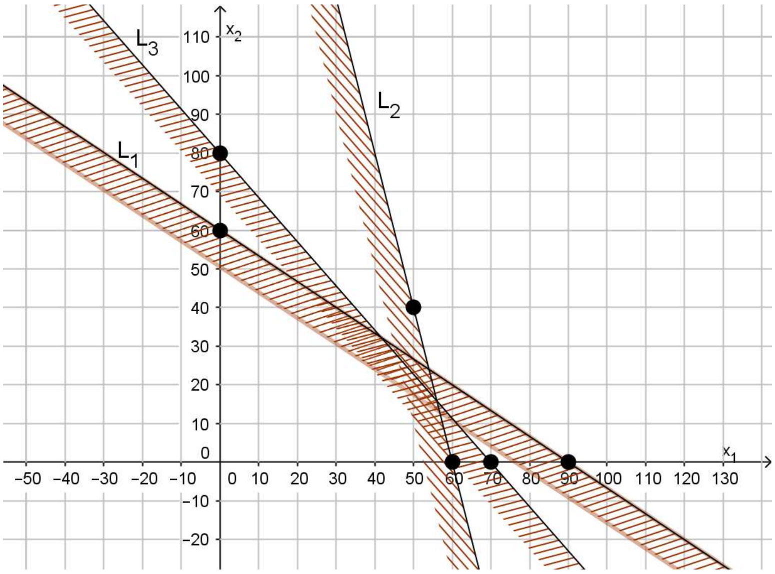


Рис. 3.2. Определение полуплоскостей

4. Находим область, удовлетворяющую всем неравенствам системы (*многоугольник решений*). С учетом условий $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ получаем, что многоугольником решений нашей задачи будет пятиугольник OABCD (рис. 3.3).

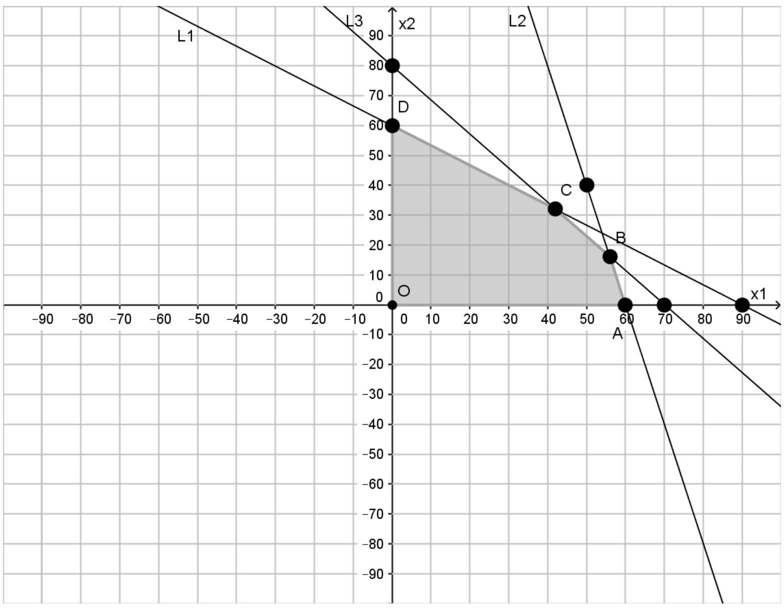


Рис. 3.3. Многоугольник решений

5. Строим вектор $\bar{c}(c_1;c_2)$, где c_1, c_2 – коэффициенты целевой функции. Вектор строится следующим образом: начало вектора находится в точке $(0;0)$, а конец в точке $(c_1;c_2)$. В нашем примере – $\bar{c}(16;12)$.

6. Строим линию уровня $16x_1 + 12x_2 = 0$.

7. Параллельно перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{c}$ (если задача $z \to \max$) или в направлении, противоположном вектору $\bar{c}$ (если задача $z \to \min$). В результате чего либо находят точку (точки) экстремума, либо устанавливают неограниченность целевой функции (рис. 3.4).

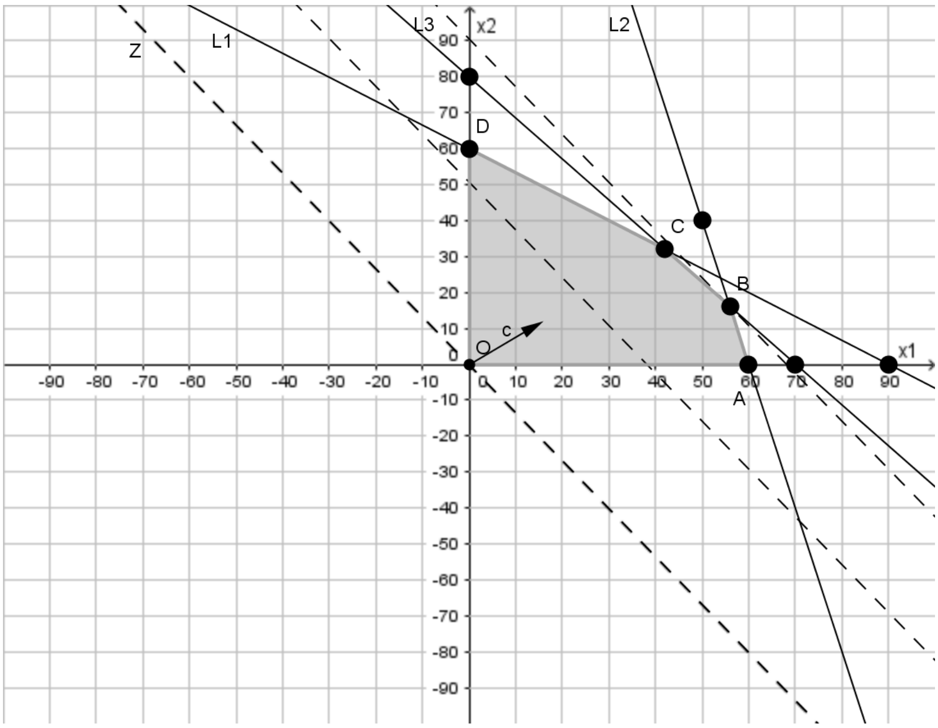


Рис. 3.4. Определение максимума целевой функции

8. Определяют координаты точки экстремума и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Максимум достигается в точке B, в которой пересекаются прямые l_2 и l_3. Решив систему линейных уравнений, найдем координаты точки B.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 240, \\ 8x_1 + 7x_2 = 560, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 = -480, \\ 8x_1 + 7x_2 = 560, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 = -480, \\ 5x_2 = 80, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 56, \\ x_2 = 16. \end{cases}$$

Таким образом, функция $z = 16x_1 + 12x_2$ принимает максимальное значение $z = 16 \cdot 56 + 12 \cdot 16 = 1088$ в точке $X_{max}(56;16)$.

Если вернуться к условию задачи, то заметим, что максимальная прибыль 1088 у.е. будет получена при выращивании 56 лисиц и 16 песцов.

Особые случаи при решении задач линейного программирования

Итак, в предыдущей задаче мы нашли решение. Оно было единственным, так как точка *B* была последней точкой области допустимых решений, которую пересечет линия уровня $16x_1+12x_2=h$ (где h – некоторая константа) при параллельном переносе ее в направлении вектора $\bar{c}$.

Но всегда ли у задачи линейного программирования есть решение? А если решение есть, всегда ли оно единственное? Предлагаем разобраться с данными вопросами.

Пример 3.2.2. *Решить задачу линейного программирования графическим методом.*

$$z=-x_1-2x_2\to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2; \\ 3x_1-x_2\ge -3 \\ 2x_1-5x_2\le 10; \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Область допустимых решений представлена на рис. 3.5. Заметим, что в данном примере область бесконечная. В этом случае возможны 2 варианта: либо решение есть, либо его нет.

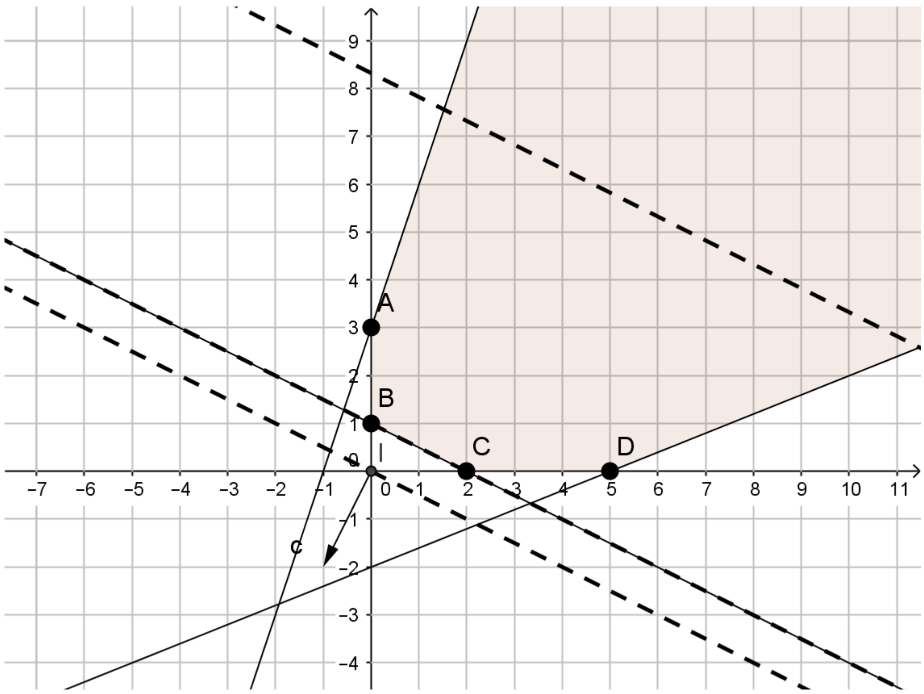


Рис. 3.5. Бесконечная область допустимых решений

Максимум целевой функции будет достигаться в любой точке отрезка *BC*. При этом значение целевой функции будет одинаковым в любой точке отрезка *BC*. Точка *C* имеет координаты (2;0), поэтому $z_{max}=-1\cdot 2-2\cdot 0=-2$.

У данной задачи нет минимума. Перемещая линию уровня параллельно в направлении вектора $-\bar{c}$, мы никогда не достигнем последней точки области. Значит, в данном случае *у задачи минимизации нет решений, так как целевая функция неограниченно убывает* (или, короче, $z_{min}\to -\infty$).

Ответ: $X_{max}\in BC, z_{max}=-2; X_{min}$ *нет, так как* $z_{min}\to -\infty$.

Пример 3.2.3. *Решить задачу линейного программирования графическим методом.*

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Область допустимых решений представлена на рис. 3.6. Теперь область допустимых решений – пустое множество. В данном случае говорят, что ***решений нет, так как система ограничений несовместна***.

Ответ. Решений нет, так как система ограничений несовместна.

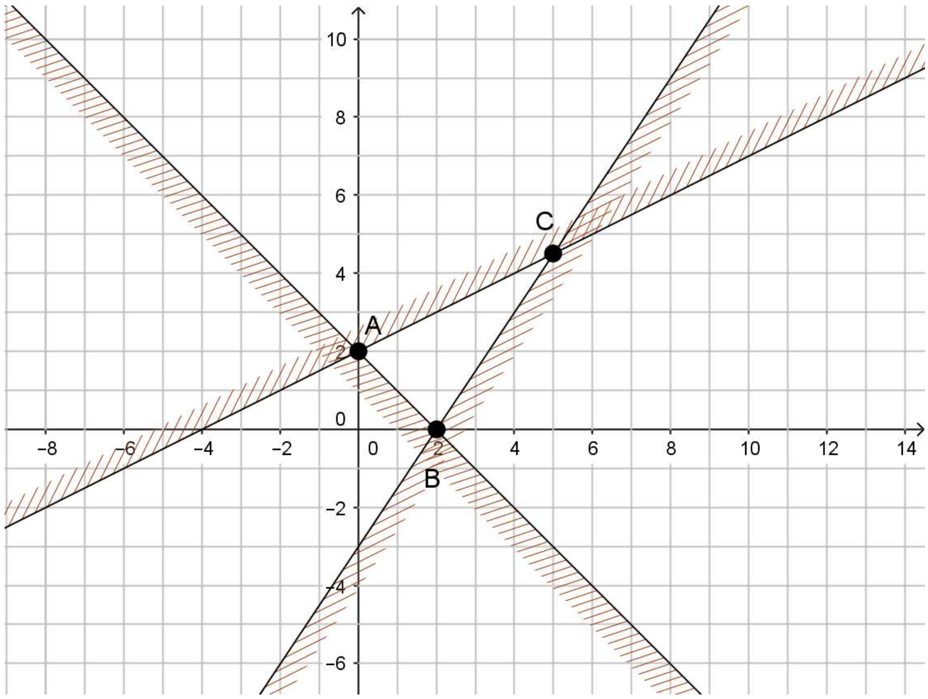


Рис. 3.6. Пустая область допустимых решений

Таким образом, всякая задача линейного программирования может:

- иметь единственное решение,
- иметь бесконечное множество решений,
- не иметь решений, так как целевая функция неограничена,
- не имеет решений, так как система ограничений несовместна.

3.3. Использование MS Excel для решения задач линейного программирования

При решении задач линейного программирования может быть использована надстройка MS Excel «Поиск решения». Для подключения этой надстройки в MS Excel 2003 нужно нажать «Сервис» → «Надстройки». Далее напротив «Поиск решения» поставить галочку и нажать кнопку ОК.

В версии 2007 MS Excel необходимо сделать следующее: нажать кнопку «Office» → «Параметры Excel» → «Надстройки». Выбрать «Поиск решения» и нажать кнопку «Перейти». Далее напротив «Поиск решения» поставить галочку и нажать кнопку ОК.

В версии 2016 MS Excel нужно нажать «Файл» → «Надстройки» → «Управление Надстройки Excel. Перейти». Далее напротив «Поиск решения» поставить галочку и нажать кнопку ОК.

Сначала рассмотрим использование данной надстройки на примере задачи 3.1.2. Напомним математическую модель задачи 3.1.2:

$$z = 732x_1 + 583x_2 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ 240x_1 + 320x_2 \ge 3200, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оформим условие задачи (рис. 3.7). Вместимость фабрики по станкам первого и второго вида указана в ячейках C4, D4. Производительность станков в день записана в ячейках C5, D5. Производительность фабрики в день должна быть не менее значения, указанного в ячейке B5.

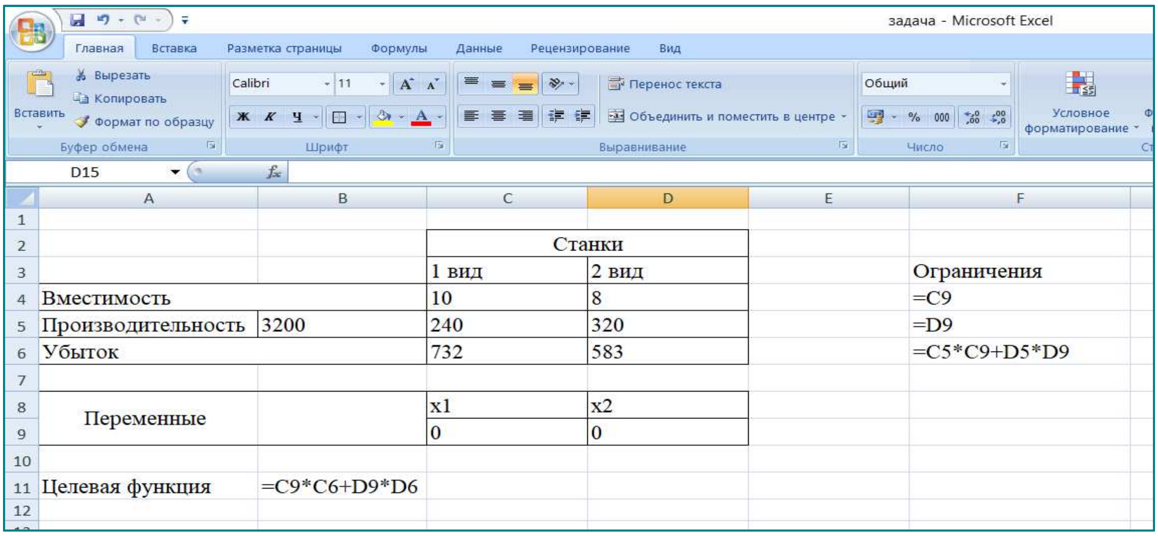


Рис. 3.7. Заполнение исходных данных

Переменные пересчитываются в ячейках C9, D9. Формула для целевой функции задана в ячейке B11. Левые части неравенств системы ограничений заданы в ячейках F4, F5 – по количеству станков, в ячейке F6 – по количеству производимых изделий фабрикой в день. Заполняем параметры диалогового окна «Поиска решения» (рис. 3.8).

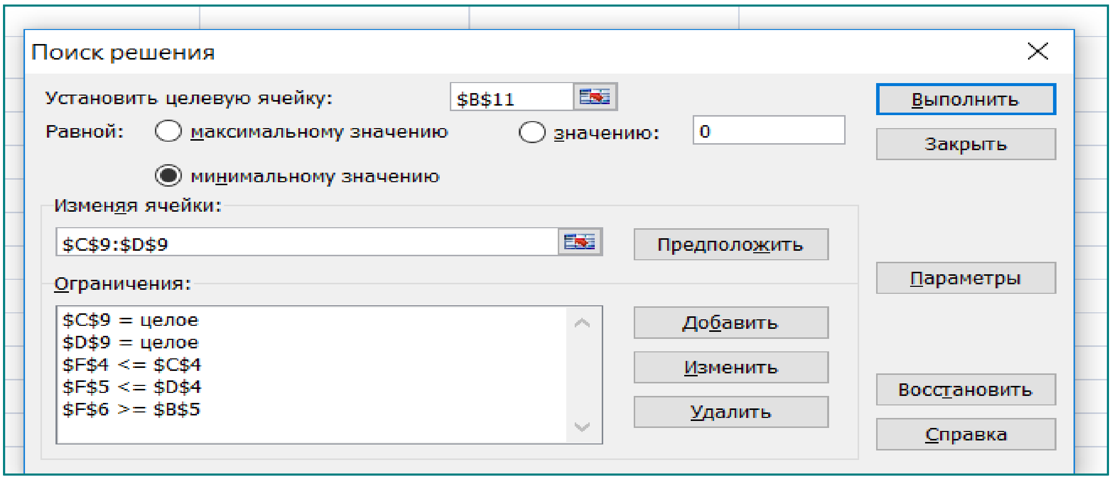


Рис. 3.8. Заполнение данных в Поиске решений

Укажем целевую ячейку, выберем минимизацию. Для того чтобы задать ограничения, необходимо нажать кнопку «Добавить». Опишем систему ограничений задачи, используя соответствующие знаки неравенства и правые части. Кроме того, укажем, что количество станков есть целое число.

Выполним поиск решения. Получим результат, представленный на рис. 3.9: количество станков первого вида $x_1 = 3$, количество станков второго вида $x_2 = 8$, минимальные затраты равны 6860 у.е. При этом можно видеть, что количество станков соответствует ограничениям задачи, и число изделий, производимых фабрикой в день, равно 3280 шт., что больше заданной производительности и также соответствует условию задачи.

Рассмотрим подробно решение еще одной задачи.

Пример 3.3.1. *Цех может выпускать два вида продукции, для чего использует три типа сырья. На производство единицы продукции первого вида требуется затратить сырья первого типа 1 кг, сырья второго типа 4 кг, сырья третьего типа 4 кг. На производство единицы изделия второго вида требуется затратить сырья первого типа 4 кг, сырья второго типа 3 кг, сырья третьего типа 1 кг.*

Цех обеспечен сырьем первого типа в количестве 36 кг, сырьем второго типа в количестве 40 кг, сырьем третьего типа в количестве 32 кг. Прибыль от реализации единицы готового изделия первого вида составляет 3 у.е., а изделия второго вида – 5 у.е.

Какое количество изделий должен выпускать цех, чтобы сделать прибыль максимальной?

Решение. Пусть произведено x_1 единиц изделий первого вида и x_2 единиц изделий второго вида.

Задача сводится к следующей задаче ЛП:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4 \le 36, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 4x_1 + x_2 \ge 32, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для решения задачи будем использовать MS Excel и оформим условие следующим образом (рис. 3.10):

	A	B	C	D	E
1					
2		Продукция			
3	Сырье	1 вид	2 вид	Запасы	Ограничения
4	Тип 1	1	4	36	=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B4:C4)
5	Тип 2	4	3	40	=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B5:C5)
6	Тип 3	4	1	32	=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B6:C6)
7	Прибыль	3	5		
8	Переменные	x1	x2		
9		0	0		
10					
11	Целевая функция	=B9*B7+C9*C7			
12					

Рис. 3.10. Заполнение данных

В ячейках B9, C9 будут найдены переменные задачи. В ячейку B11 занесем формулу для нахождения целевой функции задачи. В ячейки E4:E6 занесены формулы, отражающие расход имеющегося сырья. Формулы целевой функции и расхода ресурсов также могут быть заданы при помощи стандартной функции MS Excel = СУММПРОИЗВ( ) (рис. 3.11).

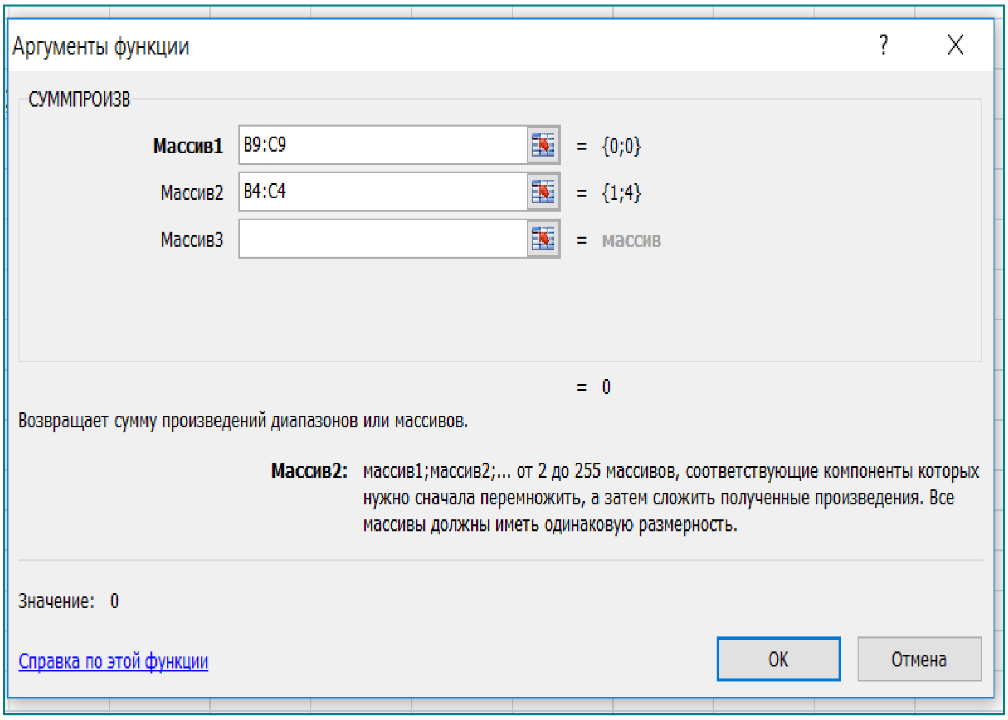


Рис. 3.11. Функция СУММПРОИЗВ()

После занесения необходимых формул в ячейки производим вызов надстройки «Поиск решения».

В окне «Установить целевую ячейку» указывается ячейка, содержащая целевую функцию (в нашем случае B11). Поскольку задача стоит в максимизации прибыли, то целевую ячейку устанавливаем равной максимальному значению. В окне «Изменяя ячейки» указываются ячейки, содержащие переменные решения – это ячейки B9:C9. Описываем ограничения (рис. 3.12). В нашем случае расход сырья (диапазон ячеек E4:E6) не должен превышать имеющийся запас ресурсов (диапазон ячеек D4:D6). Также следует добавить ограничение, согласно которому переменные решения будут неотрицательными.

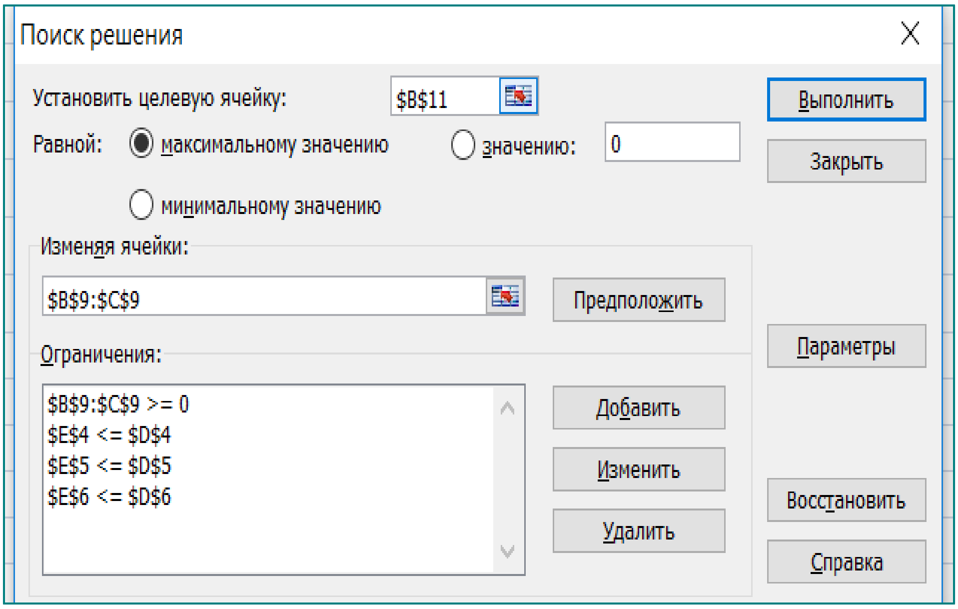


Рис. 3.12. Заполнение параметров надстройки

Теперь нажимаем кнопку «Выполнить». В результате появится следующее окно (рис. 3.13).

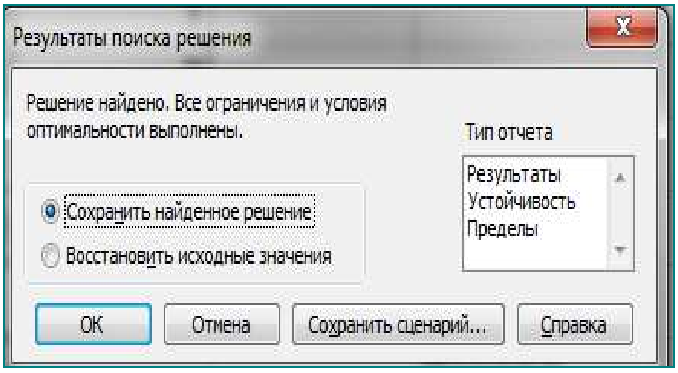


Рис. 3.13. Диалоговое окно надстройки «Поиск решения»

Нажимаем кнопку Ok и сохраняем найденное решение на листе MS Excel. В результате получаем следующее решение (рис. 3.14): количество изделий первого вида $x_1 = 4$, количество изделий второго вида $x_2 = 8$, а максимальная прибыль цеха равна 52 у.е.

	A	B	C	D	E
1					
2		Продукция			
3	Сырье	1 вид	2 вид	Запасы	Ограничения
4	Тип 1	1	4	36	36
5	Тип 2	4	3	40	40
6	Тип 3	4	1	32	24
7	Прибыль	3	5		
8	Переменные	x1	x2		
9		4	8		
10					
11	Целевая функция	52			

Рис. 3.14. Результат работы надстройки

Транспортная задача. При решении транспортных задач также может быть использована надстройка «Поиск решения» MS Excel. Рассмотрим использование данной надстройки на примере задачи примера 3.1.4. Организовываем данные задачи так, как показано на рис. 3.15.

D16

	A	B	C	D	E	F	G
1	Транспортные расходы	B1	B2	B3			
2	A1	7	3	2			=СУММПРОИЗВ(B2:D2;B8:D8)
3	A2	3	8	9			=СУММПРОИЗВ(B3:D3;B9:D9)
4					Суммарные издержки		=СУММ(G2:G3)
5							
6							
7	Переменные	B1	B2	B3	Запасы	Ограничения	
8	A1	0	0	0	40	=СУММ(B8:D8)-E8	
9	A2	0	0	0	25	=СУММ(B9:D9)-E9	
10	Потребности	10	35	20			
11	Ограничения	=СУММ(B8:B9)-B10	=СУММ(C8:C9)-C10	=СУММ(D8:D9)-D10			
12							

Рис. 3.15. Исходные данные задачи

В ячейках G2:G3 указываются суммы произведений цены перевозки единицы груза на объем перевозки от *i*-го поставщика к потребителям. В ячейку G4 заносится сумма полученных сумм – это и есть целевая функция, которую нужно минимизировать. В ячейках E8:E9 записаны запасы, т.е. ограничения на количество груза, которое можно увезти от каждого поставщика. В ячейках B10 : D10 – потребности, т.е. ограничения на количества груза, которые нужно доставить к каждому потребителю.

Запишем ограничения транспортной задачи для надстройки «Поиск решения» MS Excel:

- в ячейки B11:D11 занесем формулы разности количества груза, поставляемого каждому потребителю от всех поставщиков, и его потребности;
- в ячейки F8:F9 занесем формулы разности количества груза, поставляемого от каждого поставщика ко всем потребителям, и его запасов.

Вызываем «Поиск решения» (рис. 3.16). Устанавливаем целевую ячейку, равную G4. Изменяем ячейки: B8:D10. Добавляем ограничения: B8:D10≥0 (перевозки неотрицательны), F8:F9 =0 (ограничения на количества груза от каждого поставщика), B11:D11 =0 (ограничения на количества груза каждому потребителю).

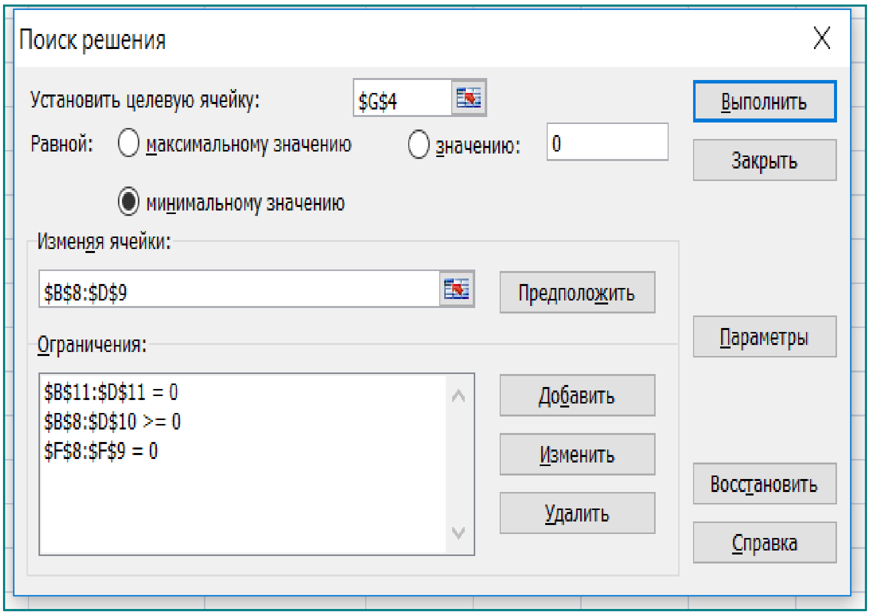


Рис. 3.16. Окно надстройки «Поиск решений»

После этого нажимаем кнопку «Выполнить». В результате получаем минимальные затраты на перевозку груза, равные 250, и следующий оптимальный план транспортной задачи (рис. 3.17).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Транспортные расхо	B1	B2	B3			
2	A1	7	3	2			100
3	A2	3	8	9			150
4					Суммарные издержки		250
5							
6							
7	Переменные	B1	B2	B3	Запасы	Ограничения	
8	A1	0	20	20	40	0	
9	A2	10	15	0	25	0	
10	Потребности	10	35	20			
11	Ограничения	0	0	0			
12							

Рис. 3.17. Оптимальный план

Полученное решение совпадает с результатом рассуждений, проделанных выше при рассмотрении примера 3.1.4.

Рассмотрим подробно решение еще одной транспортной задачи.

Пример 3.3.2. *Три предприятия* S_1, S_2, S_3 *производят и поставляют комплектующие детали пяти магазинам* D_1, D_2, D_3, D_4, D_5. *Предприятия-поставщики* S_1, S_2, S_3 *могут поставлять соответственно 140, 210, 80 контейнеров с деталями в день, а магазинам* D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 *требуется соответственно 80, 120, 30, 120, 80 контейнеров в день. Затраты на перевозку одного контейнера от завода-поставщика* S_i *к магазину-потребителю* D_j *приведены в табл. 3.8:*

Таблица 3.8

Заводы-поставщики	Магазины-потребители					Запасы
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	6	7	9	8	8	140
S_2	6	7	8	9	8	210
S_3	11	10	9	13	12	80
Потребности	80	120	30	120	80	

Можно организовать данные задачи так, как показано на рис. 3.18.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Транспортные расходы	D1	D2	D3	D4	D5		
2	S1	6	7	9	8	8		=СУММПРОИЗВ(B2:F2;B8:F8)
3	S2	6	7	8	9	8		=СУММПРОИЗВ(B3:F3;B9:F9)
4	S3	11	10	9	13	12		=СУММПРОИЗВ(B4:F4;B10:F10)
5							Издержки	=СУММ(H2:H4)
6								
7	Переменные	D1	D2	D3	D4	D5	Запасы	Ограничения
8	S1	0	0	0	0	0	140	=СУММ(B8:F8)-G8
9	S2	0	0	0	0	0	210	=СУММ(B9:F9)-G9
10	S3	0	0	0	0	0	80	=СУММ(B10:F10)-G10
11	Потребности	80	120	30	120	80		
12	Ограничения	=СУММ(B8:B10)-B11	=СУММ(C8:C10)-C11	=СУММ(D8:D10)-D11	=СУММ(E8:E10)-E11	=СУММ(F8:F10)-F11		
13								

Рис. 3.18. Заполнение исходных данных

В ячейках H2:H4 указываются суммы произведений цены перевозки единицы груза и объема перевозки от определенного поставщика к любому потребителю. В ячейку H5 заносится сумма значений ячеек H2:H4 – это наша целевая функция, которую нужно минимизировать. В ячейках H8: H10 – ограничения на количества груза, которые можно увезти от каждого поставщика. В ячейках B12:F12 – ограничения на количества груза, которые нужно привезти к каждому потребителю. После занесения всех необходимых формул вызываем «Поиск решения» (рис. 3.19). Устанавливаем целевую ячейку, равную H5. Изменяем ячейки: B8:F10. Ограничения: B8:F10≥0 (учитываем, что перевозки неотрицательны), H8:H10=0 (ограничения на количество груза от поставщиков), B12:F12=0 (ограничения на количество груза потребителю). Далее нажимаем кнопку «Выполнить».

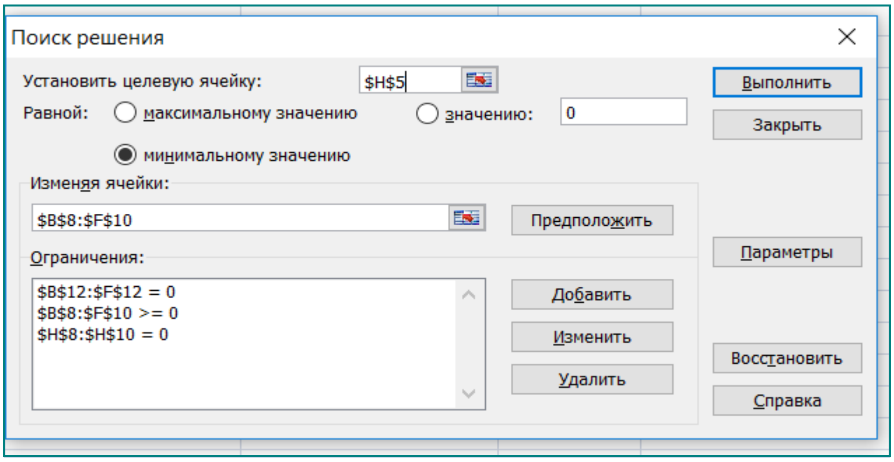


Рис. 3.19. Диалоговое окно надстройки «Поиск решений»

В результате получаем минимальные затраты на перевозку контейнеров с деталями, равные 3340, и следующий оптимальный план транспортной задачи (рис. 3.20).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Транспортные расходы	D1	D2	D3	D4	D5		
2	S1	6	7	9	8	8		1120
3	S2	6	7	8	9	8		1450
4	S3	11	10	9	13	12		770
5							Издержки	3340
6								
7	Переменные	D1	D2	D3	D4	D5	Запасы	Ограничения
8	S1	0	0	0	120	20	140	0
9	S2	80	70	0	0	60	210	0
10	S3	0	50	30	0	0	80	0
11	Потребности	80	120	30	120	80		
12	Ограничения	0	0	0	0	0		

Рис. 3.20. Оптимальный план

Рассмотрим возможность решения задач о назначениях средствами MS Excel. Вернемся к примеру 3.1.5 и оформим условие задачи, как представлено на рис. 3.21.

	A	B	C	D	E	F
1	Транспортные расходы	D1	D2	D3	D4	
2	S1	14	23	34	20	
3	S2	25	10	17	40	
4	S3	28	45	24	19	
5	S4	0	0	0	0	
6						
7						
8						
9						
10						
11	Переменные	D1	D2	D3	D4	Запасы
12	S1	0	0	0	0	150
13	S2	0	0	0	0	270
14	S3	0	0	0	0	340
15	S4	0	0	0	0	141
16	Потребности	225	122	344	210	
17						

Рис. 3.21. Заполнение данных

Пример 3.3.3. *С трех складов оптового поставщика камер видеонаблюдения поставляется товар в четыре точки розничной торговли. Матрица стоимости перевозки товара имеет вид:*

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 34 & 20 \\ 25 & 10 & 17 & 40 \\ 28 & 45 & 24 & 19 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозки, если запасы товара на складах равны 150, 270, 340 соответственно, а потребности розницы составляют 225, 122, 344, 210 соответственно.

Решение. Суммарное число запасов товара на складах равно 760 ед., суммарные потребности розничных точек равны 901. Как видим, потребности пунктов назначения превышают запасы, значит, модель транспортной задачи является открытой (несбалансированной). Чтобы получить открытую (сбалансированную) модель, введем фиктивный склад с запасом груза 901-760=141. Тарифы перевозки единицы груза со склада во все розничные точки полагаем равными нулю. Занесем исходные данные в таблицу MS Excel (рис. 3.22).

В ячейку G8 записываем формулу, по которой вычисляем значение нашей целевой функции. В ячейках G12:G15 и B17:E17 записываем формулы, нулевые значения которых соответствуют выполнению ограничений по запасам и потребностям (рис. 3.22).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Транспортные расходы	D1	D2	D3	D4		
2	S1	14	23	34	20		
3	S2	25	10	17	40		
4	S3	28	45	24	19		
5	S4	0	0	0	0		
6							
7							
8						Затраты	=СУММПРОИЗВ(B2:E5;B12:E15)
9							
10							
11	Переменные	D1	D2	D3	D4	Запасы	Ограничения
12	S1	0	0	0	0	150	=СУММ(B12:E12)-F12
13	S2	0	0	0	0	270	=СУММ(B13:E13)-F13
14	S3	0	0	0	0	340	=СУММ(B14:E14)-F14
15	S4	0	0	0	0	141	=СУММ(B15:E15)-F15
16	Потребности	225	122	344	210		
17	Ограничения	=СУММ(B12:B15)-B16	=СУММ(C12:C15)-C16	=СУММ(D12:D15)-D16	=СУММ(E12:E15)-E16		
18							

Рис. 3.22. Ввод формул

Параметры Поиска решений заполним согласно рис. 3.23.

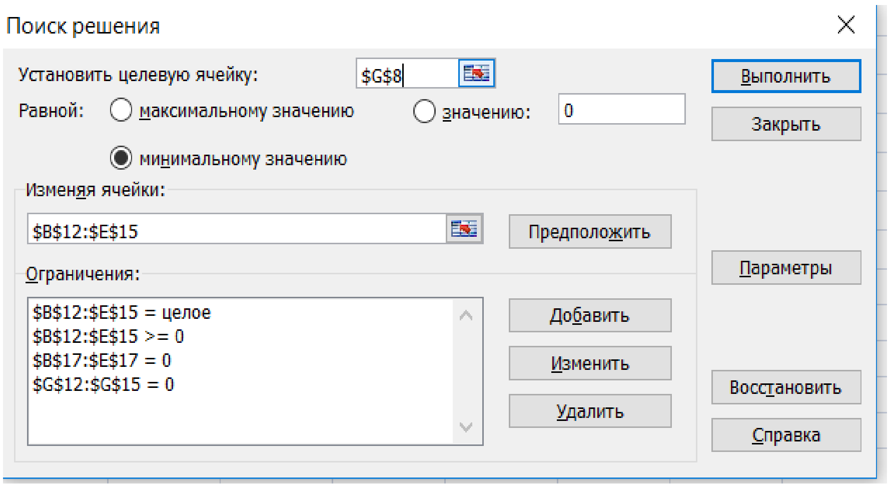


Рис. 3.23. Параметры «Поиска решений»

В результате выполнения функции поиска решения получим результат, представленный на рис. 3.24.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Транспортные расходы	D1	D2	D3	D4		
2	S1	14	23	34	20		
3	S2	25	10	17	40		
4	S3	28	45	24	19		
5	S4	0	0	0	0		
6							
7							
8						Затраты	12946
9							
10							
11	Переменные	D1	D2	D3	D4	Запасы	Ограничения
12	S1	150	0	0	0	150	0
13	S2	0	122	148	0	270	0
14	S3	0	0	130	210	340	0
15	S4	75	0	66	0	141	0
16	Потребности	225	122	344	210		
17	Ограничения	0	0	0	0		
18							

Рис. 3.24. Оптимальное решение

Анализ полученного результата позволяет сделать следующие выводы. Из первого склада необходимо весь груз направить на первую розничную точку, из второго склада направить груз во вторую и третью точки в количестве 122 и 148 единиц соответственно. С третьего склада следует вывозить груз в третью и четвертую точки розничной торговли в количестве 130 и 210 единиц соответственно. Потребность первой точки остается неудовлетворенной на 75 единиц товара, а третьей на 66 единиц. Общая стоимость доставки груза потребителям будет минимальной и составит 12 946 у.е.

Задача о назначениях. Рассмотрим возможность решения задач о назначениях средствами MS Excel. Вернемся к примеру 3.1.5. Матрица временных затрат и матрица назначений представлены на рис. 3.25. Дополняем таблицы данных необходимыми для решения задачи формулами (рис. 3.26).

	A	B	C	D	E	F
1	Временные затраты	A1	A2	A3	A4	A5
2	S1	75	30	10	25	15
3	S2	20	35	40	50	25
4	S3	15	55	70	65	37
5	S4	25	30	20	100	48
6	S5	46	65	54	35	74
7						
8						
9	Переменные	A1	A2	A3	A4	A5
10	S1	0	0	0	0	0
11	S2	0	0	0	0	0
12	S3	0	0	0	0	0
13	S4	0	0	0	0	0
14	S5	0	0	0	0	0

Рис. 3.25. Исходные данные

Матрицу назначений дополним столбцом справа и строкой внизу, в которых рассчитывается сумма элементов строк и столбцов соответственно. Также запишем в ячейку G17 формулу для расчета значения целевой функции.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Временные затраты	A1	A2	A3	A4	A5	
2	S1	75	30	10	25	15	
3	S2	20	35	40	50	25	
4	S3	15	55	70	65	37	
5	S4	25	30	20	100	48	
6	S5	46	65	54	35	74	
7							
8							
9	Переменные	A1	A2	A3	A4	A5	Ограничения
10	S1	0	0	0	0	0	=СУММ(B10:F10)
11	S2	0	0	0	0	0	=СУММ(B11:F11)
12	S3	0	0	0	0	0	=СУММ(B12:F12)
13	S4	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:F13)
14	S5	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:F14)
15	Ограничения	=СУММ(B10:B14)	=СУММ(C10:C14)	=СУММ(D10:D14)	=СУММ(E10:E14)	=СУММ(F10:F14)	
16							
17	Целевая функция						=СУММПРОИЗВ(B2:F6;B10:F14)
18							

Рис. 3.26. Ввод формул

Вызываем диалоговое окно надстройки «Поиск решения». Определяем целевую ячейку, значение которой нужно минимизировать. Добавляем ограничения, которые описывают условие соответствия каждой работе одного исполнителя, а также бинарность переменных (рис. 3.27). Нажимаем кнопку «Выполнить».

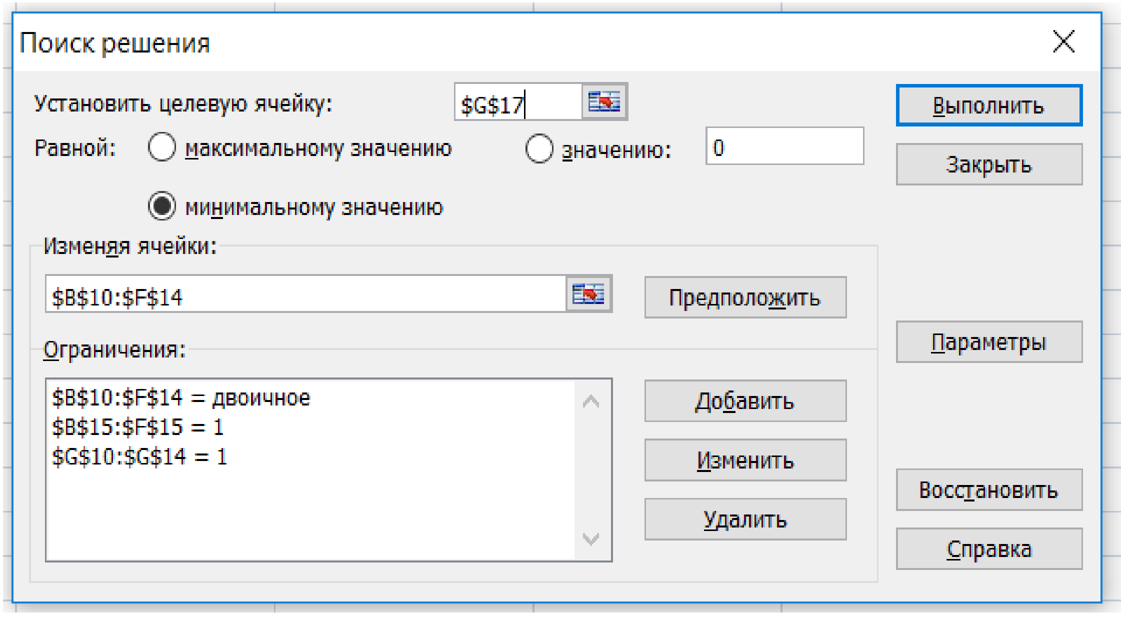


Рис. 3.27. Окно надстройки

Результаты вычислений представлены на рис. 3.28.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Временные затраты	A1	A2	A3	A4	A5	
2	S1	75	30	10	25	15	
3	S2	20	35	40	50	25	
4	S3	15	55	70	65	37	
5	S4	25	30	20	100	48	
6	S5	46	65	54	35	74	
7							
8							
9	Переменные	A1	A2	A3	A4	A5	Ограничения
10	S1	0	0	1	0	0	1
11	S2	0	0	0	0	1	1
12	S3	1	0	0	0	0	1
13	S4	0	1	0	0	0	1
14	S5	0	0	0	1	0	1
15	Ограничения	1	1	1	1	1	
16							
17	Целевая функция						115

Рис. 3.28. Результаты вычислений

Получен план расстановки сотрудников по видам работ, при котором временные затраты на реализацию проекта составят 115 часов и будут минимальными.

Рассмотрим задачу о назначениях для случая, когда количество работ и количество исполнителей не равны, т.е. задача является несбалансированной. При этом возможны два случая, когда число исполнителей больше выполняемых работ и когда число исполнителей меньше выполняемых работ. В обоих случаях несбалансированную задачу приводят к сбалансированной путем введения фиктивных работ в первом случае и фиктивных исполнителей во втором случае с нулевыми значениями эффективности.

Пример 3.3.4. *Для участия в трех международных конференциях нужно сформировать три команды студентов, каждая из которых имеет в составе двух человек, и каждый студент может попасть только в одну команду. Пары составляются из лучших студентов университета: четырех математиков и шести программистов. Предварительно был проведен специальный тест на психологическую совместимость и интеллектуальную эффективность. Результаты тестирования в баллах приведены в табл. 3.9.*

Таблица 3.9

	Математики			
Программисты	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	67	20	30	25
P_2	79	78	42	50
P_3	15	55	70	65
P_4	98	30	28	100
P_5	40	87	50	97
P_6	78	26	75	50

Определите такое формирование команд, которое имеет максимальный суммарный индекс эффективности.

Решим задачу с помощью MS Excel. Сведем задачу к сбалансированной путем введения двух столбцов, соответствующих двум фиктивным математикам. Матрица эффективности и матрица выбора представлены на рис. 3.29.

	A	B	C	D	E	F	G
1		M1	M2	M3	M4	M5	M6
2	P1	67	20	30	25	0	0
3	P2	79	78	42	50	0	0
4	P3	15	55	70	65	0	0
5	P4	98	30	28	100	0	0
6	P5	40	87	50	97	0	0
7	P6	78	26	75	50	0	0
8							
9							
10		M1	M2	M3	M4	M5	M6
11	P1	0	0	0	0	0	0
12	P2	0	0	0	0	0	0
13	P3	0	0	0	0	0	0
14	P4	0	0	0	0	0	0
15	P5	0	0	0	0	0	0
16	P6	0	0	0	0	0	0

Рис. 3.29. Исходные данные

Дополняем таблицы данных необходимыми для решения задачи формулами (рис. 3.30).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		M1	M2	M3	M4	M5	M6	
2	P1	67	20	30	25	0	0	
3	P2	79	78	42	50	0	0	
4	P3	15	55	70	65	0	0	
5	P4	98	30	28	100	0	0	
6	P5	40	87	50	97	0	0	
7	P6	78	26	75	50	0	0	
8								
9								
10		M1	M2	M3	M4	M5	M6	Ограничения
11	P1	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B11:G11)
12	P2	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B12:G12)
13	P3	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:G13)
14	P4	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:G14)
15	P5	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B15:G15)
16	P6	0	0	0	0	0	0	=СУММ(B16:G16)
17	Ограничения	=СУММ(B11:B16)	=СУММ(C11:C16)	=СУММ(D11:D16)	=СУММ(E11:E16)	=СУММ(F11:F16)	=СУММ(G11:G16)	=СУММ(B17:E17)
18								
19	Целевая функция							=СУММПРОИЗВ(B2:G7;B11:G16)
20								

Рис. 3.30. Ввод формул

Заполняем параметры «Поиск решений». Установим целевую ячейку H19, которую нужно максимизировать. Добавим ограничение, учитывающее бинарность элементов матрицы выбора ($B$11:$G$16=двоичное), ограничения, описывающие условие попадания каждого студента не более, чем в одну команду ($B$17: $G$17<=1; $H$11: $H$16<=1), и ограничение по количеству команд ($H$17=3). На рисунке 3.31 представлена заполненная форма «Поиск решения».

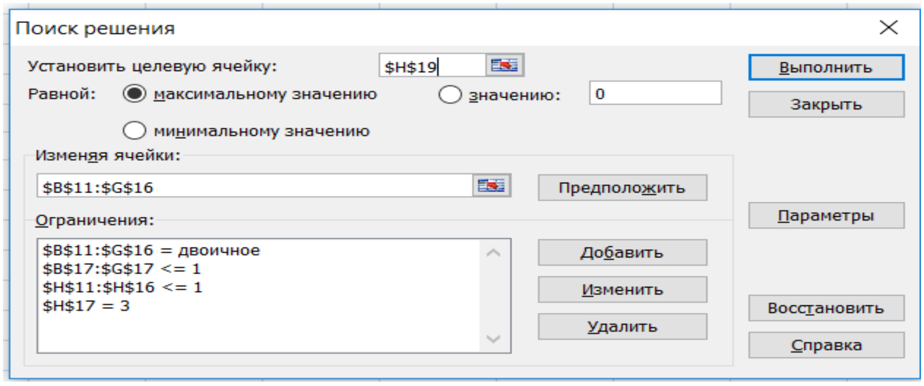


Рис. 3.31. Окно надстройки «Поиск решения»

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		M1	M2	M3	M4	M5	M6	
2	P1	67	20	30	25	0	0	
3	P2	79	78	42	50	0	0	
4	P3	15	55	70	65	0	0	
5	P4	98	30	28	100	0	0	
6	P5	40	87	50	97	0	0	
7	P6	78	26	75	50	0	0	
8								
9								
10		M1	M2	M3	M4	M5	M6	Ограничения
11	P1	0	0	0	0	0	0	0
12	P2	0	1	0	0	0	0	1
13	P3	0	0	0	0	0	0	0
14	P4	1	0	0	0	0	0	1
15	P5	0	0	0	1	0	0	1
16	P6	0	0	0	0	0	0	0
17	Ограничения	1	1	0	1	0	0	3
18								
19	Целевая функция							273
20								

Рис. 3.32. Оптимальное решение

Анализ полученного решения (рис. 3.23) показывает, что оптимальными будут группы в составе (P_4;M_1), (P_2;M_2), (P_5;M_4) с суммарным количеством тестовых баллов 273.

Тема 4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В задачах принятия решений в *условиях полной неопределенности* имеется несколько альтернатив и несколько состояний природы, но о вероятностях их наступления ничего неизвестно в принципе. Все решения являются компромиссными и носят субъективный характер.

4.1 Основы теории игр

Теория игр – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций. Под *конфликтом* понимается – ситуация, разрешение которой происходит в условиях различия интересов нескольких участвующих сторон.

Математические модели конфликтных ситуаций называют *играми*, участников конфликта – *игроками*, а решения, которые способны принимать игроки, – *стратегиями*.

Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.

Рассмотрим игру «Камень, ножницы, бумага». Математическая модель данной игры:

1. Игроков всего двое. Будем говорить, что множество игроков в этой игре состоит из двух элементов:

$$I = \{1,2\}.$$

2. Каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, множество стратегий для каждого игрока $i \in I$ будет S_i = {камень, ножницы, бумага}.

3. Мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. Пусть, к примеру, проигравший отдает 1 доллар. Тогда платежная матрица игры будет следующей (рис. 4.1).

		Игрок 2		
		«камень»	«ножницы»	«бумага»
Игрок 1	«камень»	0,0	1,-1	-1,1
	«ножницы»	-1,1	0,0	1,-1
	«бумага»	1,-1	-1,1	0,0

Рис.4.1. Платежная матрица игры «Камень, ножницы, бумага»

Первое число – платеж первого игрока (его стратегии – строки), второе число – платеж второго (его стратегии – столбцы).

Пусть $S_1,\ldots,S_N$ – множества. Декартовым произведением этих множеств называется совокупность упорядоченных наборов из элементов, т.е.

$$S = S_1 \times \ldots \times S_N = \{(s_1,\ldots,s_N) \vee s_1 \in S_1,\ldots,s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1,\ldots,N\}$ – множество игроков, $S_1,\ldots,S_N$ – множество стратегий игроков, то будем говорить, что множество профилей стратегий или множество стратегий в игре есть $S = S_1 \times \ldots \times S_N$.

Так, в игре «Камень, ножницы, бумага» множество профилей стратегий будет S = {(камень, камень), (камень, ножницы), (камень, бумага), (бумага, бумага), (бумага, камень), (бумага, ножницы), (ножницы, ножницы), (ножницы, камень), (ножницы, бумага)}.

Любой элемент $s_i \in S_i$ называется *стратегией игрока* i, любой элемент $s \in S$ *профилем стратегий* игроков. Обозначим через $S_{-i} =_{j \neq i} S_j$ – множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока i. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме i.

Выигрыши игроков можно задать с помощью платежной матрицы или функцией выигрыша. *Функция выигрыша* игрока i будет присваивать каждому профилю стратегий $s \in S$ какой-то выигрыш: $u_i : S \to R$.

Набор $G = \langle I, S, u_i \rangle$ называется *игрой в нормальной форме*. В игре каждый игрок $i \in I$ выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры – понять, какие стратегии игроки выберут в зависимости от множества профилей стратегий S и профиля функций выигрышей u.

Первой концепцией, помогающей определить, какими стратегиями выгодно воспользоваться игрокам в данной игре, является поиск доминирующих и доминируемых стратегий.

Пусть $G = \langle I, S, u_i \rangle$ игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* над стратегией $s_i^{'} \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i}). \qquad (1)$$

Если выполняется нестрогое неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$, то говорят о *слабом доминировании*.

Если одна стратегия всегда приносит игроку больший выигрыш, чем другая, то мы говорим о сильном доминировании. Если у игрока есть одна стратегия, которая сильно или слабо доминирует над всеми остальными, то мы можем ожидать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры, прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно доминирующих стратегиях*, если для всех i и всех $s_i^{'} \in S_i, s_i^{'} \neq s_i^*$ стратегия s_i^* сильно доминирует над $s_i^{'}$.

Пример 4.1.1. *Пусть игра двух игроков задана матрицей.*

	s_1	s_2	s_3
t_1	0,3	-10,7	1,5
t_2	2,1	-6,4	4,3
t_3	3,-4	-5,-2	6,-5
t_4	1,0	-8,3	2,-1

В этой игре у каждого из игроков есть сильно доминирующие стратегии. Для первого игрока – стратегия t_3, для второго – s_2. Тогда игрокам не выгодно использовать стратегии, отличные от этих, поэтому равновесием (в сильно доминирующих стратегиях) в этой игре будет профиль (t_3, s_2).

Будем говорить, что стратегия является *доминируемой*, если над ней доминирует какая-то другая из стратегий.

Пример 4.1.2. *Пусть игра двух игроков задана матрицей.*

	s_1	s_2	s_3	s_4
t_1	1,2	3,4	2,6	5,–2
t_2	–3,4	–4,8	1,7	1,3
t_3	–9,8	4,2	–3,5	–4,–9
t_4	–7,13	–4,6	0,10	1,8

В данной игре нет сильно доминирующих стратегий, но есть доминируемые стратегии. Рассмотрим метод последовательного удаления доминируемых стратегий. Для первого игрока стратегия t_1 сильно доминирует над t_2, t_4, поэтому первому игроку не имеет смысла использовать доминируемые стратегии t_2, t_4. Следовательно, их можно исключить из платежной матрицы.

	s_1	s_2	s_3	s_4
t_1	1,2	3,4	2,6	5,–2
t_3	–9,8	4,2	–3,5	–4,–9

Тогда в изменившихся условиях у второго игрока стратегия s_3 доминирует над стратегиями s_2, s_4. Далее удалим доминируемые стратегии s_2, s_4.

	s_1	s_3
t_1	1,2	2,6
t_3	–9,8	–3,5

Теперь для первого игрока стратегия t_1 является сильно доминирущей. Удаляем из рассмотрения стратегию t_3.

	s_1	s_3
t_1	1,2	2,6

В данной ситуации, стратегия s_1 второго игрока доминирует стратегию s_3. После удаления последней доминируемой стратегии получим, что профиль (t_1, s_3) является равновесием, получаемым удалением доминируемых стратегий.

Рассмотрим игру «Орлянка». *Играют двое. Каждый из игроков загадывает на бумаге орла или решку, а затем выборы игроков сравниваются. Если они совпали, то побеждает первый, а если различаются, то побеждает второй.*

Множество допустимых стратегий игроков $S_1 = S_2 = \{O,P\}$. Пусть проигравший отдает выигравшему 1 рубль. Тогда платежная матрица будет следующей:

	О	*Р*
О	1;-1	-1;1
Р	-1;1	1;-1

В этой игре ни у одного из игроков нет доминируемых стратегий. Какое решение можно предложить в этой ситуации, мы рассмотрим позже.

Следующий пример – игра «Битва полов». *Муж и жена решают, где им провести выходной день. Муж хочет на футбол, а жена предпочитает балет. При этом им обоим хочется провести время вместе.*

Множество допустимых стратегий игроков $S_1 = S_2 = \{Футбол, Балет\}$. Определим, как распределятся платежи в этой игре.

1. Если муж с женой пошли на футбол, то муж получает наибольший выигрыш – 5, а жена рада, что они проведут время вместе, но все же это не балет, поэтому ее выигрыш положим равным 3.

2. Аналогично в ситуации, когда муж с женой идут на балет, то выигрыш мужа – 3, а жены – 5.

3. Если муж пошел на футбол, а жена на балет, то выигрыши обоих положим равными по 2.

4. Последний случай, когда муж пошел на балет, а жена на футбол. Каждый из них не получил то, что хотел, поэтому их выигрыши 0.

Платежная матрица этой игры приведена ниже.

	Футбол	Балет
Футбол	5;3	2;2
Балет	0;0	3;5

Нетрудно проверить, что у этой игры нет доминирующих и доминируемых стратегий.

Следующий пример – «Дилемма заключенного».

Два бандита Петя и Вася попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколятся, то каждый получит по восемь лет.

Модель игры. Формально, мы имеем $I = \{Петя, Вася\}$, $S_1 = S_2 =$ {«сознаться», «молчать»}. Пусть выигрыш каждого равен, со знаком минус, годам, проведенным за решеткой:

		Вася	
		молчать	сознаться
Петя	молчать	-1;-1	-10;0
	сознаться	0;-10	-8;-8

В этой игре у обоих игроков стратегия «сознаться» является сильно доминирущей, следовательно, профиль («сознаться»; «сознаться») будет равновесием. Получается удивительный факт: в ситуации, когда бандиты не могут договориться и не уверены в надежности друг друга, они получают решение, далекое от оптимального. Логичнее им было обоим промолчать и получить по 1 году, но каждый стремится максимизировать свой выигрыш, и в итоге это приводит не к оптимальному исходу.

Другая концепция, позволяющая решать намного больший класс игр, чем равновесия в сильно доминирующих стратегиях и равновесия, получаемого посредством удаления доминируемых стратегий, была предложена Джоном Нэшем и называется равновесием Нэша.

Пусть $G = \langle I, S, u_i \rangle$ – игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ – *равновесие Нэша*, если для всех i и для всех $s_i^{'} \in S_i$ мы имеем

$$u_i\left(s_i^*, s^*_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i^{'}, s^*_{-i}\right).$$

Равновесие Нэша – это такой профиль стратегий, когда ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными.

Алгоритм поиска равновесий Нэша

1. Для каждой стратегии второго игрока пометим точками наилучшие ответы первого игрока.

2. Для каждой стратегии первого игрока пометим звездочками наилучшие ответы второго игрока.

3. Профили, которые оказались помечены и точками, и звездочками, являются равновесиями Нэша.

Для примера рассмотрим поиск равновесий Нэша для игры из примера 4.1.2.

	s_1	s_2	s_3	s_4
t_1	● 1,2	3,4	● 2,6 *	● 5,–2
t_2	–3,4	–4,8	1,7	1,3
t_3	–9,8 *	● 4,2	–3,5	–4,–9
t_4	–7,13 *	–4,6	0,10	1,8

Профиль (t_1, s_3) является равновесием по Нэшу.

4.2. Антагонистические игры

Антагонистические игры – это игры с нулевой суммой, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В виду этой особенности в платежных матрицах для этого класса игр указаны лишь платежи первого игрока.

Максиминные и минимаксные стратегии

Пусть дана матрица игры

$$\text{A}= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Цель каждого игрока – получить как можно больший выигрыш.

$$\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$
$$A_2 \quad B_2 \quad C_2$$

Если первый игрок выберет стратегию A_1, то второй, чтобы выиграть, больше выберет стратегию B_2 и т.д.

Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\max_i(\min_j a_{ij})$.

Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max_i(\min_j a_{ij})$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или *максимин*, соответствующая стратегия 1-го игрока называется *максиминной*.

Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min_j(\max_i a_{ij})$, обозначим его $\overline{v}$ – верхняя цена игры, или *минимакс*, соответствующая стратегия 2-го игрока называется *минимаксной*.

Схема определения максимина и минимакса приведена ниже.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \\ \min\limits_j a_{mj} \end{array}\right\} \Rightarrow \max_j(\min_j a_{ij}) = \underline{v}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \quad \dots \quad \max_i a_{in}}_{\min\limits_j(\max\limits_i a_{ij}) = \overline{v}}$$

Профиль стратегий (s_{i^*}, s_{j^*}) называется *ситуацией равновесия*, или *седловой точкой*, если для любых $s_i \in S_1, s_j \in S_2$ выполняется неравенство $a_{s_i s_j^*} \le a_{s_{i^*} s_{j^*}} \le a_{s_{i^*} s_{j^*}}$, то есть $u(s_i, s_{j^*}) \le u(s_{i^*}, s_{j^*}) \le u(s_{i^*}, s_j)$.

Соответствующие стратегии s_{i^*}, s_{j^*} называются *оптимальными чистыми стратегиями 1 и 2-го игроков*, а число $v = a_{s_{i^*} s_j^*}$ называется *ценой игры*.

Элемент $a_{s_i^* s_{j^*}}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своём столбце.

Ситуация равновесия возникает только тогда, когда $\underline{v} = \overline{v}$ (это значение и является ценой игры v).

Алгоритм поиска равновесий в чистых стратегиях

1. В каждой строке платежной матрицы находим минимум, затем из найденных значений выбираем максимум – это $\underline{v}$.

2. В каждом столбце платежной матрицы находим максимум, затем из найденных значений выбираем минимум – это $\overline{v}$.

3. Если $\underline{v} = \overline{v}$, то у данной игры есть равновесия в чистых стратегиях, в противном случае, равновесий в чистых стратегиях нет. Полагаем $v = \underline{v} = \overline{v}$.

4. Выделяем строки i, для которых $\min\limits_j a_{ij} = v$, и столбцы j, для которых $\max\limits_i a_{ij} = v$. На пересечении выделенных строк и столбцов будут находиться седловые точки.

Пример 4.1.3. *Найти седловые точки для игры, заданной матрицей.*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A = \begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & \boxed{1} & 20 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{4} \\ -4 & -2 & \boxed{0} & -5 & -5 \\ 5 & 5 & \boxed{4} & 20 & \end{array} \Rightarrow \overline{v} = \underline{v} = 4$$

(2,3) – ситуация равновесная, v =4 – цена игры, $s_{i^*} = 2, s_{j^*} = 3$ – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков.

Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел

$$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), \qquad x_i \ge 0, \quad x_1 + x_2 + ... + x_m = 1,$$

которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i = 1, 2, \ldots, m$.

Аналогично определяется *смешанная стратегия для 2-го игрока*:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_i \ge 0, \quad y_1 + y_2 + ... + y_n = 1.$$

Пусть S_m, S_n – множество всех смешанных стратегий 1 и 2-го игроков соответственно. Если для некоторых $\overline{x}^* \in S_m, \overline{y}^* \in S_n$ и для всех $\overline{x} \in S_m$ и $\overline{y} \in S_n$ выполняется неравенство:

$$u(\overline{x}, \overline{y}^*) \le u(\overline{x}^*, \overline{y}^*) \le u(\overline{x}^*, \overline{y}),$$

то $\overline{x}^*, \overline{y}^*$ называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков, число $v = u(\overline{x}^*, \overline{y}^*)$ называется *ценой игры*, пара $(\overline{x}^*, \overline{y}^*)$ – *стратегической седловой точкой*, а тройка $\overline{x}^*, \overline{y}^*, v$ – *решением игры*.

Решение игр 2 × 2

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платёжная матрица игры G. Если эта игра не имеет седловой точки, то единственное решение в смешанных стратегиях $\overline{x}^* = (x; 1-x), \overline{y}^* = (y; 1-y)$ игры G можно найти, решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{21}(1-x) = v, \\ a_{12}x + a_{22}(1-x) = v, \end{cases} \begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) = v, \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) = v. \end{cases}$$

Пример 4.1.4. *Найти решение игры с платёжной матрицей* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Заметим, что у данной игры нет решения в чистых стратегиях, так как нет седловой точки. Найдем решение данной игры в смешанных стратегиях. Пусть $x^* = (x;1-x), y^* = (y;1-y)$ – смешанные стратегии игроков.

Составим две системы:

$$\begin{cases} 3x + 2(1-x) = v, \\ -x + 4(1-x) = v, \end{cases} \begin{cases} 3y - (1-y) = v, \\ 2y + 4(1-y) = v. \end{cases}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. В результате получим:

$$\begin{cases} x + 2 = v, \\ -5x + 4 = v, \end{cases} \begin{cases} 4y - 1 = v, \\ -2y + 4 = v. \end{cases}$$

В каждой системе вычтем второе уравнение из первого. Тогда

$$6x - 2 = 0, 6y - 5 = 0.$$

Откуда $x = \frac{1}{3}, \ y = \frac{5}{6}, v = x + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$

Ответ: $x = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), y = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right), v = \frac{7}{3}.$

Решение игр 2 × n

Решение игр 2 × n и m × 2 можно свести к анализу игры 2 × 2. Если m × n в игре есть достаточное количество сильно доминируемых стратегий, то ее можно свести к игре 2 × n и m × 2, которые уже можно решить в смешанных стратегиях. Рассмотрим на примере алгоритм решения игр, в которых у первого игрока ровно 2 стратегии, а у второго больше двух.

Пример 4.1.5. *Пусть игра задана платежной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что первая стратегия первого игрока сильно доминирует над третьей стратегией, а третья стратегия второго игрока сильно доминирует над его второй стратегией. Исключим из рассмотрения доминируемые стратегии. Тогда матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если 1-й игрок применит смешанную стратегию $x^* = (x, 1-x)$, а 2-й игрок – чистую стратегию $j = 1$, то

$$u(x^*, 1) = 2x + 4(1-x). \tag{1}$$

Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий j=2, j=3, j=4 получаем:

$$u(x^*, 2) = 3x + 1(1-x), \tag{2}$$

$$u(x^*, 3) = 1x + 6(1-x), \tag{3}$$

$$u(x^*,4)=5x+0(1-x), \qquad (4)$$
$$x\in[0;1]$$

Построим прямые (1), (2), (3), (4) по двум точкам, придавая *x* значения 0 и 1 (рис. 4.1).

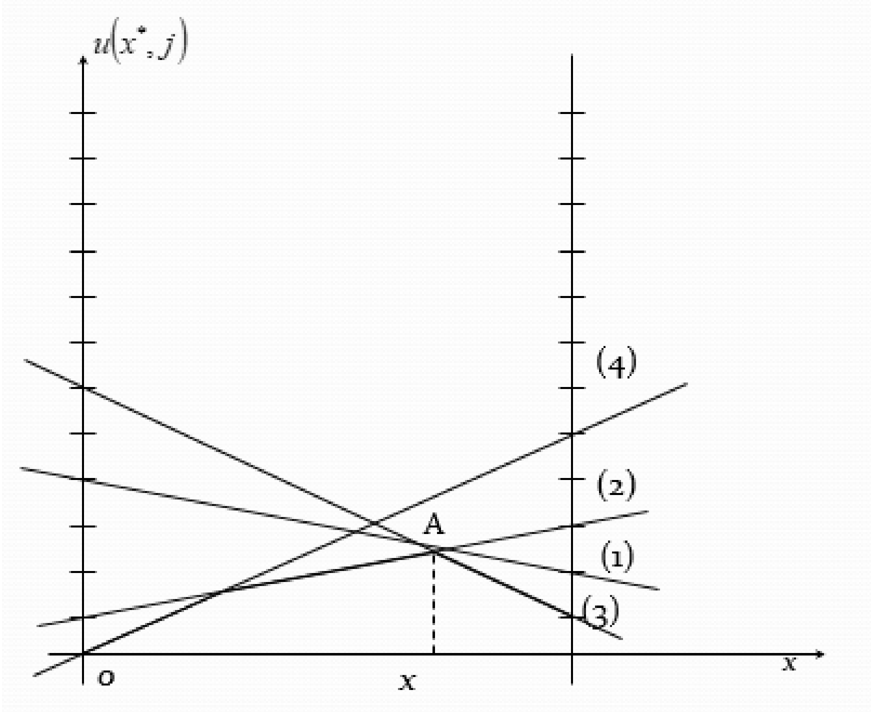


Рис. 4.1. Построение прямых

Оптимальная стратегия 1-го игрока – его максиминная стратегия, которая соответствует самой высокой точке *A* нижней границы.

Точка *A* является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру:

$$A'=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Тогда решение исходной игры имеет вид $x^*=\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right), y^*=\left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right)$ (номерам столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые координаты вектора y), $v=\frac{17}{7}$.

Решение игр m × 2

Пример 4.1.6. Пусть, например, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $y^*=(y,1-y)$ – смешанная стратегия 2-го игрока, 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1,2,3$.

$$u(1,y^*)=3y+2(1-y), \qquad (1)$$
$$u(2,y^*)=1y+5(1-y), \qquad (2)$$
$$u(3,y^*)=4y+1(1-y), \qquad (3)$$
$$y\in[0;1].$$

Построим данные прямые.

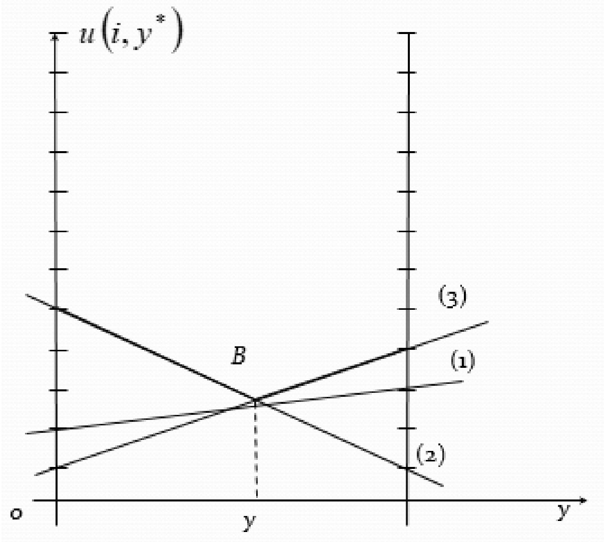


Рис. 4.2. Построение прямых

Оптимальная стратегия 2-го игрока – его минимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке B верхней границы.

Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдём решение игры:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение исходной игры:

$$\overline{x}^* = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right), \overline{y}^* = \left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right).$$

4.2. Критерии принятия решений в условиях неопределенности

В ситуации недостатка информации у ЛПР его решения носят субъективный характер. Зачастую, главным фактором, влияющим на принятие решений, оказывается отношение ЛПР к риску. Далее рассмотрим основные критерии, используемые при принятии решений в условиях полной неопределенности, они показывают, как по-разному люди принимают решения в одних и тех же условиях.

Пример. *Рассмотрим задачу про кафе «Розовая пантера». Предположим, что управляющий не может оценить вероятности наступления различных состояний природы. Ранее в п. 2.1 была составлена платежная матрица к данной задаче (табл. 4.1).*

Таблица 4.1.

Альтернативы	Возможный спрос			
	150	200	250	300
150	3000	3000	3000	3000
200	1500	4000	4000	4000
250	0	2500	5000	5000
300	–1500	1000	3500	6000

Далее нам потребуется еще одна матрица – *матрица рисков*. Матрица рисков показывает, насколько рискует ЛПР, приняв неоптимальное решение при данном состоянии природы, и насколько при этом будут велики его убытки. Чем сильнее отличается принятое решение от оптимального, тем значительнее будет величина убытков и степень риска.

Алгоритм составления матрицы рисков

1. В каждом столбце платежной матрицы найти максимальное значение платежа $max\{a_{ij}\},\ j = 1,2,\ldots,n$.

2. На пересечении каждой строки *i*, соответствующей данной альтернативе, и каждого столбца *j* вычисляется значение риска $r_{ij} = max\{a_{ij}\} - a_{ij}$, равное разности между максимальным значением платежа в данном столбце и платежом, соответствующим данному решению.

3. Предыдущий этап вычисления рисков повторить для всех столбцов платежной матрицы.

Матрица рисков для рассматриваемой задачи будет следующей (табл. 4.2):

Таблица 4.2

Альтернативы	Возможный спрос			
	150	200	250	300
150	0	1000	2000	3000
200	1500	0	1000	2000
250	3000	1500	0	1000
300	4500	3000	1500	0

Критерий Лапласа

Для принятия решения по критерию Лапласа по матрице платежей и для каждой альтернативы A_i вычисляется значение ожидаемого платежа a_i, которое с учётом равенства вероятностей *(p)* наступления всех состояний природы равно:

$$a_i = p(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}).$$

Множитель *p* одинаков для всех альтернатив, поэтому его можно опустить и просто вычислить сумму платежей l_i (критерий Лапласа) для каждой альтернативы A_i по всем состояниям природы, т.е.

$$l_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a.$$

Наилучшему решению соответствует та альтернатива, которая имеет максимальное значение критерия Лапласа:

$$l_{\max} = \max_i\{l_i\}.$$

Алгоритм нахождения оптимального решения по критерию Лапласа

1. В каждой строке платёжной матрицы вычислить сумму платежей $l_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}$.

2. Среди всех значений l_i, $i = 1,2,\ldots,m$ выбрать максимальное значение $l_{\max} = \max_i\{l_i\}$.

3. Наилучшим считается решение, соответствующее максимальному значению ожидаемого платежа $l(max)$ (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Альтернативы	Критерий Лапласа
150	$l_1 = 3000+3000+3000+3000=12000$
200	$l_2 = 1500+4000+4000+4000=13500$
250	$l_3 = 0+2500+5000+5000=12500$
300	$l_4 = -1500+1000+3500+6000=9000$

Оптимальным решением по критерию Лапласа будет изготовить 200 салатов.

Максиминный критерий (критерий Вальда)

Критерий позволяет принимать такое решение, которое гарантирует некоторый выигрыш даже при наступлении самого неблагоприятного состояния природы, так что при реализации более благоприятных состояний природы ЛПР получит больший выигрыш.

Применение максиминного критерия оправдано для осторожного, не склонного к риску ЛПР, а также в ситуациях, в которых получение отрицательного результата недопустимо, например, когда речь идёт о безопасности людей и их здоровье.

Алгоритм нахождения оптимального решения по критерию Вальда

1. В каждой строке *i* платёжной матрицы выбрать минимальную величину платежа:

$$v_i = \min_j \{a_{ij}\}, i = 1,2,...,m.$$

2. Из всех найденных минимальных платежей v_i , $i = 1,2,\ldots,m$ выбрать максимальное значение:

$$\nu_{\max} = \max_i \{\nu_i\} = \max_i \{\min_i \{a_{ij}\}\}.$$

3. Решение, которому соответствует найденная на предыдущем этапе величина v_{max} , и будет наилучшим (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Альтернативы	Минимальное значение платежа $\nu_i = \min_j \{a_{ij}\}$ для каждой альтернативы
150	$\nu_1 = 3000$
200	$\nu_2 = 1500$
250	$\nu_3 = 0$
300	$\nu_4 = -1500$

Таким образом, если руководствоваться критерием Вальда, то следует изготовить 150 салатов.

Максимаксный критерий

ЛПР, применяющий максимаксный критерий, склонен к риску и верит, что наступит такое состояние природы, при котором его выигрыш будет наибольшим. Для такого ЛПР выигрыш имеет большую значимость, чем проигрыш (выигрыш – все, проигрыш – ничто).

Алгоритм нахождения оптимального решения по максимаксному критерию

1. В каждой i строке платёжной матрицы выбрать максимальную величину платежа:

$$m_i = \max_j \{a_{ij}\}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

2. Из всех найденных максимальных платежей $m_i, i = 1, 2, \ldots, m$ выбрать максимальное значение:

$$m_{\max} = \max_i \{m_i\} = \max_i \left\{ \max_j \{a_{ij}\} \right\}.$$

3. Решение, которому соответствует найденная на предыдущем этапе величина m_{max}, и будет наилучшим (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Альтернативы	Максимальное значение платежа $m_i = \max_j \{a_{ij}\}$ для каждой альтернативы
150	$m_1 = 3000$
200	$m_2 = 4000$
250	$m_3 = 5000$
300	$m_4 = 6000$

Если руководствоваться максимаксным критерием, то следует изготовить 300 салатов.

Критерий минимаксного риска (критерий Сэвиджа)

Критерий сожалеющего пессимиста предполагает минимизацию наибольшей потерянной прибыли, иными словами, минимизируется наибольшее сожаление по потерянной прибыли.

Наилучшее решение по критерию Сэвиджа гарантирует получение наименьших потерь в наихудших условиях. Другими словами, критерий Сэвиджа выбирает то решение, при котором минимизируются риски (потери) при возможном наступлении наихудших состояний природы.

Алгоритм нахождения оптимального решения по критерию Сэвиджа

1. По платёжной матрице построить матрицу рисков.
2. В каждой строке i матрицы рисков выбрать максимальный риск:

$$s_i = \max_j \{a_{ij}\}, \; i = 1, 2, ..., m.$$

3. Из всех найденных максимальных рисков $s_i, i = 1, 2, \ldots, m$ выбрать минимальное значение:

$$s_{\min} = \min_i \{s_i\} = \min_i \left\{ \max_j \{a_{ij}\} \right\}.$$

4. Решение, которому соответствует найденная на предыдущем этапе величина s_{min}, и будет наилучшим (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Альтернативы	Максимальное значение риска $s_i = \max_j \{a_{ij}\}$ для каждой альтернативы
150	$s_1 = 3000$
200	$s_2 = 2000$
250	$s_3 = 3000$
300	$s_4 = 4500$

Критерий Сэвиджа в этой ситуации предлагает изготовить 200 салатов.

Критерий пессимизма-оптимизма (критерий Гурвица)

Критерий Гурвица в условиях неопределённости не рекомендует при принятии решения руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом; он придерживается некоторой середины и занимает промежуточное положение между максиминным критерием Вальда (пессимистичным) и максимаксным критерием (оптимистичным).

В критерии Гурвица по платёжной матрице для каждого возможного решения A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ вычисляется выражение:

$$h = \max_i \left\{ \alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right\},$$

в котором коэффициент α назначается лицом, принимающим решение, исходя из своих субъективных соображений и своей склонности к риску,

$$0 \le \alpha \le 1.$$

При различных значениях коэффициента получаются различные критерии принятия решений:

- при α = 0 критерий Гурвица переходит в максимаксный критерий, соответствующий крайнему оптимизму;
- при α = 1 критерий Гурвица переходит в максиминный критерий Вальда, свойственный крайнему пессимизму;
- при 0 < α < 1 критерий Гурвица даёт результаты, занимающие среднее положение между крайними позициями пессимизма и оптимизма. При малых значениях коэффициента α выбор решения будет сдвигаться в сторону оптимизма, при значениях α близких к единице – в сторону пессимизма. Чем более ЛПР склонно к риску, тем меньшее значение коэффициента α оно назначит.

Алгоритм нахождения оптимального решения по критерию Гурвица

1. В каждой строке платёжной матрицы выбрать минимальный платёж $\nu_i = \min_j \{a_{ij}\}$ (как в критерии Вальда) и максимальный платеж $m_i = \max_j \{a_{ij}\}$ (как в максимаксном критерии).
2. Назначить значение коэффициента α.
3. Для каждого решения определить сумму:

$$h_i = \alpha \nu_i + (1 - \alpha) m_i .$$

4. Среди полученных значений h_i выбирается максимальное

$$h_{\max} = \max_i \{h_i\}.$$

Решение, соответствующее максимальному значению $h_{\max}$, будет наилучшим по критерию Гурвица.

Рассмотрим определение наилучшего решения по критерию Гурвица при α = 0,3 в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Альтернативы	ν_i	m_i	$\alpha\nu_i$	$(1-\alpha)m_i$	h_i
150	3000	3000	900	2100	3000
200	1500	4000	450	2800	3250
250	0	5000	0	3500	3500
300	–1500	6000	–450	4200	3750

Оптимальным решением по критерию Гурвица при α = 0,3 будет изготовить 300 салатов.

4.3. Использование MS Excel для принятия решения в условиях неопределенности

Используя возможности MS Excel, можно облегчить процесс расчетов значений по критериям при помощи встроенных функций. Рассмотрим подробнее вычисления для каждого критерия.

Для вычисления значений показателей по критерию Лапласа воспользуемся встроенной функцией СУММ(). Пример использования приведен на рис. 4.3.

	A	B	C	D	E	F
1	*Альтернативы*	*Возможный спрос*				
2		***150***	***200***	***250***	***300***	**кр. Лапласа**
3	***150***	3000	3000	3000	3000	=СУММ(B3:E3)
4	***200***	1500	4000	4000	4000	=СУММ(B4:E4)
5	***250***	0	2500	5000	5000	=СУММ(B5:E5)
6	***300***	-1500	1000	3500	6000	=СУММ(B6:E6)

Рис. 4.3. Расчет показателей по критерию Лапласа

В случае критерия Вальда и максимаксного критерия потребуются функции МАКС() и МИН(). Полные формулы приведены на рис. 4.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Альтернативы*	*Возможный спрос*					**Максимаксный**
2		***150***	***200***	***250***	***300***	**кр. Вальда**	**кр.**
3	***150***	3000	3000	3000	3000	=МИН(B3:E3)	=МАКС(B3:E3)
4	***200***	1500	4000	4000	4000	=МИН(B4:E4)	=МАКС(B4:E4)
5	***250***	0	2500	5000	5000	=МИН(B5:E5)	=МАКС(B5:E5)
6	***300***	-1500	1000	3500	6000	=МИН(B6:E6)	=МАКС(B6:E6)
7						=МАКС(F3:F6)	=МАКС(G3:G6)

Рис. 4.4. Расчет показателей

Далее рассмотрим процесс составления матрицы рисков и расчета показателей для критерия Сэвиджа (рис. 4.5).

	A	B	C	D	E
1	*Альтернативы*	*Возможный спрос*			
2		***150***	***200***	***250***	***300***
3	***150***	3000	3000	3000	3000
4	***200***	1500	4000	4000	4000
5	***250***	0	2500	5000	5000
6	***300***	-1500	1000	3500	6000
7		=МАКС(B3:B6)	=МАКС(C3:C6)	=МАКС(D3:D6)	=МАКС(E3:E6)
8					
9	Матрица рисков				
10	*Альтернативы*	*Возможный спрос*			
11		***150***	***200***	***250***	***300***
12	***150***	=\$B\$7-B3	=\$C\$7-C3	=\$D\$7-D3	=\$E\$7-E3
13	***200***	=\$B\$7-B4	=\$C\$7-C4	=\$D\$7-D4	=\$E\$7-E4
14	***250***	=\$B\$7-B5	=\$C\$7-C5	=\$D\$7-D5	=\$E\$7-E5
15	***300***	=\$B\$7-B6	=\$C\$7-C6	=\$D\$7-D6	=\$E\$7-E6

Рис. 4.5. Построение матрицы рисков

Расчет показателей для критерия Гурвица при α = 0,3 представлен на рис. 4.6.

	A	B	C	D	E	F
1 2	*Альтернативы*	v_i	m_i	αv_i	$(1-\alpha)m_i$	h_i
3	***150***	3000	3000	=0,3*B3	=0,7*C3	=D3+E3
4	***200***	1500	4000	=0,3*B4	=0,7*C4	=D4+E4
5	***250***	0	5000	=0,3*B5	=0,7*C5	=D5+E5
6	***300***	-1500	6000	=0,3*B6	=0,7*C6	=D6+E6

Рис. 4.6. Расчет показателей для критерия Гурвица

Тема 5. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

5.1. Основные определения

Необходимость введения нечетких множеств (НМ) обоснована тем, что по мере роста сложности систем падает наша способность делать точные и значащие утверждения относительно поведения системы.

Пусть U – универсальное множество объектов; A – конечное размытое подмножество U и $A = \{(u_i \mid \mu(u_i))\}$ где $u_i \in U$ и $\mu(u_i)$– мера членства, которая указывает на степень принадлежности к множеству U. Если $(u_i) = \{0,1\}$, то $\mu(u_i)$ – обычная булева функция.

Лингвистические переменные

Лингвистическая переменная (ЛП) – переменная, заданная на некоторой количественной шкале и принимающая значения в виде слов и словосочетаний естественного языка.

Значение ЛП описывается нечеткими переменными. Любая ЛП связана с конкретной количественной шкалой. Эта шкала называется базовой. Масштаб шкалы может быть любой.

Лингвистические переменные «верно», «совершенно верно», «не вполне верно» могут рассматриваться как метки размытых множеств (табл. 5.1, 5.2).

Таблица 5.1

Лингвистические переменные

	Классические системы	В размытом множестве
Предикаты	«Истинно» и «ложно»	«Высокий», «большой», «скоро» и т.д.
Модификатор предиктов	Отрицание	«Очень», «более или менее», «вполне»
Кванторы	Существования, всеобщности	«Несколько», «главным образом», «почти всегда»

Таблица 5.2

Лингвистическая переменная «высокий»

Рост	$\mu_A(u_i)$
2.20	1
2.10	1
2.00	0.8
1.90	0.6
1.80	0.4
1.70	0.2
1.60	0.0

Отличие $\mu_A(u_i)$ от функции распределения случайной величины: μ– функция, определяющая субъективное мнение специалиста, а функция распределения – это объективный закон, независимый от отношения специалиста к этому явлению.

Определение: $P(x_1,\ldots,x_n) \to B$ – предикат, где B – множество булевых переменных.

Определение: $\varphi\sim = (X, F\sim)$ – нечеткое отношение, где X – множество, $F\sim$ – нечеткое подмножество X^2. X – область задания, $F\sim$ – нечеткий график отношения.

Способы задания отношений: теоретико-множественный, матричный, графический и с помощью нечетких предикатов.

Теоретико-множественный: перечисление $X = \{X_i\}$ и задание $F\sim\ = \{\mu_F(x_i, x_j), (x_i, x_j)\}$, где $(x_i, x_j) \in X^2$.

Матричный: задается матрица смежности R_φ, где на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца стоит $r_{ij} = \mu_F(x_i, x_j)$.

Можно задать $\varphi\sim$ в виде графа с множеством вершин *X*, дугами (x_i, x_j), которым приписано $\mu_F(x_i, x_j)$.

$\varphi\sim = (X, F\sim)$ – нечеткое отношение, если $_F(a,b) \in F$; $a, b \in F$; то *a* $\varphi\sim$ b – нечеткое логическое высказывание, значение истинности которого $\mu_F(a,b)$.

Пример 5.1.1. Теоретико-множественное задание отношения «любит».

Таблица 5.3

Лингвистическая переменная «любит»

Имя	Имя	$\mu(u_i)$
Джим	Ирен	1
Джон	Томи	0.7
Джон	Мэри	0.6
Гарри	Джейн	0.4
Джейн	Том	0.2
Ирен	Джим	0.9
Томи	Джон	0.8

Операции над нечеткими множествами

1. $A \subset B \quad \mu_A(u_i) \le \mu_B(u_i), \forall u_i \in U$ – отношение вложения.
2. $\mu_A(u_i) = 1 - \mu_A(u_i), \forall u_i \in U$ – отношение дополнения.
3. $\mu_{A\cap B}(u_i) = \mu_A(u_i) \cap \mu_B(u_i)$ или $min\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}$ – пересечение нечетких множеств.
4. $\mu_{A\cup B}(u_i) = \mu_A(u_i) \cup \mu_B(u_i)$ или $max\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}$ – объединение множеств *A* и *B*.
5. $\mu_{A^\alpha}(u_i) = \mu_A^\alpha(u_i), \forall u_i \in U$ – операция степени α нечеткого множества *A*.

Бинарные операции:

$$\mu_{A\cdot B}(u_i) = \mu_A(u_i) \cdot \mu_B(u_i) \text{ – алгебраическое произведение;}$$

$$\mu_{A\ \ B}(u_i) = \mu_A(u_i) + \mu_B(u_i) - \mu_A(u_i) \cdot \mu_B(u_i) \text{ – алгебраическая сумма.}$$

Пример 5.1.2. Пусть имеется универсальное множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. В результате опроса 10 экспертов значения x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 относительно явлений *A*, *B*, *C* набрали соответственно $A_1 = 6, A_2 = 3, A_3 = 2, A_4 = 0, A_5 = 4, B_1 = 8, B_2 = 5, B_3 = 3, \quad B_4 = 1, B_5 = 7, C_1 = 1,$ $C_1 = 1, C_2 = 6, C_3 = 1, C_4 = 2, C_5 = 5$ голосов. В итоге мы получим следующие нечеткие множества:

$$A = \{(x_1|0{,}6), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}2), (x_4|0), (x_5 \vee 0{,}4)\},$$

$$B = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}3), (x_4|0{,}1), (x_5 \vee 0{,}7)\},$$

$$C = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}6), (x_3|0{,}1), (x_4|0{,}2), (x_5 \vee 0{,}5)\}.$$

Заметим, что для нечетких множеств *A* и *B* выполняется включение $A \subset B$, так как $\mu_A(x_i) \le \mu_B(x_i), \forall x_i \in X$. Рассмотрим операции над нечеткими множествами *A* и *C*:

$$A \cup C = \{(x_1|0{,}6), (x_2|0{,}6), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2), (x_5|0{,}5)\},$$

$$A \cap C = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}1), (x_4|0), (x_5|0{,}4)\},$$

$$\overline{A} = \{(x_1|0{,}4), (x_2|0{,}7), (x_3|0{,}8), (x_4|1), (x_5|0{,}6)\}.$$

Нечеткие числа

Нечеткие числа используются для обозначения неточно определяемой величины, такой, как «около 5». *Нечеткое число* – это любое подмножество $M = \{(x \mid \mu(x))\}$, где x – число на прямой R и $\mu(x) \in [0,1]$. Два числа равны, если их меры членства равны.

Нечеткое число может быть представлено в дискретной или непрерывной форме.

5.2. Трапезоидное нечеткое число

Исследуем некоторую квазистатистику и зададим лингвистическую переменную Ω = **«Значение параметра *U*»**, где U – множество значений носителя квазистатистики. Выделим два терм-множества значений: T_1 = «U лежит *в диапазоне примерно* от a до b» с нечетким подмножеством M_1 и безымянным значением T_2 с нечетким подмножеством M_2, причем выполняется $M_2 = \neg M_1$. Тогда функция принадлежности $\mu_{T_1}(u)$ имеет трапезоидный вид, как показано на рис. 5.1.

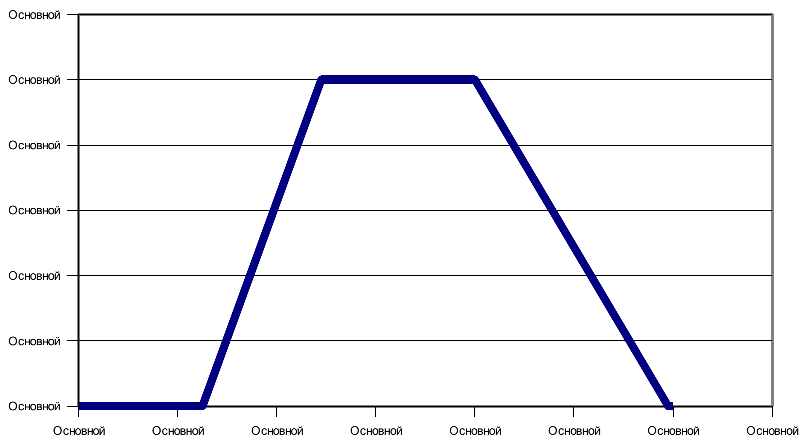


Рис. 5.1. Функция принадлежности трапезоидного нечеткого числа

Поскольку границы интервала заданы нечетко, то разумно ввести абсциссы вершин трапеции следующим образом:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}, b = \frac{b_1 + b_2}{2},$$

при этом отставание вершин a_1, a_2 и b_1, b_2 и соответственно друг от друга обусловлено семантикой, которую мы вкладываем в понятие «*примерно*»: чем больше разброс квазистатистики, тем боковые ребра трапеции являются более пологими. В предельном случае понятие «примерно» выражается понятием «*где угодно*».

Если мы оцениваем параметр качественно, например: «Это значение параметра является *средним*», необходимо ввести уточняющее высказывание типа «*Среднее* значение – это *примерно* от a до b», которое есть предмет экспертной оценки (нечеткой классификации), и тогда можно использовать для моделирования нечетких классификаций трапезоидные числа. На самом деле, это самый естественный способ неуверенной классификации.

5.3. Треугольные нечеткие числа

Теперь для той же лингвистической переменной зададим терм-множество $T_1 = \{U$ *приблизительно равно* $a\}$. Ясно, что $a \pm \delta \approx a$, причем по мере убывания δ до нуля степень уверенности в оценке растет до единицы. Это с точки зрения функции принадлежности придает последней треугольный вид (рис. 5.2), причем степень приближения характеризуется экспертом.

Треугольные числа – это самый часто используемый на практике тип нечетких чисел, причем чаще всего – в качестве прогнозных значений параметра.

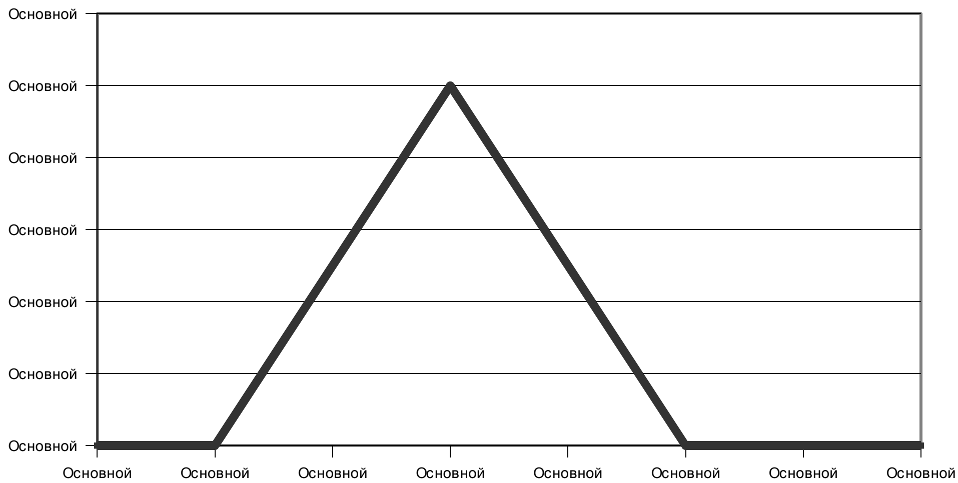


Рис. 5.2. Функция принадлежности треугольного нечеткого числа

Операции над нечеткими числами

Целый раздел теории нечетких множеств – мягкие вычисления (нечеткая арифметика) – вводит набор операций над нечеткими числами. Эти операции вводятся через операции над функциями принадлежности на основе так называемого **сегментного принципа**.

Определим *уровень принадлежности* α как ординату функции принадлежности нечеткого числа. Тогда пересечение функции принадлежности с нечетким числом дает пару значений, которые принято называть *границами интервала достоверности*.

Зададим фиксированный уровень принадлежности α и определим соответствующие ему интервалы достоверности по двум нечетким числам A и B: $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ соответственно. Тогда основные операции с нечеткими числами сводятся к операциям с их интервалами достоверности. А операции с интервалами, в свою очередь, выражаются через операции с действительными числами – границами интервалов:

- операция «сложения»:

$$[a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

- операция «вычитания»:

$$[a_1, a_2](-)[b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$

- операция «умножения»:

$$[a_1, a_2](\times)[b_1, b_2] = [a_1 \times b_1, a_2 \times b \times b_2],$$

- операция «деления»:

$$[a_1, a_2](/)[b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1],$$

- операция «возведения в степень»:

$$[a_1, a_2](^\wedge)i = [a_1^i, a_2^i].$$

Из существа операций с трапезоидными числами можно сделать ряд важных утверждений (без доказательства):

- действительное число есть частный случай треугольного нечеткого числа;
- сумма треугольных чисел есть треугольное число;
- треугольное (трапезоидное) число, умноженное на действительное число, есть треугольное (трапезоидное) число;
- сумма трапезоидных чисел есть трапезоидное число;
- сумма треугольного и трапезоидного чисел есть трапезоидное число.

Анализируя свойства нелинейных операций с нечеткими числами (например, деления), исследователи приходят к выводу, что форма функций принадлежности результирующих нечетких чисел часто близка к треугольной. Это позволяет аппроксимировать результат, приводя его к треугольному виду. И, если приводимость налицо, тогда *операции с треугольными числами сводятся к операциям с абсциссами вершин их функций принадлежности*.

Другими словами, если мы вводим описание треугольного числа набором абсцисс вершин (a, b, c), то можно записать:

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Это самое распространенное правило мягких вычислений.

5.4. Метод анализа иерархий

Оценку вариантов решений методом анализа иерархий покажем на иллюстративном примере «Переправа через реку».

Требуется определить: оставить на реке паромную переправу или вместо нее построить мост или туннель.

Возможные решения оцениваются по трем критериям: экономическому, социальному и экологическому. Каждый критерий оценивается по критериям низкого уровня.

Структурный граф процесса принятия решения с указанием уровня иерархий и оценками + и – , указывающими, способствует или препятствует данный фактор решению задачи, показан на рис. 5.3.

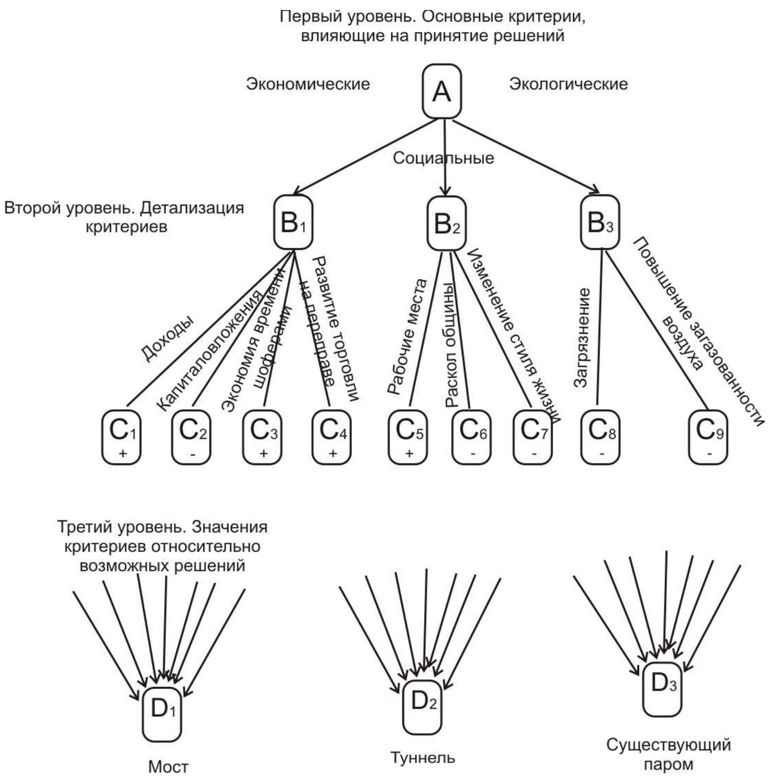


Рис. 5.3. Иерархии

Возможные варианты решений определены в постановке задачи. Значения критериев первого уровня показаны в табл. 5.4 и 5.5.

Таблица 5.4

Значения критериев первого уровня

Критерий	Дуга	Оценка
Экономический	AB_1	Очень важно
Социальный	AB_2	Важно
Экологический	AB_3	Имеют некоторое значение

Таблица 5.5

Значения критериев первого уровня

Критерий	Дуга	Оценка	Критерий	Дуга
Экономический	AB_1	Важнее чем	Социальный	AB_2
Экономический	AB_1	Существенно важнее чем	Экологический	AB_3
Социальный	AB_2	Важнее чем	Экологический	AB_3

Не будем обсуждать, каким образом получены значения «весов» критериев. Будем считать, что ЛПР (лица, принимающие решения) определили их и ввели в систему поддержки принятия решений в соответствии со своими предпочтениями.

Таблица 5.6

Лингвистическая переменная «Степень разрушения»

Степень разрушения (-)	Значения ЛП (+)	$\mu_A(u_i)$
Очень слабый	Очень плохо	0
Слабый	Плохо	0.25
Средний	Удовлетворительно	0.5
Сильный	Хорошо	0.75
Очень сильный	Отлично	1

Таблица 5.7

Критерии второго уровня

Критерий	Дуга	Оценка	Критерий	Дуга
Доходы	B_1C_1	Одинаково важно	Капиталовложения	B_1C_2
Доходы	B_1C_1	Значительно важнее	Экономия времени водителя	B_1C_3
Доходы	B_1C_1	Несравненно важнее	Развитие торговли	B_1C_4
Капиталовложения	B_1C_2	Значительно важнее	Экономия времени водителя	B_1C_3
Капиталовложения	B_1C_2	Несравненно важнее	Развитие торговли	B_1C_4
Экономия времени водителя	B_1C_3	Значительно важнее	Развитие торговли	B_1C_4

Необходимо сопоставить предпочтения ЛПР на последнем уровне. Обозначим все пути, в частности, дуги l_{ij} через $\pi(l_{ij})$. Для таблиц 5.5, 5.6:

$$\pi(l_{ij}) = \frac{\mu_A(l_{ij})}{\sum_j \mu_A(l_{ij})},$$

для табл. 5.5 $\mu_A(AB_1) = 1, \mu_A(AB_2) = 0{,}75, \mu_A(AB_3) = 0{,}25.$ Система поддержки принятия решений находит $\pi(AB_1) = 0{,}5, \pi(AB_2) = 0{,}375, \pi(AB_3) = 0{,}125.$

Сложнее определить веса критерия, когда производится попарное сравнение весов (значимости) различных критериев, как это сделано в табл. 5.6, 5.7. Сложность заключается в несогласованности оценок. Самым точным методом является нахождение главного собственного вектора матрицы, который после нормализации становится вектором приоритетов. Рассмотрим более простой метод. Представим количественные сравнения пар объектов матрицей $A = (a_{ij}), (i, j = 1,2,\ldots,n),$ где a_{ij} показывает оценку отношения между *i*-м и *j*-м объектами. Элементы матрицы обладают следующими свойствами: если $a_{ij} = b,$ то $a_{ji} = \frac{1}{b}, a_{ii} = 1.$ Суммируем элементы каждой строки и нормализуем делением каждой суммы на сумму элементов. Сумма полученных результатов будет равна 1. Первый элемент результирующего вектора будет весом приоритета первого объекта, второй – второго и т.д., как это показано в табл. 5.8, при использовании значений лингвистических переменных (табл. 5.9).

Таблица 5.8

Критерии третьего уровня

Критерии	Дуги	Знаки	Оценки
Доход от моста	C_1D_1	+	Хорошо
Доход от туннеля	C_1D_2	+	Отлично
Доход от парома	C_1D_3	+	Плохо
Капиталовложения в мост	C_2D_1	+ (–)	Хорошо
Капиталовложения в туннель	C_2D_2	+ (–)	Очень плохо
Капиталовложения в паром	C_2D_3	+ (–)	Отлично
Экономия времени шофера от моста	C_3D_1	+	Отлично
Экономия времени шофера от переправы	C_3D_2	+	Хорошо
Экономия времени шофера от парома	C_3D_3	+	Очень плохо
Развитие торговли на мосту	C_4D_1	+	Отлично
Развитие торговли в туннеле	C_4D_2	+	Очень плохо
Развитие торговли на пароме	C_4D_3	+	Плохо
Новые рабочие места при строительстве моста	C_5D_1	+	Удовлетворительно
Новые рабочие места при строительстве туннеля	C_5D_2	+	Хорошо
Новые рабочие места при существующем пароме	C_5D_3	+	Очень плохо

Критерии	Дуги	Знаки	Оценки
Раскол общины от строительства моста	C_6D_1	–	Сильно
Раскол общины от строительства туннеля	C_6D_2	–	Сильно
Раскол общины при существующем пароме	C_6D_3	–	Слабо
Изменение стиля жизни при строительстве моста	C_7D_1	–	Сильно
Изменение стиля жизни при строительстве туннеля	C_7D_2	–	Сильно
Изменение стиля при существующем пароме	C_7D_3	–	Очень слабо
Загрязнение воды от моста	C_8D_1	–	Сильно
Загрязнение воды от туннеля	C_8D_2	–	Средне
Загрязнение воды от парома	C_8D_3	–	Средне
Повышение загазованности при движении машин на мосту	C_9D_1	–	Сильно
Повышение загазованности при движении по туннелю	C_9D_2	–	Средне
Повышение загазованности при движении машин по парому	C_9D_3	–	Слабо

Стоит заметить, что в табл. 5.8 знаки «–» дуг C_2D_1 ,C_2D_2 и C_2D_3 взяты в скобки, являясь указанием на то, что введена инверсная оценка: чем меньше сумма капиталовложений, тем лучше, а, следовательно, и больше значение ЛП.

Таблица 5.9

Матрица попарных сравнений

	AB_1	AB_2	AB_3	Σ	Веса приоритетов π
AB_1	1	2	3	6	0,53
AB_2	$\frac{1}{2}$	1	2	3,5	0,31
AB_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1,83	0,16

Таблица 5.10

Значения лингвистических переменных

Значения лингвистических переменных		$\mu_A(u_i)$
α эквивалентно β	α и β одинаково важны	1
α несколько предпочтительнее β	α важнее β	2
α существенно предпочтительнее β	α существенно важнее β	3
α очень сильно предпочтительнее β	α значительно важнее β	4
α несравненно предпочтительнее β	α несравненно важнее β	5

Аналогично СППР находит веса приоритетов второго уровня.

$$(B_1C_1) \approx 0{,}377, (B_1C_2) \approx 0{,}377, (B_1C_3) \approx 0{,}189; (B_1C_4) \approx 0{,}057,$$

$$(B_2C_5) \approx 0{,}60, (B_2C_6) \approx 0{,}19, (B_2C_7) \approx 0{,}21,$$

$$(B_3C_8) \approx 0{,}8, (B_3C_9) \approx 0{,}2.$$

Промежуточные вычисления представлены в табл. 5.11–5.15.

Таблица 5.11

Критерии

Критерий	Дуга	Оценка	Критерий	Дуга
Рабочие места	B_2C_5	Значительно важнее	Раскол общины	B_2C_6
Рабочие места	B_2C_5	Важнее	Изменение стиля жизни	B_2C_7
Раскол общины	B_2C_6	Одинаково важно	Изменение стиля жизни	B_2C_7

Таблица 5.12

Критерии

Критерий	Дуга	Оценка	Критерий	Дуга
Загрязнение воды	B_3C_8	Значительно важнее	Повышение загазованности	B_3C_9

Таблица 5.13

Матрица попарных сравнений

	B_1C_1	B_1C_2	B_1C_3	B_1C_4	Веса приоритетов
B_1C_1	1	1	4	5	0,377
B_1C_2	1	1	4	5	0,377
B_1C_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	4	0,189
B_1C_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	1	0,057

Таблица 5.14

Матрица попарных сравнений

	B_2C_5	B_2C_6	B_2C_7	Веса приоритетов
B_2C_5	1	4	2	0,60
B_2C_6	$\frac{1}{4}$	1	1	0,19
B_2C_7	$\frac{1}{2}$	1	1	0,21

Таблица 5.15

Матрица попарных сравнений

	B_3C_8	B_3C_9	Веса приоритетов
B_3C_8	1	4	0,8
B_3C_9	$\frac{1}{4}$	1	0,2

Веса приоритетов второго уровня в графе являются уточнением влияния соответствующих факторов на принятие решения. Но они представляют интерес только с учетом весов первого уровня. Для нахождения весов путей, состоящих из дуг первого и второго уровней, надо умножить вес дуги первого уровня на веса примыкающих к ней дуг второго уровня. Таким образом, вес пути из дуг первого и второго уровней:

$$\pi(l_{1i}, l_{ij}) = \pi(l_{1i}) \times \pi(l_{ij}),$$

где l_{1i} – дуга первого уровня, l_{ij} – дуга второго уровня $(i = 1, \ldots, n), (j = 1, \ldots, m)$.

Аналогично рассчитываются веса дуг следующих уровней.

$$\pi(AB_1C_1) = \pi(AB_1) \times \pi(B_1C_1) \approx 0.53 \times 0.377 \approx 0.20,$$

$$\pi(AB_1C_2) = \pi(AB_1) \times \pi(B_1C_2) \approx 0.53 \times 0.377 \approx 0.20,$$

$$\pi(AB_1C_3) = \pi(AB_1) \times \pi(B_1C_3) \approx 0{,}53 \times 0{,}189 \approx 0.10,$$

$$\pi(AB_1C_4) = \pi(AB_1) \times \pi(B_1C_4) \approx 0.53 \times 0.057 \approx 0.03,$$

$$\pi(AB_2C_5) = \pi(AB_2) \times \pi(B_2C_5) \approx 0.31 \times 0.60 \approx 0.19,$$

$$\pi(AB_2C_6) = \pi(AB_2) \times \pi(B_2C_6) \approx 0.31 \times 0.19 \approx 0.06,$$

$$\pi(AB_2C_7) = \pi(AB_2) \times \pi(B_2C_7) \approx 0.31 \times 0.21 \approx 0.07,$$

$$\pi(AB_3C_8) = \pi(AB_3) \times \pi(B_3C_8) \approx 0.16 \times 0.8 \approx 0.13,$$

$$\pi(AB_3C_9) = \pi(AB_3) \times \pi(B_3C_9) \approx 0.16 \times 0.2 \approx 0.03.$$

Оценка решений есть результат умножения матрицы весов дуг последнего уровня на вектор весов приоритетов вершин предпоследнего уровня графа.

$$\begin{bmatrix} \pm\pi(l_{11}) \pm \pi(l_{21}) \ldots \pm \pi(l_{n1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\pi(l_{1m}) \pm \pi(l_{2m}) \ldots \pm \pi(l_{nm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(l_{1i}, l_{i1}) \\ \ldots \\ \pi(l_{1k}, l_{kn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi(D_1) \\ \ldots \\ \chi(D_m) \end{bmatrix},$$

где $(\pm\pi(l_{ij})$ – вес дуги, связывающей вершину i с вершиной последующего уровня j, $\pi(l_{1r}, l_{rj})$ – вес дуги, оканчивающейся в j-й вершине предпоследнего уровня графа, фактически вес пути в графе, начинающийся с исходной вершины и кончающийся в j-й вершине предпоследнего уровня. $\chi(D_p)$ – вес p-й конечной вершины (p-го варианта решения).

Таким образом, для нашей задачи имеем:

$$\begin{bmatrix} +\pi(C_1D_1) & +\pi(C_2D_1) & \ldots & -\pi(C_9D_1) \\ +\pi(C_1D_2) & +\pi(C_2D_2) & \ldots & -\pi(C_9D_2) \\ +\pi(C_1D_3) & +\pi(C_2D_3) & \ldots & -\pi(C_9D_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi(AB_1, B_1C_1) \\ \pi(AB_1, B_1C_2) \\ \ldots \\ \pi(AB_2, B_2C_5) \\ \ldots \\ \pi(AB_3, B_3C_8) \\ \pi(AB_3, B_3C_9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi(D_1) \\ \chi(D_2) \\ \chi(D_3) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0.750.751.001.000.50-0.75-0.75-0.75-0.75 \\ 1.000.000.750.000.75-0.75-0.75-0.50-0.50 \\ 0.251.000.000.250.00-0.250.00-0.50-0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.20 \\ 0.10 \\ 0.03 \\ 0.19 \\ 0.06 \\ 0.07 \\ 0.13 \\ 0.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3075 \\ 0.24 \\ 0.17 \end{bmatrix},$$

Таким образом, самым предпочтительным вариантом является – строительство моста.

Если эксперту удалось свести задачу выбора лучшего решения к иерархической, то можно использовать описанный метод.

Задачи для самостоятельного решения

Индивидуальные задания по теме «Составление экономико-математических моделей»

1. Кондитерская фабрика выпускает конфеты трех видов «Птичье молоко», «Пионерский костер», «Марсианка», используя четыре вида сырья (агар-агар, патока, сахар, какао). Нормы расхода сырья на производство 1 кг конфет, а также прибыль от реализации 1 кг конфет каждого вида приведены в таблице:

Сырье	Нормы расхода сырья			Запасы сырья
	Птичье молоко	Пионерский костер	Марсианка	
Агар-агар	3	0	0	45
Патока	2	4	3	60
Сахар	2	3	5	65
Какао	4	6	3	70
Прибыль	8	5	4	

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

2. Имеется два вида детского яблочного пюре «Gerber» и «ФрутоНяня», содержащие следующие вещества: белки, углеводы, жиры, калий, витамин С. Стоимость 100 грамм пюре

соответственно равна 56 и 36 рублей. Данные по содержанию веществ в 100 граммах пюре и их необходимый минимум приведены в таблице:

Вещества	Необходимый минимум	В 100 граммах пюре	
		Gerber	ФрутоНяня
Белки	5	0,6	0,3
Углеводы	40	12	16
Жиры	10	0,7	0,5
Калий	8	2	1,5
Витамин С	6	0,7	0,4

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание веществ было бы не меньше нормы.

3. Завод по производству автомобилей, состоящий из трех цехов, собирает автомобили трех марок TOYOTA, FORD, HONDA. Производственные мощности цехов по каждому виду автомобилей, а также прибыль от выпуска единицы автомобиля приведены в таблице:

Цех	Производственные мощности цеха	Производственные мощности, необходимые для производства 1 автомобиля		
		TOYOTA	FORD	HONDA
I	200	15	20	17
II	150	30	25	15
III	300	18	20	20
Прибыль		15 000	20 000	18 000

Рассчитайте объемы выпуска автомобилей, обеспечивающих максимальную прибыль.

4. На ферме выращивают лошадей и овец. На ферме имеется 5000 загонов для животных. В одном загоне могут быть либо 2 овцы, либо 1 лошадь. По плану на ферме должно быть не менее 2000 овец и 3000 лошадей. В одни сутки необходимо выдавать каждой овце корма 3 ед., а каждой лошади – 9 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 100 000 ед. корма. От продажи 1 овцы ферма получает прибыль 5 д.е., а от продажи 1 лошади – 25 д.е. Какое количество овец и лошадей нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль.

5. Предприятие имеет месячный план по изготовлению четырех видов продукции в количествах соответственно 5000, 2000, 3000 и 1800 штук. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Суммарное допустимое время для каждой группы станков составляет соответственно 800, 1000, 1500 часов. Данные о техническом процессе указаны в таблице:

№ группы станков	Нормы времени на изготовление одного изделия, час.				Издержки на изготовление одного изделия, д.е.			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	0,5	0,15	0,4	0,6	0,12	0,2	0,3	0,25
2	0,4	0,12	0,2	0,5	0,16	0,14	0,35	0,2
3	0,42	0,14	0,35	0,45	0,17	0,25	0,4	0,3

Распределите изделия по станкам так, чтобы месячная программа была выполнена при наименьших издержках.

6. Для изготовления трех видов изделий P_1, P_2, P_3 используют четыре вида материалов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы материалов, технологические нормы расходов материалов на каждое изделие и цена единицы изделия приведены в таблице:

Материалы	Норма расхода материалов на одно изделие, шт.			Запасы материалов, шт.
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	0	3	12 000
S_2	6	1	7	14 000
S_3	12	7	0	15 000
S_4	0	11	5	10 000
Цена одного изделия, руб.	180	200	150	

Необходимо составить план выпуска изделий, обеспечивающий их максимальный выпуск по стоимости.

7. Для участия в спортивных состязаниях тренер должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по плаванию на короткие, средние и дальние дистанции. В плавании на короткую дистанцию должны участвовать 3 спортсмена, в плавании на среднюю дистанцию – 5 спортсменов, в плавании на дальние дистанции – не более 8. Количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в таблице:

Разряд	Короткая дистанция	Средняя дистанция	Дальняя дистанция
1	8	6	8
2	5	4	6

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 8 спортсменов.

8. Завод по переработке нефти имеет в наличии 150 000 тонн нефти первого сорта и 200 000 тонн нефти второго сорта. Из тонны нефти можно получить 30% дизтоплива, 24% бензина, 11% авиатоплива, 8% газа, 17% мазута. Процентное соотношение сортов нефти в каждом типе нефтепродуктов, а также прибыль от реализации 1 тонны нефтепродуктов приведены ниже:

Нефтепродукты	Нефть 1-го сорта, %	Нефть 2-го сорта, %	Прибыль, руб.
Дизтопливо	30	70	50 000
Бензин	60	40	60 000
Авиатопливо	80	20	100 000
Газ	50	50	150 000
Мазут	10	90	30 000

Составить план производства нефтепродуктов, обеспечивающий максимальную прибыль

9. На заводе используются электрические станки двух видов: P_1, P_2. Станок P_1 изготавливает 30 деталей в час, при этом вероятность того, что деталь окажется бракованной, составляет 9%. Станок P_2 изготавливает 40 деталей в час, при этом вероятность брака для него 3%.

Расходы на обслуживание станков составляют 8 и 6 д.е. в день соответственно. В случае изготовления бракованной детали фабрика несет убыток в размере 60 д.е. Могут быть закуплены не более 12 станков P_1 и не более 8 станков P_2 . Определите оптимальное количество станков P_1, P_2 , при котором затраты будут минимальными, учитывая, что за 8-часовой рабочий день фабрика должна изготовить не менее 3000 деталей.

10. Ферма занимается разведением крупного рогатого скота. В дневном рационе животных должны содержаться следующие питательные вещества: кормовых единиц − не менее 2 кг; протеина − не менее 300 г; каротина − не менее 20 мг. При откорме используют овес, ячмень, сою. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого из кормов и стоимость 1 кг кормов приведены ниже:

Питательное вещество	Количество единиц питательного вещества в 1 кг корма		
	овес	ячмень	соя
Кормовые единицы, кг	0,5	0,8	0,9
Протеин, г	100	80	150
Каротин, мг	10	15	20
Цена 1 кг корма, центы	20	30	40

Необходимо составить дневной рацион минимальной стоимости, удовлетворяющий требованиям содержания питательных веществ.

Индивидуальные задания по теме «Графический метод»

Решить задачи графическим методом и с помощью надстройки Поиск решения MS Excel.

1. $z = 3x_1 - 2x_2 \to max \ (min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -11 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $z = -3x_1 + 6x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \ge -13 \\ -x_1 - x_2 \ge -6 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 3 \end{cases}$$

3. $z = -2x_1 - 6x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 \ge -36 \\ x_1 + 3x_2 \le 21 \\ -7x_1 + x_2 \ge -37 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $z = -8x_1 + 3x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ -x_1 - x_2 \ge -7 \\ 9x_1 + 4x_2 \ge 11 \end{cases}$$

5. $z = -5x_1 + 5x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -14 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 33 \\ -5x_1 + 2x_2 \ge -24 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -22 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 14 \end{cases}$$

7. $z = x_1 - 6x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 \ge -34 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23 \\ -x_1 + 2x_2 \ge -5 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge -6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $z = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -18 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 8 \end{cases}$$

9. $z = 3x_1 - 3x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 \ge -37 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 26 \\ -2x_1 - 2x_2 \ge -20 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $z = 5x_1 - 9x_2 \rightarrow max(min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 22 \\ -8x_1 + 3x_2 \ge -36 \\ 9x_1 + 8x_2 \ge -5 \end{cases}$$

11. $z = 2x_1 + x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 \ge -37 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ -9x_1 + 4x_2 \ge -38 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge -7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12. $z = -4x_1 + 3x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \ge -20 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 9x_1 + 5x_2 \ge -16 \end{cases}$$

13. $z = -2x_1 + 4x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \ge -23 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 37 \\ -8x_1 + 5x_2 \ge -23 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge -7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

14. $z = x_1 + x_2 \to max \quad (min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge -9 \\ -7x_1 + 5x_2 \ge -32 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge -7 \end{cases}$$

15. $z = 2x_1 + x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 29 \\ -2x_1 - x_2 \ge -12 \\ 4x_1 + 7x_2 \ge -5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

16. $z = 6x_1 + 5x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge -6 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -17 \\ 5x_1 + 7x_2 \ge 18 \end{cases}$$

17. $z = 3x_1 + 2x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -7 \\ 3x_1 + x_2 \le 24 \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -19 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

18. $z = 7x_1 + 5x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -22 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 14 \end{cases}$$

19. $z = 6x_1 - 3x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -15 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 39 \\ -6x_1 + 7x_2 \ge -33 \\ 6x_1 + 5x_2 \ge -3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

20. $z = 7x_1 + 4x_2 \to max(min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -5 \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -15 \\ 5x_1 + x_2 \ge -5 \end{cases}$$

Индивидуальные задания по теме «Транспортная задача»

1. На двух складах находятся 140 и 90 тонн топлива соответственно. Трем автозаправочным станциям требуется соответственно 50, 80, 100 тонн горючего. Стоимость перевозки 1 тонны топлива из первого склада на первую, вторую и третью автозаправочную станцию 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 тонну соответственно, а из второго склада – 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 тонну соответственно. Необходимо составить план перевозок топлива, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

2. На трех посевных полях ежедневно собирается 120, 180 и 90 тонн зерна. Это зерно потребляется четырьмя хлебокомбинатами, ежедневные потребности которых равны соответственно 70, 80, 160 и 90 т. Тарифы перевозок 1 тонны зерна с посевных полей к каждому из хлебокомбинатов задаются матрицей: $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 97 \\ 4 & 6 & 212 \\ 3 & 5 & 89 \end{pmatrix}$. Необходимо составить такой план доставки зерна, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

3. Три завода A_1, A_2, A_3 заготавливают древесину. Древесина поставляется мебельным фабрикам B_1, B_2, B_3, B_4 для производства мебели. В таблице указаны: объем заготовок, потребности, стоимость перевозки единицы продукции.

Заводы	Мебельные фабрики				Объем заготовок
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	26	47	25	20	48
A_2	10	40	43	6	28
A_3	9	34	46	15	71
Потребности	47	81	25	44	

Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна.

4. Для строительства четырех дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров равны 120, 280 и 160 усл. ед. соответственно. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог равны 130, 220, 60 и 70 усл. ед. соответственно. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого карьера каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 95 \\ 4 & 2 & 68 \\ 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

5. Три фирмы производят некоторую однородную продукцию в количестве 180, 350 и 20 ед. соответственно. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количестве 110, 90, 120, 80 и 150 ед. соответственно. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 465 \\ 1 & 8 & 653 \\ 6 & 13 & 874 \end{pmatrix}$.

Необходимо составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

6. На четырех складах хранятся фрукты в количестве 50, 60, 45 и 65 тонн соответственно, которые необходимо вывезти трем магазинам. Каждый магазин должен получить фрукты в количестве 100, 80 и 40 т соответственно. Со второго склада фрукты не вывозятся в третий магазин, а с четвертого склада – во второй. Стоимость перевозки 1 т фруктов с каждого из складов в соответствующие магазины задана матрицей $C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

7. Груз доставляется в пункты 1, 2, 3, и 4 в количестве 30, 40, 50 и 60 единиц со складов A, B, C и E, в которых находился данный груз в количестве 20, 40, 50 и 70 единиц. Стоимость перевозки единицы груза от каждого поставщика каждому потребителю задана матрицей $C = 5\begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозки груза минимальна.

8. На складах A, B, C находится груз 100, 150, 250 т, который нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100 т, пункту 3 – 200 т, пункту 4 – 150 т груза. Стоимость доставки 1 т груза со склада A в указанные пункты равна 80, 30, 50, 20 (д.е.) соответственно; со склада B – 40, 10, 60, 70; со склада C – 10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки груза из условия минимума стоимости перевозки.

9. В резерве трех железнодорожных станций A, B, C находятся 60, 80, 100 вагонов соответственно. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки угля, если пункту 1 необходимо 40 вагонов, пункту 2 – 60 вагонов, пункту 3 – 80 вагонов и пункту 4 – 60 вагонов. Стоимость перегонов одного вагона со станции A в указанные пункты равна 1, 2, 3, 4 д.е. соответственно, со станции B – 4, 3, 2 и 1 д.е., со станции C – 1, 2, 2, 1 д.е.

10. Три завода выпускают автомобили, которые отправляются потребителям. Первый завод поставляет 50 автомобилей, второй – 40 автомобилей, третий – 70 автомобилей. Каждому из потребителей требуется 30, 50, 40 и 40 автомобилей соответственно. Стоимость пере-

возки одного автомобиля от поставщика потребителю задана матрицей стоимостей $C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 11 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Составьте оптимальный план, обеспечивающий общую минимальную стоимость перевозки комбайнов.

Индивидуальные задания по теме «Решение антагонистических игр»

Решить следующие игры графоаналитическим методом.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \\ 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & -6 \\ 5 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -7 \\ -4 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \\ -2 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Индивидуальные задания по теме «Метод анализа иерархий»

1. Отдел кадров сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Сергей (S), Женя (J) и Михаил (M). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (C), опыт работы (O) и рекомендации (P). Отдел кадров использует матрицу A (приведенную ниже для сравнения трех критериев). После проведены собеседования с тремя претендентами, сбор данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям. Построены матрицы A_c, A_o и A_p. Кого из трех кандидатов следует принять на работу? Оценить согласованность данных.

$A_р$	С	Ж	М
С	1	$\frac{1}{2}$	1
Ж	2	1	$\frac{1}{2}$
М	1	2	1

$A_о$	С	Ж	М
С	1	$\frac{1}{3}$	2
Ж	3	1	$\frac{1}{2}$
М	$\frac{1}{2}$	2	1

$A_с$	С	Ж	М
С	1	3	4
Ж	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$
М	$\frac{1}{4}$	5	1

А	С	О	Р
С	1	2	$\frac{1}{4}$
О	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{5}$
Р	4	5	1

$A_д$	Л	Б
Л	1	4
Б	$\frac{1}{4}$	1

2. Костя и Динара Печкины (К и Д) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта A, B, C. Печкины согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы (Б), а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$A_к$	Л	Б
Л	1	$\frac{1}{3}$
Б	3	1
М	1	2

$A_{дл}$	С	Ж	М
А	1	4	2
В	$\frac{1}{4}$	1	3
С	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

$A_{кл}$	A	B	C
A	1	2	3
B	$\frac{1}{2}$	1	2
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$A_{кб}$	A	B	C
A	1	2	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$
C	2	3	1

A	К	Д
К	1	2
Д	$\frac{1}{2}$	1

$A_{дб}$	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	4
B	2	1	3
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

3. Найти веса распределения энергии для нескольких крупных потребителей в соответствии с их общим вкладом в различные цели общества.

Есть три крупных потребителя в США: бытовое потребление (С1), Транспорт (С2) и промышленность (С3). Они составляют низший уровень иерархии. Целями, по отношению к которым оцениваются потребители, являются: вклад в развитие экономики, вклад в качество окружающей среды и вклад в национальную безопасность. Они составляют второй уровень. Матрицы попарных сравнений приведены ниже.

	Развитие экономики	Окружающая среда	Национальная безопасность
Развитие экономики	1	5	3
Окружающая среда	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$
Национальная безопасность	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1

Э	С1	С2	С3
С1	1	3	5
С2	$\frac{1}{3}$	1	2
С3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

ОС	С1	С2	С3
С1	1	2	7
С2	$\frac{1}{2}$	1	5
С3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1

НБ	С1	С2	С3
С1	1	2	3
С2	$\frac{1}{2}$	1	2
С3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

4. На первом уровне иерархии: Общий вклад в развитие.

На втором уровне – железо (Ж), медь (М), фосфаты (Ф).

На третьем уровне: величина ресурса (ВР), стоимость добычи (СД), риск (Р).

Ж	ВР	СД	Р
ВР	1	3	2
СД	1/3	1	3
Р	½	1/3	1

СД	1/3	1	3
Ф	ВР	СД	Р
ВР	1	3	7
СД	1/3	1	5
Р	1/7	1/5	1

щ. вклад	Ж	М	Ф
Ж	1	2	5
М	1/2	1	3
Ф	1/5	1/3	1

М	ВР	СД	Р
ВР	1	3	2
СД	1/3	1	3
Р	1/2	1/3	1

Определить веса элементов третьего уровня.

5. На первом уровне иерархии – влияние в мире.

На втором уровне – людские ресурсы (ЛР), благосостояние (Б), технология (Т), военная мощь (ВМ).

На третьем уровне: США, СССР, Китай.

Влияние в мире	Людские ресур-сы	Благосостояние	Технология	Военная мощь
Людские ресурсы	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	5
Благосостояние	5	1	3	1
Технология	5	$\frac{1}{3}$	1	3
Военная мощь	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	1

ЛР	США	СССР	Китай
США	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
СССР	3	1	$\frac{1}{3}$
Китай	7	3	1

ВМ	США	СССР	Китай
США	1	3	5
СССР	$\frac{1}{3}$	1	5
Китай	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Б	США	СССР	Китай
США	1	5	7
СССР	$\frac{1}{5}$	1	3
Китай	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1

Т	США	СССР	Китай
США	1	3	7
СССР	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
Китай	$\frac{1}{7}$	3	1

6. Аттестация преподавателей в высшей школе.

Первый уровень – аттестация.

Второй уровень – исследовательская работа (ИР), преподавание (П).

Третий уровень (исследовательская работа) – качество (К), разнообразие (Р), количество научных трудов (НТ), важность работы (ВР). Третий уровень (преподавание) – доходчивость (Д), требовательность (Т), правдивость (ПР).

П	Д	Т	ПР
Д	1	5	7
Т	1/5	1	2
ПР	1/7	1/2	1

А	ИР	П
ИР	1	1/3
П	3	1

ИР	К	Р	НТ	ВР
К	1	5	1	5
Р	1/5	1	3	5
НТ	1	1/3	1	3
ВР	1/5	1/5	1/3	1

7. Переправа через реку.

Первый уровень – выгоды переправы через реку.

Второй уровень – экономические (Э), социальные (С), окружающая среда (ОС).

Третий уровень – относятся к экономическим: время (В), доход (Д), торговля (Т).

К социальным: безопасность (Б), связи (СВ). К окружающей среде – комфорт (КО), доступность (ДС).

Четвертый уровень – мост (М), туннель (ТУ), существующий паром (П).

Выгоды	Э	С	ОС
Э	1	1/3	3
С	3	1	3
ОС	1/3	1/3	1

В	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	7
ТУ	1	1	7
П	1/7	1/7	

Э	В	Д	Т
В	1	1/3	2
Д	3	1	3
Т	1/2	1/3	1

Б	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	5
ТУ	1	1	5
П	1/5	1/5	1

ОС	КО	ДС
КО	1	1/2
ДС	2	1

Т	Мост	ТУ	П
Мост	1	3	7
ТУ	1/3	1	5

Д	Мост	ТУ	П
Мост	1	2	1/2
ТУ	1/2	1	3
П	2	1/3	1

КО	Мост	ТУ	П
Мост	1	1/2	5
ТУ	2	1	7
П	1/5	1/7	1

СВ	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	7
ТУ	1	1	7
П	1/7	1/7	1

ДС	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	7
ТУ	1	1	7
П	1/7	1/7	1

С	Б	СВ
Б	1	1/3
СВ	3	1

8. Переправа через реку (2-я часть).

Первый уровень – издержки пересечения реки.

Второй уровень – экономические (Э), социальные (С), окружающая среда (ОС).

Третий уровень – относятся к экономическим: капиталовложения (К), эксплуатация и текущий ремонт (ЭТР), прекращение паромного бизнеса (ППБ).

К социальным: изменение стиля жизни (ИСЖ), раскол людей (РЛ). К окружающей среде – загазованность (З), загрязнение воды (ЗВ).

Издержки	Э	С	ОС
Э	1	5	7
С	1/5	1	3
ОС	1/7	1/3	1

ЭТР	Мост	ТУ	П
Мост	1	2	1/3
ТУ	1/2	1	3
П	3	1/3	1

С	ИСЖ	РЛ
ИСЖ	1	1/3
РЛ	3	1

ИСЖ	Мост	ТУ	П
Мост	1	3	7
ТУ	1/3	1	5
П	1/7	1/5	1

Э	К	ЭТР
К	1	1/3
ЭТР	3	1

РЛ	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	5
ТУ	1	1	5
П	1/5	1/5	1

ОС	З	ЗВ
З	1	1/2
ЗВ	2	1

З	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	7
ТУ	1	1	7
П	1/7	1/7	1

К	Мост	ТУ	П
Мост	1	1	7
ТУ	1	1	7
П	1/7	1/7	1

ЗВ	Мост	ТУ	П
Мост	1	1/2	5
ТУ	2	1	7
П	1/5	1/7	1

9. Первый уровень – качество жизни городского населения.

Второй уровень – уровень жизни (УР), условия жизни (УС).

Третий уровень – К уровню жизни относятся: доходы населения (Дх), социальное обеспечение (СО), жилищные условия (Жу), образование (Об), здравоохранение (Зд); к условиям жизни: здравоохранение (Зд), санитарные условия (Су), условия для проведения досуга (Уд), состояние транспорта (Тр), экология (Эк), психологическое состояние населения (Пх).

Какой из приведенных ниже факторов в наибольшей степени оказывает влияние на уровень жизни					
Уровень жизни	Жилищные условия	Образование	Здравоохранение	Социальное обеспечение	Доходы населения
Жилищные условия	1	2	3	4	7
Образование	$\frac{1}{2}$	1	2	3	9
Здравоохранение	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5
Социальное обеспечение	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	3
Доходы населения	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

Какой из приведенных ниже факторов в наибольшей степени оказывает влияние на условия жизни						
Условия жизни	Санитарные условия	Психологическое состояние населения	Здравоохранение	Условия для проведения досуга	Экология	Состояние транспорта
Санитарные условия	2	3	3	4	4	5
Психологическое состояние населения	$\frac{1}{2}$	1	3	4	5	8
Здравоохранение	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	3	3	4
Условия для проведения досуга	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	2	3
Экология	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Состояние транспорта	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

10. На первом уровне – благосостояние страны.

Второй уровень – сильная экономика (Э), благосостояние (Б), национальная оборона (НО).

Третий уровень – тяжелая промышленность (ТП), легкая промышленность (ЛП), сельское хозяйство (СХ).

Благосостояние	Э	Б	НО
Э	1	3	3
Б	1/3	1	2
НО	1/3	1/2	1

Б	ТП	ЛП	СХ
ТП	1	1/3	3
ЛП	3	1	4
СХ	1/3	1/4	1

Э	ТП	ЛП	СХ
ТП	1	5	7
ЛП	1/5	1	3
СХ	1/7	1/3	1

НО	ТП	ЛП	СХ
ТП	1	3	5
ЛП	1/3	1	7
СХ	1/5	1/7	1

Определить веса отраслей промышленности по влиянию на благосостояние этой страны.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Зайцев, М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие для студ. вузов / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – М.: Дело АНХ, 2008.

2. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. – М., Логос, 2002. – 392 с.

3. Мадера, А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: руководство для будущих топ-менеджеров / А.Г. Мадера. – М.: ЛКИ, 2010. – 688 с.

4. Мазелис, А.Л. Теория принятия решений: учеб.-практ. пособие [для студентов вузов] / А.Л. Мазелис, А.Г. Гузенко. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2013. – 84 с.

5. Орлов, А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений: учебник для студентов вузов / А.И. Орлов. – М.: КНОРУС, 2011.

6. Петровский, А.Б. Теория принятия решений: учебник для студентов вузов / А.Б. Петровский. – М.: Академия, 2009.

Дополнительная литература

7. Мельников, А.Н. Принятие решений в условиях риска [Электронный ресурс] / А.Н. Мельников, И.Х. Хасанов. – Оренбург: ОГУ, 2014. URL: https://lib.rucont.ru/efd/271396

8. Аксенов, А.А. Теория принятия решений: метод. пособие [Электронный ресурс] / А.А. Аксенов, В.А. Скопин. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2015. URL: https://lib.rucont.ru/efd/541634

9. Литвин, Д.Б. Элементы теории игр и нелинейного программирования: учеб. пособие [Электронный ресурс] / Д.Б. Литвин // Сервисшкола. – 2017. – № 84. URL: http://znanium.com/go.php?id=977009