И.А. Терлецкий

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Владивостокский государственный университет»

И.А. Терлецкий

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

Рекомендовано решением учебно-методической комиссии ФГБОУ ВО «Владивостокского государственного университета» в качестве учебного пособия

Владивосток
Издательство ВВГУ
2024

УДК 531/534
ББК 22.2
Т35

Рецензенты: *О.И. Дьяченко*, канд. физ.-мат. наук, доцент, руководитель Инжинирингового центра ФГБОУ ВО «Владивостокский государственный университет»;
А.В. Апанасенко, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. физики, Морской государственный университет им. адмирала Г.И. Невельского

Терлецкий, Игорь Анатольевич
Т35 **Механика :** лабораторный практикум / И.А. Терлецкий ; Владивостокский государственный университет. – Владивосток: Изд-во ВВГУ, 2024. – 64 с.

ISBN 978-5-9736-0736-4

Практикум содержит материал, необходимый для выполнения лабораторных работ по разделу «Механика», предусмотренных рабочими программами по физике ВВГУ. Дано сжатое изложение необходимого теоретического материала, описания лабораторных установок, задания, а также инструкции по выполнению 4 лабораторных работ. Практикум соответствует государственным стандартам по физике для инженерно-технических высших учебных заведений.

Для студентов технических специальностей.

УДК 531/534
ББК 22.2

ISBN 978-5-9736-0736-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ТИПЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Процесс измерения физической величины всегда происходит с некоторой неточностью. Это связано с тем, что измерение одной и той же величины каждый раз происходит при различных условиях, и их изменение полностью определить невозможно. Поэтому в каждом измерении результат может получаться разным. Для количественной оценки проведенного измерения вводят понятие «погрешность измерения» – разница между результатом измерения x и истинным значением $x_и$:

$$\Delta x = x - x_и . \qquad (1)$$

Величину Δx называют абсолютной погрешностью (погрешность, выраженная в тех же единицах измерения, что и измеряемая величина).

Относительная погрешность измерения определяется отношением абсолютной погрешности измерения к истинному значению:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_и} . \qquad (2)$$

Относительная погрешность определяется в долях или процентах.

Погрешности измерений могут различаться по степени возможности их оценивания: систематические, случайные и грубые.

Грубая погрешность – случайная погрешность результата отдельного наблюдения, резко отличающегося от остальных результатов. При обработке результатов измерений одной и той же физической величины результаты с заметными грубыми погрешностями отбрасываются.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности результатов измерений, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторении измерений одной и той же физической величины. Систематические погрешности могут быть обусловлены неисправностью измерительных приборов (например, смещением нуля) или неверно выбраннымметодом измерений. Они остаются постоянными на протяжении всейсерии измерений, поэтому их нельзя обнаружить путем повторных измерений. При проведении измерений иногда удается исключить некоторые составляющие. В учебных лабораториях систематическими погрешностями обычно пренебрегают.

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (как по знаку, так и по значению) в серии повторных измерений одной и той же физической величины, проведенных в одних и тех же условиях. В случайных погрешностях нет никакой закономерности. Они неизбежны, неустранимы. Их наличие выражается в виде разброса полученных результатов. Закономерности случайных погрешностей измерений описываются на основе теории вероятностей и математической статистики.

По способу получения результата измерения бывают прямые и косвенные. *Прямые измерения* дают непосредственные значения исследуемой величины, которые могут быть отсчитаны прямо по прибору. Например, измерение длины детали при помощи штангенциркуля, измерение напряжения вольтметром, измерение массы тела на весах.

При *косвенных измерениях* исследуемая величина не может быть получена непосредственно; она вычисляется по результатам прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной. Например, определение плотности тела ρ цилиндрической формы по результатам прямых измерений массы m, высоты h и диаметра d цилиндра при помощи формулы

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}. \qquad (3)$$

Для того чтобы вычислить погрешность косвенного измерения плотности ρ, необходимо знать погрешность величин m, h и d, измеряемых прямыми методами.

Рассмотрим обработку результатов случайных измерений.

Расчет погрешностей при прямых измерениях

Теория метода обработки прямых измерений базируется на теории вероятности. Каждое конкретное значение, полученное в результате измерения, является случайной величиной, поскольку источников погрешностей много; они действуют независимо друг от друга и проявляют себя по-разному. Таким образом, каждый результат сопровождается некоторой случайной погрешностью.

Пусть при измерении физической величины x получено n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из-за наличия случайных ошибок отдельные значения x_i неодинаковы. Показывается, что наиболее близким к истинному значению результата измерений является среднее арифметическое значение измеряемой величины $< x >$, равное арифметической сумме всех измеренных значений, деленной на число измерений:

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ , \qquad (4)$$

где Σ – знак суммы; i – номер измерения; n – число измерений.

Если n стремится к бесконечности, среднее арифметическое значение (4) стремится к истинному значению измеряемой величины. При конечном числе измерений среднее арифметическое представляет собой наиболее вероятное значение измеряемой величины. Теория вероятностей позволяет оценить возможное отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины.

За меру погрешности значения x_i, полученного при отдельном измерении, принимают разность между этим значением и истинным $x_и$ (1). Но, так как истинное значение $x_и$ неизвестно, вместо него берут среднее арифметическое $< x >$ серии измерений (4). Разности

$$\Delta x_1 = x_1 - < x >,\ \Delta x_2 = x_2 - < x >,\ \ldots,\ \Delta x_n = x_n - < x >$$

представляют собой абсолютные погрешности отдельных измерений.

Погрешности Δx_i (i = 1, …, n) могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Алгебраическая сумма абсолютных погрешностей равна нулю. Поэтому в качестве оценки погрешности измерений служит средняя квадратичная погрешность измерений. Согласно теории вероятностей средняя квадратичная погрешность, или стандартное отклонение, среднего арифметического определяется формулой

$$S_n = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \qquad (5)$$

где n – число измеренных значений.

Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины x лежит внутри некоторого интервала, называется доверительной вероятностью α, или коэффициентом надежности, а сам интервал – доверительным интервалом. Каждой доверительной вероятности соответствует свой доверительный интервал. Для технических измерений доверительную вероятность α обычно принимают равной 0,9–0,95 (при выполнении лабораторной работы α берем равной 0,9).

Доверительный интервал для заданной доверительной вероятности α с учетом влияния числа измерений n можно найти, умножив стандартное отклонение среднего арифметического S_n на так называемый коэффициент Стьюдента $\tau_{\alpha n}$:

$$\Delta x = S_n \, \tau_{n\alpha}. \qquad (6)$$

Коэффициенты Стьюдента для значений α = 0,9 и n приведены в табл. 1.

Таким образом, в качестве результата измерений принимают не просто какое-то значение, а интервал значений от $< x > -\Delta x$ до $< x > +\Delta x$ с некоторой доверительной вероятностью α.

Таблица 1

Число измерений n	2	3	4	5	6	7
Коэффициенты Стьюдента	6,3	2,9	2,4	2,1	2,0	1,9

В некоторых случаях при многократных измерениях получается одно и то же значение измеряемой величины. Например, используя штангенциркуль, измерили несколько раз диаметр детали цилиндрической формы и получили одно и то же значение. Это означает, что случайная погрешность не превышает наименьшего значения, которое может быть измерено данным прибором. Точность измерения прибора называют приборной, или инструментальной, погрешностью $\Delta x_{пр}$.

Инструментальная погрешность прибора $\Delta x_{пр}$ определятся по классу точности прибора γ, указанному в его паспорте, либо указывается на самом приборе. Класс точности определяется приведенной погрешностью, выраженной в процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{\lim}} 100 .$$

Приведенная погрешность равна отношению предела допускаемой основной погрешности к предельному значению измерения измеряемой величины $x_{\lim}$. Другими словами, класс точности прибора γ показывает величину допустимой погрешности в процентах от значения измеряемой величины, соответствующего отклонению стрелки до последнего деления шкалы. Таким образом, приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ через класс точности прибора γ определяется как

$$\Delta x_{пр} = \frac{\gamma\, x_{\lim}}{100} .$$

Если класс точности используемого средства измерений неизвестен, то в качестве систематической погрешности можно брать одно деление шкалы аналогового прибора (либо половину цены деления, если приблизительно можно определить половину цены деления прибора) или единицу последнего разряда цифрового прибора.

В теории вероятностей показывается, что в тех случаях, когда погрешности вызываются несколькими независимыми друг от друга случайными причинами, складываются не сами погрешности, а их квадраты. Поэтому полная абсолютная погрешность Δx измеряемой величины через ее случайную $\Delta x_{сл}$ и приборную $\Delta x_{пр}$ погрешности выражается формулой

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}^2} . \qquad (7)$$

Предполагается, что доверительные вероятности определения случайной и инструментальной погрешностей одинаковы. Из формулы (7) следует, что в случае, когда одна из погрешностей

$\Delta x_{сл}$ или $\Delta x_{пр}$ даже в небольшое число раз меньше другой, ее вклад в полную погрешность оказывается незначительным. Так, если одна из величин хотя бы в 3 раза больше другой, то их квадраты будут отличаться почти на порядок, и меньшей величиной можно пренебречь.

Порядок обработки прямых измерений:

1. Провести n измерений x_i измеряемой величины x $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Вычислить среднее арифметическое значение измеряемой величины по формуле (4):

$$< x >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3. Вычислить среднюю квадратичную погрешность S_n результата измерения по формуле (5):

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} .$$

4. Рассчитать доверительный интервал случайной погрешности по формуле (6), предварительно определив коэффициент Стьюдента $\tau_{n\alpha}$ по табл. 1 для заданного числа измерений n:

$$\Delta x = S_n\, \tau_{n\alpha} .$$

5. Определить абсолютную погрешность измерения с учетом случайной $\Delta x_{сл}$ и инструментальной погрешностей $\Delta x_{пр}$ по формуле (7):

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2{}_{сл} + \Delta x^2{}_{пр}} .$$

6. Записать окончательный результат в виде

$$x =< x > \pm \Delta x .$$

Расчет погрешностей при косвенных измерениях

Перейдем к рассмотрению косвенных измерений, когда значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, найденными в результате прямых измерений. Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть косвенно измеряемая величина, являющаяся произвольной функцией непосредственно измеряемых и независимых величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. В том случае, когда величина $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой произведение или частное нескольких прямо измеряемых величин, относительная погрешность значения y определится по формуле

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2},$$

или

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}, \qquad (8)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ – частные производные искомой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим на конкретном примере, как получается конечная формула для относительной погрешности. Пусть функция y имеет вид

$$y = a\,b\,c, \qquad (9)$$

где a, b, c определятся в результате прямых измерений, абсолютные погрешности которых равны Δa, Δb, Δc.

Для такого вида функции y из соотношения (8) получается следующее выражение для относительной погрешности:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}. \qquad (10)$$

В том случае, когда функция y представляет собой одночлен вида

$$y = K\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}, \qquad (11)$$

где a, b, c – по-прежнему измеренные величины; α, β, γ – показатели степени (могут быть как отрицательными, так и положительными числами); K – постоянная величина.

Относительная погрешность косвенного измерения определится по формуле

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta c}{c}\right)^2}\,. \qquad (12)$$

Как следует из формулы (12), относительная погрешность величины y равна корню квадратному из суммы квадратов относительных погрешностей величин a, b, c, определяемых прямыми измерениями, умноженных на соответствующий показатель степени. Константа, входящая в формулу (11), на погрешность не влияет. Рассчитав относительную погрешность $\varepsilon = \Delta y / y$ по формуле (12), можно определить абсолютную погрешность $\Delta y = \varepsilon\, y$. При косвенных измерениях за измеренное значение y принимается значение функции (11), вычисленное по измеренным значениям аргументов – величин a, b, c. В частности, формула для относительной погрешности плотности тела ρ, определяемой по формуле (3), имеет вид

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}\,, \qquad (13)$$

где Δm, Δd, Δh – абсолютные погрешности результатов прямых измерений массы m, диаметра d, высоты h цилиндра.

Порядок обработки косвенных измерений функции вида (11):

1. Провести измерения величин a, b, c и определить их абсолютные погрешности (см. порядок обработки прямых измерений).

2. Вычислить наиболее вероятное значение величины y, подставляя в формулу (11) среднее арифметическое значение величин a, b, c.

3. По формуле (12) произвести расчет относительной погрешности $\varepsilon = \Delta y / y$, вследствие которого определить доверительный интервал погрешности $\Delta y = \varepsilon y$.

4. Записать окончательный результат в виде

$$y = < y > \pm \Delta y.$$

Как правильно записать результат

Полученный результат необходимо округлить. Округление результата измерения проводят после округления погрешности, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Погрешность результата указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной цифрой, если первая равна 3 и более.

Например, при измерении напряжения было получено значение 7,37 В; погрешность составила ±0,08321 В. После округления результат должен быть записан в следующем виде: U = (7,37±0,08) В. Если погрешность будет составлять ±0,008321 В, то результат надо будет представить как

$$U = (7{,}370 \pm 0{,}008)\ \text{В}.$$

Лабораторная работа № 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

Цель работы: изучить законы равноускоренного движения; определить ускорение свободного падения с помощью машины Атвуда.

Краткая теория

Все тела, обладающие массой, притягиваются друг к другу силами, получившими название гравитационных. Сила гравитационного взаимодействия определяется законом, установленным Ньютоном. Согласно закону всемирного тяготения две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

где G = 6,67·10^{-11} м^3/(кг·с^2) – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними.

Если тело массой m находится над поверхностью Земли на высоте h, то на него действует сила земного притяжения, равная

$$F = G\frac{mM_З}{\left(R_З + h\right)^2}, \tag{1.2}$$

где $M_З$ и $R_З$ – масса и радиус Земли.

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – ускорением свободного падения g. В системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$. Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$m\,g = G\frac{mM_З}{r^2}.$$

Ускорение свободного падения g не зависит от массы тела и согласно формуле (1.2) определяется выражением

$$g = G\frac{M_З}{\left(R_З + h\right)^2}. \qquad (1.3)$$

Если тело находится на поверхности Земли или вблизи нее ($h << R_З$), то

$$g = G\frac{M_З}{R_З^2}. \qquad (1.4)$$

Ускорение свободного падения g изменяется вблизи поверхности Земли с широтой; минимальное значение g на экваторе – 9,78 м/с^2, максимальное на полюсах – 9,832 м/с^2. При решении практических задач g = 9,81 м/с^2 ≈ 10 м/с^2.

Ускорение свободного падения g можно найти, исследуя падение тела с нулевой начальной скоростью с известной высоты h. Измеряя время падения t и используя формулу $h = gt^2/2$, вычисляют g. При падении тела с небольших высот (ограниченных высотой учебной аудитории) время падения оказывается малым и его трудно точно измерить. Более точно ускорение свободного падения g можно определить с помощью машины Атвуда.

Рис. 1.1

Машина Атвуда (рис. 1.1) состоит из укрепленного на штативе блока, через который перекинута нить с подвешенными на ней одинаковыми грузами. Масса этих грузов может быть увеличена добавочными небольшими грузами. Если на груз массой m положить перегрузок массой Δm, то вся система начнет двигаться равноускоренно.

На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила T натяжения нити, направленная вверх. Обозначим массу груза $m = m_1$, массу груза с перегрузком $m + \Delta m = m_2$ (рис. 1.2).

Кроме поступательного движения грузов наблюдается вращательное движение блока массой $m_Б$ за счет действия моментов сил натяжения нитей T_1 и T_2. Согласно третьему закону Ньютона силы T_1 и T_2, приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, приложенным к грузам, но по направлению им противоположны. Моментом сил трения, действующих на ось блока, пренебрегаем.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из грузов. В векторной форме он имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} . \qquad (1.5)$$

Так как по условию $m_2 > m_1$, то вектор ускорения $\vec{a}$ груза m_1 направлен вверх и $T_1 > m_1 g$. Уравнение движения (1.5) в проекции на вертикальную ось для первого груза имеет вид

$$m_1 a = T_1 - m_1 g .$$

Отсюда

$$T_1 = m_1 g + m_1 a . \qquad (1.6)$$

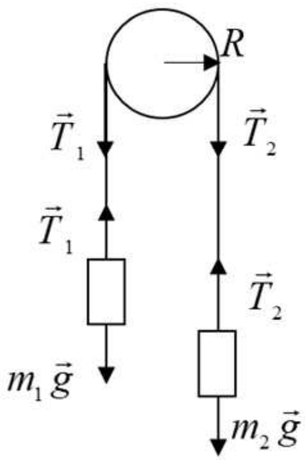


Рис. 1.2

Для второго груза m_2 вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вниз; сила натяжения нити $T_2 < m_2 g$. В проекции на вертикальную ось для второго груза уравнение (1.5) имеет вид

$$m_2 a = m_2 g - T_2 .$$

Отсюда

$$T_2 = m_2 g - m_2 a . \qquad (1.7)$$

Вращение блока подчиняется основному закону динамики вращательного движения. Согласно закону вращающий момент силы M, приложенный к диску, равен произведению момента инерции I диска на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon . \qquad (1.8)$$

По определению модуль момента силы *M* относительно оси равен произведению проекции этой силы *F* на плоскость, перпендикулярную оси вращения, на её плечо *l*; плечо – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы. Вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению разности сил натяжения нитей T_2 и T_1 на плечо, равное радиусу диска:

$$M = \left(T_2 - T_1\right)R . \qquad (1.9)$$

Момент инерции диска равен $I = m_Б\, R^2 / 2$, где $m_Б$ – масса диска. Угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов соотношением $\varepsilon = a / R$. Подставив в основной закон динамики вращательного движения выражения M, I и ε, получим

$$\left(T_2 - T_1\right)R = \frac{m_Б\, R^2}{2}\frac{a}{R} .$$

Отсюда

$$T_2 - T_1 = \frac{m_Б}{2} a . \qquad (1.10)$$

Эту разность сил натяжения нитей можно определить из второго закона Ньютона (формулы (1.6) и (1.7)):

$$T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a . \qquad (1.11)$$

Приравнивая правые части уравнений (1.10) и (1.11), получим

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m_Б}{2} a,$$

или

$$(m_2 - m_1) g = \left(m_2 + m_1 + \frac{m_Б}{2} \right) a.$$

Отсюда ускорение свободного падения определится из выражения

$$g = \frac{m_2 + m_1 + \dfrac{m_Б}{2}}{m_2 - m_1} a. \tag{1.12}$$

Для равноускоренного движения при нулевой начальной скорости справедлива формула $h = at^2/2$, где h – расстояние, пройденное каждым грузом; t – время движения. Отсюда $a = 2h/t^2$. Подставляя данную формулу в выражение (1.12), получим формулу для определения ускорения свободного падения:

$$g = \frac{m_2 + m_1 + \dfrac{m_Б}{2}}{m_2 - m_1} \frac{2h}{t^2}. \tag{1.13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Перекинуть через блок нить с двумя грузами и убедиться в том, что система находится в положении безразличного равновесия.

2. Установить кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы вертикальной стойки, а фотодатчик расположить таким образом, чтобы правый груз при движении вниз проходил в центре рабочего окна фотодатчика (за нижнее положение груза берется риска шкалы, соответствующая риске на корпусе фотодатчика и являющаяся как бы продолжением оптической оси фотодатчика, которую пересекает движущийся груз). Установить правый груз в крайнем верхнем положении.

3. Положить на правый груз один из перегрузков.

4. Нажать на кнопку «Пуск» блока. Происходит растормаживание электромагнита, правый груз начинает опускаться, и таймер блока начинает отсчет времени. При пересечении правым грузом оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Записать показания таймера, т.е. время движения грузов.

5. Найти среднее значение времени движения.

6. Определить по шкале пройденный грузом путь h как расстояние от нижней плоскости груза (в верхнем положении) до оптической оси фотодатчика.

7. Зная пройденный путь и время движения, определим значение ускорения:

$$a = 2h / t^2,$$

где h – расстояние, пройденное каждым грузом; t – время движения грузов (среднее значение).

8. Определить ускорение свободного падения по формуле (1.13):

$$g = \frac{m_2 + m_1 + \frac{m_Б}{2}}{m_2 - m_1} \frac{2h}{t^2},$$

где масса диска $m_Б$ = 50 г.

9. Повторить измерения 3–5 раз, изменяя высоту подъема груза в верхнем положении. Результаты измерений занести в табл. 1.1.

10. Найти среднее значение ускорение свободного падения.

11. Повторить измерения по пунктам 2–10 с другим перегрузком.

12. Определив среднее значение ускорения свободного падения для каждого опыта с массами грузов m_1 и m_2, найти итоговое среднее значение g.

13. Рассчитать случайную погрешность ускорения свободного падения.

14. Сравнить найденные результаты с ускорением свободного падения, вычисленным для широты Владивостока g = 9,80616 м/с^2.

Таблица 1.1

m, г	h, м	t, с	$t_{ср}$, с	a, м/с^2	g, м/с^2
m_1 m_2	h_1	t_1	$t_{ср1}$	a_1	g_1
		t_2			
		t_3			
	h_2	t_1	$t_{ср2}$	a_2	g_2
		t_2			
		t_3			
	h_3	t_1	$t_{ср3}$	a_3	g_3
		t_2			
		t_3			

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Получите зависимость ускорения свободного падения от широты. От каких величин зависит ускорение свободного падения?
3. Запишите второй закон Ньютона для машины Атвуда.
4. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.
5. Как определяется модуль момента силы M относительно оси? Дайте определение плеча силы.
6. Определите направление момента сил натяжения нитей T_2, T_1 и результирующего момента силы M.
7. Как угловое ускорение связано с линейным ускорением?
8. Выведите расчетную формулу для ускорения свободного падения.

Лабораторная работа № 2.
МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Цель работы: изучить маятник Максвелла; определить его момент инерции.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка «Маятник Максвелла», электронный блок, штангенциркуль.

Краткая теория

Данная работа знакомит с маятником Максвелла и методикой измерения на нем момента инерции колеса маятника относительно оси, проходящей через его центр масс. Маятник Максвелла участвует в поступательном и вращательном движении. Дадим определение основных характеристик вращательного движения.

Положение точки при вращении характеризуется углом φ, на который поворачивается тело. Мгновенная угловая скорость определяется производной угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.1}$$

Угловое ускорение есть производная угловой скорости по времени или вторая производная угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{2.2}$$

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

$$\upsilon = \omega R, \; a_\tau = \varepsilon R, \tag{2.3}$$

где υ – скорость; a_τ – тангенциальная составляющая ускорения; R – радиус окружности.

Для характеристики вращательного эффекта силы при действии ее на твердое тело вводят понятие момента силы. Различают моменты силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{M}$, модуль которого равен произведению модуля силы $\left|\vec{F}\right|$ на её плечо l:

$$M = F\,l. \qquad (2.4)$$

Плечом силы называется кратчайшее расстояние от точки *O* до линии действия силы, т.е. это длина перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую, вдоль которой действует сила (рис. 2.1).

а б

Рис. 2.1

Вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила $\vec{F}$ и точка 0, причем так, что направление вращения, обусловленное силой, и направление вектора $\vec{M}$ образуют правовинтовую систему (см. рис. 2.1б). На рисунке 2.1а момент $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости от нас за плоскость.

Из рисунка видно, что плечо силы l равно $l = r \cdot \sin\alpha$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки *O* в точку приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Учитывая взаимное расположение векторов $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$ и выражение (2.4), момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]. \qquad (2.5)$$

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M, равная проекции на эту ось вектора момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z (рис. 2.2).

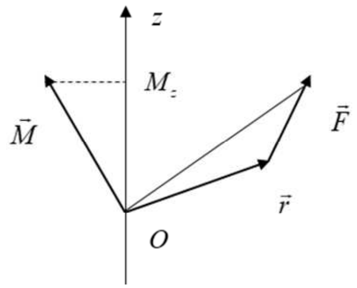


Рис. 2.2

Модуль момента силы M относительно оси равен произведению проекции этой силы F на плоскость, перпендикулярную оси вращения, на её плечо l (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы):

$$M = F_{\perp}\, l\,.$$

Введем понятие момента инерции тела, который представляет собой меру инертности твердых тел при вращательном движении. Его роль такая же, что и массы при поступательном движении. При поступательном движении мерой инертности является масса. При вращении инертность зависит не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Абсолютно твердое тело может рассматриваться как система частиц (материальных точек) с неизменными расстояниями между ними. Момент инерции системы материальных точек относительно оси определяется формулой

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (2.6)$$

и равен сумме произведений масс m_i материальных точек на квадраты их расстояний r_i до оси вращения. Момент инерции есть величина аддитивная, т.е. суммарный момент инерции равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси.

Момент инерции одной материальной точки относительно оси равен

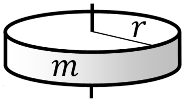
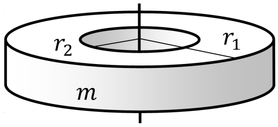
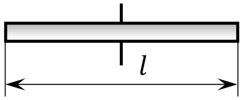
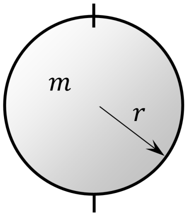
$$I = mr^2, \qquad (2.7)$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние до оси вращения.

Для определения момента инерции тела его разбивают на малые части, которые можно считать материальными точками. Каждая точка имеет бесконечно малую массу dm, а ее момент инерции согласно формуле (2.7) равен

$$dI = dm\,r^2.$$

Таблица 2.1

№ п/п	Тело	Схема	Формула
1	Диск, сплошной цилиндр		$I = \frac{mr^2}{2}$
2	Кольцо, полый цилиндр		$I = \frac{m\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{2}$
3	Тонкий стержень		$I = \frac{ml^2}{12}$
4	Шар		$I = \frac{2mr^2}{5}$

Для нахождения момента инерции всего тела необходимо сложить моменты инерции всех материальных точек, на которые разбили тело, т.е. найти интеграл:

$$I = \int r^2\,dm. \qquad (2.8)$$

В том случае, когда тело однородно, в каждой его точке плотность постоянна: $\rho = const$. Определяя массу бесконечно малого элемента формулой $dm = \rho\, dV$, получим выражение момента инерции I для однородного твердого тела:

$$I = \rho \int r^2\, dV , \tag{2.9}$$

где интеграл берется по всему объему.

В системе СИ момент инерции измеряется в килограммах на метр квадратный. С помощью выражения (2.9) аналитически можно получить формулы для расчета моментов инерции симметричных тел относительно оси симметрии. Моменты инерции некоторых тел относительно оси приведены в табл. 2.1.

Описание установки. Вывод рабочей формулы

Основным элементом установки является маятник, состоящий из диска, через центр которого проходит ось диаметром d (рис. 2.3). На эту ось наматываются две симметрично расположенные относительно плоскости диска нити одинаковой длины. При закручивании нити на ось маятника он поднимается на высоту h. В этом положении маятник обладает потенциальной энергией. Если отпустить маятник, то он начинает опускаться под действием силы тяжести, приобретая одновременно вращательное движение. В нижней точке, когда маятник опустится на полную длину нитей, поступательное движение вниз прекратится. При этом раскрутившийся диск со стержнем продолжает вращательное движение в том же направлении по инерции и снова наматывает нити на стержень. Вследствие этого диск со стержнем начинает подниматься вверх. Из-за убыли механической энергии вследствие трения нитей о стержень и сопротивления воздуха расстояние, пройденное маятником при подъеме, окажется меньше, чем при спуске. После достижения наивысшей точки цикл колебательного движения возобновится. Диск со стержнем будет совершать колебания вверх и вниз. Такое устройство и называется маятником Максвелла.

Для получения рабочей формулы момента инерции маятника рассмотрим силы, действующие на маятник Максвелла. Будем считать, что трение нитей о стержень мало и ими можно пренебречь. Тогда во время движения как при спуске, так и при подъеме на маятник действуют постоянные по модулю и направлению силы: сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру масс системы, и сила натяжения нитей $\vec{T}$.

В данном случае можно считать, что маятник движется с постоянным линейным ускорением a.

Рис. 2.3

Запишем уравнение поступательного движения маятника. В соответствии со вторым законом Ньютона для поступательного движения центра массы маятника уравнение движения представится в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2\vec{T}, \qquad (2.10)$$

где a – ускорение центра масс маятника; $\vec{T}$ – сила натяжения одной нити; g – ускорение свободного падения.

Уравнение (2.10) в проекции на вертикальную ось имеет вид

$$ma = mg - 2T. \qquad (2.11)$$

Помимо поступательного движения маятник участвует и во вращательном движении за счет действия на него момента сил натяжения. Запишем основной закон динамики вращательного движения:

$$I\,\varepsilon = M\ , \tag{2.12}$$

где I – момент инерции колеса маятника относительно его оси вращения; ε – угловое ускорение маятника; M – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения колеса маятника.

Если нет проскальзывания между осью и нитями и нить можно считать нерастяжимой, то линейное ускорение a связано с угловым ε соотношением (2.3):

$$\varepsilon = \frac{a}{R},$$

где R – радиус оси маятника.

Так как сила тяжести $m\vec{g}$ проходит через центр массы системы и, следовательно, ее момент силы равен нулю, то момент силы M, действующий на маятник, будет обусловлен действием только суммарной силы натяжения, равной $2T$. В этом случае уравнение (2.12) можно записать в виде

$$I\,\frac{a}{R} = 2T\,R\,. \tag{2.13}$$

Из выражения (2.11) найдем результирующую силу натяжения $2T$

$$2T = m(g-a)$$

и подставим ее в уравнение (2.13)

$$I\,\frac{a}{R} = m(g-a)R\,. \tag{2.14}$$

После преобразований получим формулу для расчета момента инерции:

$$I = m\,R^2\left(\frac{g}{a}-1\right). \tag{2.15}$$

Так как движение маятника происходит с постоянным ускорением, то расстояние h, пройденное за время t, при движении с нулевой начальной скоростью равно $h = a t^2 / 2$. Отсюда

$$a = \frac{2h}{t^2}. \tag{2.16}$$

Подставив ускорение (2.16) в уравнение (2.15) и заменив величину радиуса оси маятника R на ее диаметр d, получим рабочую формулу для расчета момента инерции маятника:

$$I = \frac{m d^2}{4}\left(\frac{g t^2}{2h} - 1\right), \tag{2.17}$$

где m – масса маятника, равная сумме масс диска $m_д$ и стержня (оси маятника) $m_{ст}$.

К формуле (2.17) можно прийти исходя из закона сохранения механической энергии. При пренебрежении силами сопротивления согласно закону сохранения механической энергии можно записать следующее:

$$m g h = \frac{m \upsilon^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}, \tag{2.18}$$

где $m g h$ – потенциальная энергия маятника, поднятого на высоту h относительно положения равновесия; $\frac{m \upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения; $\frac{I \omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения маятника в нижней точке траектории; υ – скорость поступательного движения центра масс маятника; ω – угловая скорость; I – момент инерции маятника относительно оси симметрии.

Из соотношения (2.18) следует

$$I = \frac{m \upsilon^2}{\omega^2}\left(\frac{2 g h}{\upsilon^2} - 1\right). \tag{2.19}$$

При поступательном равноускоренном движении маятника при нулевой начальной скорости имеем

$$\upsilon = at. \qquad (2.20)$$

Так как раскручивание нитей со стержня происходит без проскальзывания, то угловая скорость связана с линейной скоростью центра масс маятника соотношением (2.3):

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{2\upsilon}{d}. \qquad (2.21)$$

Подставляя выражения (2.20) и (2.21) в формулу (2.19), получим выражение (2.17) для момента инерции маятника.

Значение момента инерции маятника Максвелла можно вычислить и теоретически. Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня (оси) и диска:

$$I_{теор} = I_{д} + I_{ст}.$$

Момент инерции диска $I_{д}$ и стержня $I_{ст}$ относительно оси вращения определяется по формуле (см. табл. 2.1). Считаем, что колесо имеет форму кольца

$$I_{д} = \frac{m_{д}\left(D^2 + d^2\right)}{8}, \; I_{ст} = \frac{m_{ст}\, d^2}{8},$$

где $m_{ст}$ – масса стержня; d – его диаметр; $m_{д}$ – масса диска; D – его диаметр.

В работе $m_{ст}$ = 19 г, $m_{д}$ = 100 г.

Таким образом, формула для теоретического значения момента инерции маятника Максвелла будет иметь вид

$$I_{теор} = \frac{m_{д}\left(D^2 + d^2\right)}{8} + \frac{m_{ст}\, d^2}{8}. \qquad (2.22)$$

Порядок выполнения работы:

1. Регулируя длину нитей регулировочными винтами, установить горизонтальное положение стержня (оси), на котором закреплено колесо маятника Максвелла.

2. Измерительной линейкой определить расстояние h, на которое переместится при движении центр масс колеса Максвелла.

3. Привести маятник Максвелла в движение, отпустив штырь пускового устройства. С помощью датчика определить время движения маятника t.

4. Измерения повторить 3–5 раз для других положений датчика, задавая их путем его перемещения вдоль штативов. Начальное (стартовое) положение маятника не изменять. Результаты измерений занести в табл. 2.2.

5. Штангенциркулем измерить диаметр D маятника Максвелла и толщину стержня d.

6. По данным табл. 2.2, используя формулу (2.17), определить среднее значение момента инерции колеса маятника Максвелла.

7. По формуле (2.22) вычислить теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла. Сравнить полученное значение с экспериментальным.

8. Оценить абсолютную погрешность момента инерции маятника по формуле, полученной по методике оценки погрешности при косвенных измерениях:

$$\Delta I = I\sqrt{\left(\frac{2\,\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{2\,\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}\ .$$

Найти относительную ошибку результата.

Диаметр диска D = …, м, диаметр стержня d = … м.

Таблица 2.2

№ п/п	t, с	h, м	I, кг·м^2	ΔI, кг·м^2	$I_{теор}$, кг·м^2
1					
…					
5					

Контрольные вопросы

1. Дайте определение угловой скорости и углового ускорения.

2. Дайте определение моменту силы M относительно точки. Дайте определение плеча силы. Как направлен вектор M?

3. Дайте определение моменту инерции системы относительно оси. Дайте определение моменту инерции материальной точки, системы материальных точек, твердого тела. Поясните его физический смысл.

4. Запишите формулы момента инерции диска, кольца, тонкого стержня, шара.

5. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения.

6. Сформулируйте закон сохранения энергии в механике. Выведите расчетную формулу момента инерции маятника Максвелла из сохранения энергии.

7. Выведите расчетную формулу момента инерции колеса маятника Максвелла из законов динамики поступательного и вращательного движения.

Лабораторная работа № 3.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Краткая теория

Колебаниями называются процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через одинаковые промежутки времени.

Колебания можно классифицировать в зависимости от характера воздействия на колебательную систему: свободные, или собственные, и вынужденные.

Свободными, или собственными, называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того как она была выведена из положения равновесия. Собственные колебания, при которых физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса, называются гармоническими.

Гармонические колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2\varphi=0. \tag{3.1}$$

Решением дифференциального уравнения (3.1) является функция косинуса или синуса:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\alpha) \tag{3.2}$$

или

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\alpha).$$

Здесь A и α – произвольные постоянные; величина ω_0 определяется параметрами системы. Величина A представляет собой наибольшее отклонение колеблющейся величины x от равновесия и называется амплитудой колебаний. Величина $\omega_0 t+\alpha$, стоящая под знаком тригонометрической функции, называется фазой колебания. Значение фазы в начальный момент времени (t = 0) равно

α ; называется начальной фазой. Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени.

Время, за которое система совершает одно полное колебание, называется периодом T. Из определения величины T следует, что период равен отношению времени t к числу колебаний N: $T = t / N$.

Обратная величина, равная числу колебаний N, совершаемых в единицу времени, называется частотой колебаний ν: $\nu = N / t$. В системе СИ частота измеряется в герцах (Гц). Один герц – это частота колебания, при которой за одну секунду совершается одно колебание. Частота и период связаны между собой соотношением $\nu = 1/T$.

Величина ω_0 представляет собой число колебаний за 2π с; называется циклической, или круговой, частотой. Циклическая частота и период колебаний связаны соотношением $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi / T$.

На рисунке 3.1 представлен график гармонических колебаний.

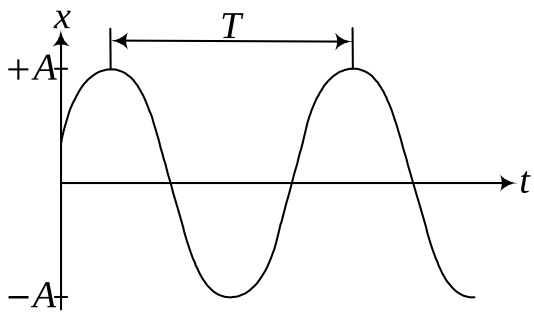


Рис. 3.1

Маятником является тело, подвешенное так, что его центр тяжести находится ниже точки подвеса.

Математический маятник. Математическим маятником называется тело точечной массы m, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длиной l (рис. 3.2).

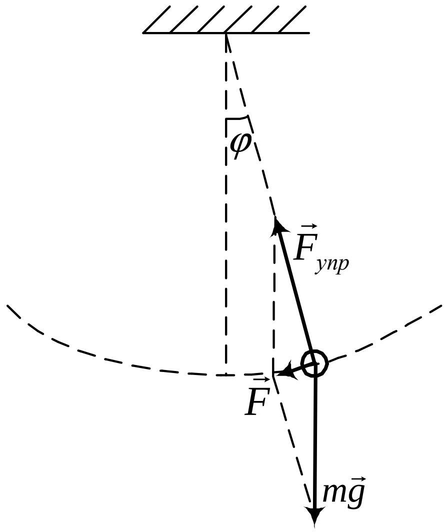


Рис. 3.2

Данная идеализированная модель является хорошим приближением системы (например, шарик, подвешенный на нити), в которой размерами тела можно пренебречь.

Составим уравнение движения маятника на основе уравнения динамики вращательного движения. При отклонении маятника на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся возвратить маятник в положение равновесия. По определению момент силы относительно оси равен произведению силы на ее плечо. Плечом силы называется кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. В данном случае плечом силы тяжести является величина $l\sin\varphi$, где l – расстояние материальной точки до оси вращения, равное длине нити. Тогда выражение для момента силы тяжести будет иметь вид

$$M = -mgl\sin\varphi. \tag{3.3}$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению из положения равновесия.

Согласно уравнению динамики вращательного движения момент силы M относительно оси равен произведению момента инерции тела I относительно той же оси на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon . \qquad (3.4)$$

Угловым ускорением ε называется вторая производная угла вращения φ по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \qquad (3.5)$$

Момент инерции математического маятника I определяется по формуле момента инерции материальной точки:

$$I = ml^2 . \qquad (3.6)$$

Подставим формулы (3.3), (3.5) и (3.6) в основное уравнение динамики вращательного движения (3.4):

$$ml^2 \, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi ,$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 . \qquad (3.7)$$

В дифференциальном уравнении (3.7) неизвестная функция φ стоит под знаком синуса. Уравнение не может быть решено стандартными методами; его точное решение возможно только при малых углах отклонения φ, когда $\sin\varphi \approx \varphi$. В этом случае уравнение (3.7) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 . \qquad (3.8)$$

Выражение (3.8) можно свести к форме (3.1), если обозначить величину g/l через ω_0^2:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\,\varphi = 0 . \qquad (3.9)$$

Решением уравнения (3.9) является гармонический закон

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{3.10}$$

где φ_m – максимальный угол отклонения маятника; величины φ_m и α определяются начальными условиями; ω_0 – циклическая частота математического маятника, значение которой определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{3.11}$$

Таким образом, малые колебания математического маятника являются гармоническими колебаниями. Колебания математического маятника считаются малыми, если максимальный угол отклонения маятника не превышает величины примерно 7°. Из формулы (3.11) можно получить выражение для частоты

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

и периода математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3.12}$$

Как следует из этих формул, частота и период математического маятника зависят только от длины маятника и ускорения свободного падения и не зависят от массы маятника.

Физический маятник. Физический маятник – это тело, совершающее колебание под действием силы тяжести вокруг неподвижной точки или оси, не проходящей через центр масс *C* тела. Физический маятник отличается от математического только распределением масс. В данном случае массу тела нельзя представить в виде материальной точки.

В положении устойчивого равновесия центр масс С физического маятника находится ниже оси вращения *O* на вертикали, проходящей через ось (рис. 3.3). При отклонении маятника на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся возвратить маятник в положение равновесия. По определению момент силы относительно оси равен произведению силы на ее плечо. Плечом силы называется кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. В данном случае плечом силы тяжести является величина $d\sin\varphi$, где d – расстояние между осью вращения и центром масс C. Тогда выражение для момента силы тяжести будет иметь вид (3.3)

$$M = -mgd\sin\varphi .$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению из положения равновесия.

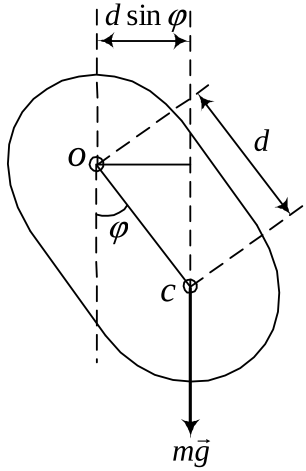


Рис. 3.3

Для составления уравнения движения воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения (3.4): момент силы M относительно оси равен произведению момента инерции тела I относительно той же оси на его угловое ускорение ε :

$$M = I\,\varepsilon .$$

Угловое ускорение ε есть вторая производная угла вращения φ по времени (3.5):

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Подставив формулы ε и момента силы M в основное уравнение динамики вращательного движения (3.4), получим

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi, \text{ или } \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{mgd}{I}\sin\varphi = 0. \qquad (3.13)$$

Уравнение (3.13) для физического маятника подобно уравнению (3.8) для математического маятника. Оно имеет точное решение только при малых углах отклонения φ. В этом случае, ограничившись отклонением маятника на малые углы φ, такие, что $\sin\varphi \approx \varphi$, уравнение (3.13) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{mgd}{I}\varphi = 0. \qquad (3.14)$$

Уравнение (3.14) также можно свести к форме (3.1). Для этого введем величину

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \qquad (3.15)$$

Получим уравнение (3.9), описывающее гармонические колебания физического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0^2\,\varphi = 0.$$

Решением уравнения является закон (3.10):

$$\varphi(t) = \varphi_m\cos(\omega_0 t+\alpha),$$

где φ_m – максимальный угол отклонения маятника.

Величина, определяемая формулой (3.15), представляет собой циклическую частоту физического маятника. Определив циклическую частоту, получим выражения для частоты

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

и периода физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \qquad (3.16)$$

Следует отметить, что в формулу для циклической частоты физического маятника (3.15), а также для частоты и периода входит момент инерции тела I относительно оси вращения O. Когда маятник представляет собой тело правильной геометрической формы, то его момент инерции относительно оси С, проходящей через центр масс I_c, является известной величиной. Тогда момент инерции тела I относительно оси вращения O можно определить по теореме Гюйгенса – Штейнера, согласно которой момент инерции тела I относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси I_C, проходящей через центр масс, сложенной с величиной md^2 – произведение массы на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_C + md^2, \tag{3.17}$$

где d – расстояние между осями O и С.

Лабораторная работа № 3а. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: определить ускорение свободного падения методом оборотного маятника; изучить гармонические колебания; экспериментально исследовать зависимость периода колебаний математического маятника от его параметров; опытным путем определить ускорение свободного падения.

Описание установки. Вывод рабочей формулы

Схема установки показана на рис. 3.4. В качестве математического маятника используется металлический шар 1, подвешенный на двух капроновых нитях к кронштейну 2. На этом же кронштейне находится ролик, позволяющий изменять длину подвески. На нижнем кронштейне укреплен фотодатчик. Расстояние между кронштейнами определяется по нанесенной на штатив шкале.

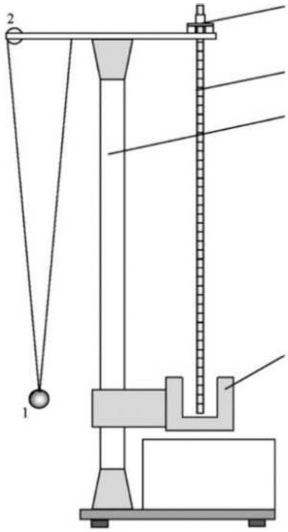


Рис. 3.4

Период математического маятника определяется по формуле (3.12):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Из этого выражения определится

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\,. \qquad (3.18)$$

Период колебаний маятника T легко измерить на опыте, определив время t, за которое маятник совершает N колебаний:

$$T = t\,/\,N\,. \qquad (3.19)$$

Для опытного определения ускорения свободного падения g можно использовать соотношение (3.18). Если измерить период колебаний T при различных длинах нити l, а затем построить график зависимости функции T^2 от l, то получится прямая линия с коэффициентом наклона: $a = 4\pi^2\,/\,g$. Определяя наклон a

из экспериментального графика $T^2 = f(l)$, можно рассчитать величину ускорения свободного падения g по формуле

$$g = \frac{4\pi^2}{a}. \qquad (3.20)$$

Порядок выполнения работы:

1. Установить нижний кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы верхняя плоскость кронштейна совпала с одной из рисок шкалы.

2. Установить верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. Вращая ролик, добиться такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике.

3. По шкале на вертикальной стойке определить длину математического маятника l.

4. Привести математический маятник в колебательное движение, отклонив металлический шарик на угол 7–10°, после чего нажать на кнопку «Сброс» на блоке. По показанию таймера определить значение времени 10–15 колебаний маятника.

5. Определить значение периода колебаний маятника по формуле (3.19).

6. Повторить опыт 3 раза. Определить среднее значение периода колебаний маятника для данной длины маятника l. Полученные значения занести в табл. 3.1.

Таблица 3.1

l, м					
t, с					
$<t>$, с					
T, с					
T^2, с^2					
g, м/с^2					

7. Передвинуть вверх кронштейн с фотодатчиком на два деления шкалы вертикальной стойки. Вращая ролик, добиться такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике. По шкале вертикальной стойки определить длину математического маятника l. Повторить эксперимент по пунктам 4–6.

8. Повторить эксперимент, уменьшая длину маятника l 5–6 раз.

9. Определив среднее значение периода колебаний маятника для данной длины маятника l, по формуле (3.18) вычислить ускорение свободного падения.

10. Определить среднее значение ускорения свободного падения и рассчитать абсолютную и относительную погрешность измерения.

11. Построить график зависимости квадрата периода колебаний от длины маятника $T^2 = f(l)$. Определить наклон графика $a = 4\pi^2 / g$. Определив коэффициент a, найти величину ускорения свободного падения по формуле (3.20):

$$g = \frac{4\pi^2}{a}.$$

12. Сравнить полученные значения ускорения свободного падения первым и вторым способом. Определить относительную погрешность.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение колебательному процессу. Какие колебания называются свободными, или собственными? Дайте определение гармоническим колебаниям.

2. Запишите общее решение уравнения гармонических колебаний. Поясните смысл основных характеристик гармонических колебаний. Дайте определение амплитуде и периоду колебаний. Как связаны период и циклическая частота?

3. Дайте определение математическому маятнику.

4. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения для математического маятника. Поясните смысл величин, входящих в него.

5. Дайте определение моменту силы M относительно оси. Дайте определение плечу силы.

6. Как определяется момент инерции материальной точки относительно оси?

7. Получите дифференциальное уравнение колебания математического маятника.

8. Почему максимальный угол отклонения маятника не должен превышать 10°? Как будет двигаться маятник при больших углах отклонения?

9. Получите рабочую формулу для определения ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

Лабораторная работа № 3б. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ МЕТОДОМ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы: определить ускорение свободного падения методом оборотного маятника.

Период физического маятника определяется по формуле (3.16):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\ .$$

Обозначив

$$l_0 = \frac{I}{m\,d}\,, \tag{3.21}$$

после подстановки выражения (3.21) в формулу (3.16) получим выражение для периода физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\ . \tag{3.22}$$

Величина l_0 называется приведенной длиной физического маятника. Поскольку выражение (3.22) совпадает с формулой периода свободных колебаний математического маятника длиной l_0, то под приведенной длиной физического маятника понимается длина такого математического маятника, период свободных колебаний которого совпадает с периодом свободных колебаний данного физического маятника.

Если отложить от точки подвеса O вдоль прямой OC отрезок OO_1, длина которого равна приведенной длине физического маятника l_0, то точка O_1 станет центром качания (рис. 3.5). Центр качания можно определить как точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений. Точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра масс C ($l_0 > l$). Всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника C, соответствует одна и та же приведенная длина и, следовательно, один и тот же период колебаний T. Точка подвеса и центр качания являются взаимными или сопряженными точками в том смысле, что если маятник подвесить за ту или другую точку, то в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера периоды колебаний совпадут. Точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс и расположены асимметрично относительного него. Физический маятник, который можно подвешивать за любую из сопряженных точек, называется оборотным.

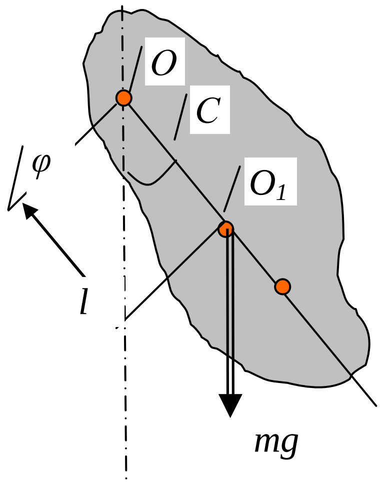


Рис. 3.5

Метод, используемый в данной работе, основан на определении приведенной длины физического маятника и соответствующих ей периодов колебаний, что позволяет рассчитать ускорение свободного падения по формуле (3.22).

Описание установки. Вывод рабочей формулы

Оборотный маятник (рис. 3.6) состоит из длинного цилиндрического стержня, на котором закрепляются две подвижные опорные втулки *A* и *B*. Колебания маятника осуществляются поочередно вокруг осей, проходящих через вырезы этих втулок. Обозначим расстояние от выреза опорной втулки *A* до центра масс *C* через *a*; расстояние от выреза опорной втулки *B* до центра масс *C* – *b*; расстояние между осями – *l*.

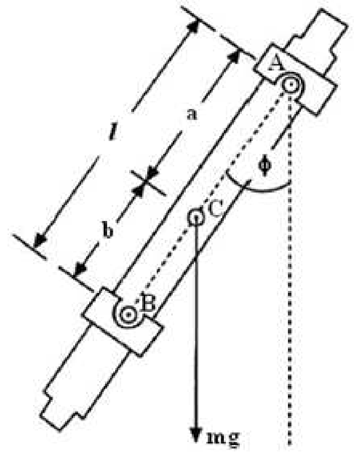


Рис. 3.6

Пусть T_A и T_B – периоды колебаний маятника относительно осей, проходящих через вырезы опорных втулок *A* и *B*. В соответствии с формулой (3.16) можно записать:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mg\,a}}\,;\; T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mg\,b}}\,, \tag{3.23}$$

где I_A и I_B – моменты инерции маятника относительно осей, проходящих через вырезы опорных втулок *A* и *B*.

Возведем каждое из выражений (3.23) в квадрат, умножим первое на a, второе – на b и вычтем второе уравнение из первого:

$$aT_A^2 - bT_B^2 = 4\pi^2 \frac{I_A - I_B}{mg}. \tag{3.24}$$

Моменты инерции I_A и I_B можно определить, воспользовавшись теоремой Гюйгенса – Штейнера (3.17):

$$I_A = I_C + ma^2,\ I_B = I_C + mb^2. \tag{3.25}$$

Подставив соотношение (3.25) в формулу (3.24), получим

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_A^2 - bT_B^2}. \tag{3.26}$$

Если подобрать положения опорных втулок A и B таким образом, чтобы выполнялось соотношение $T_A = T_B = T_0$, то формула (3.26) упрощается, что позволяет получить рабочую формулу для определения ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника:

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{T_0^2(a-b)},\ g = 4\pi^2 \frac{a+b}{T_0^2},$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2}, \tag{3.27}$$

где $l = a + b$ – расстояние между вырезами опорных втулок в случае равенства периодов колебаний относительно каждой из осей ($T_A = T_B = T_0$). Это и есть приведенная длина оборотного маятника.

Зная l и T_0, по формуле (3.27) можно рассчитать ускорение свободного падения g.

Для более точного измерения периодов колебаний $T_A = T_B = T_0$ в работе используется зависимость T_A и T_B от расстояния между осями l.

Порядок выполнения работы:

1. Опорные втулки A и B закрепить симметрично на некотором расстоянии от концов стержня.

2. Установить маятник так, чтобы опорная втулка A служила осью качания. Отклонить маятник от положения равновесия на угол, не превышающий 10°. Провести 5–7 измерений периода колебаний T_A. Найти среднее значение периода T_A.

3. Перевернуть маятник так, чтобы опорная втулка B стала осью качания оборотного маятника. При этом, не меняя положения втулки A, опорную втулку B установить на расстоянии l (по указанию преподавателя) от неё. Провести 2–3 измерения периода колебаний T_B. Найти среднее значение периода T_B. Результат занести в табл. 3.2.

Таблица 3.2

l, см	60	58	…	34
T_B, с				

4. Каждый раз, уменьшая расстояние между втулками на 2 см, провести измерения T_B и результаты измерений занести в табл. 3.2. Построить график зависимости $T_B(l)$. Графически определить расстояния l_1 и l_2, для которых $T_A = T_B$ (рис. 3.7).

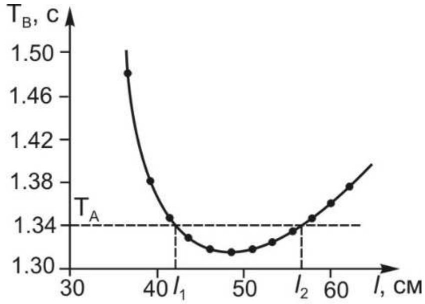


Рис. 3.7

5. Перемещения опорной втулки B приводят к изменению момента инерции маятника и положения его центра масс. Следовательно, меняется значение периода колебаний относительно втулки A. Чтобы учесть эти изменения, необходимо провести измерение периодов колебаний T_A и T_B при одинаковых значениях l.

Для этого между втулками установить расстояние $l = l_1 - 3$ см (положение втулки A не менять). Определить поочередно периоды T_A и T_B на выбранном расстоянии.

6. Повторить п. 5, изменяя расстояние l в интервале от ($l_1 - 3$) до ($l_1 + 3$) см с шагом в 1 см. Результаты занести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

l, см	$l_1 - 3$ см	$l_1 - 2$ см	…	$l_1 + 3$ см
T_A, с				
T_B, с				

7. Построить графики зависимостей $T_A(l) = f(l)$ и $T_B(l) = f(l)$ на одном листе миллиметровой бумаги (рис. 3.8). Приведенная длина маятника соответствует точке пересечения кривых (см. рис. 3.8) $l = \lambda$; по этому графику определяют период T_0, соответствующий этому расстоянию между втулками A и B. Установить опорную втулку B на расстоянии $l = \lambda$ от втулки A, по-прежнему не меняя положения втулки A. Убедиться в том, что период колебаний маятника на каждой опорной втулке соответствует T_0.

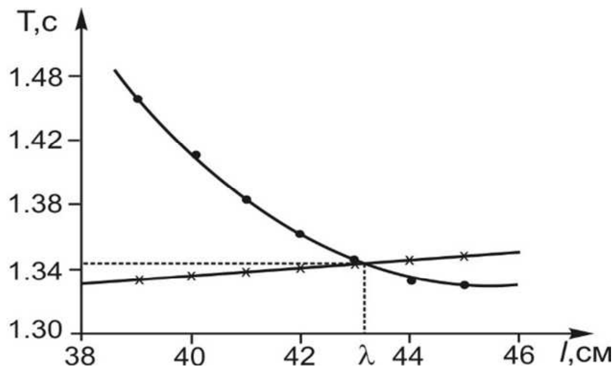


Рис. 3.8

8. По формуле (3.27) рассчитать ускорение свободного падения.

9. Оценить погрешность по формуле, полученной по методике оценки погрешности при косвенных измерениях:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\,\Delta T_0}{T_0}\right)^2}\ .$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение физическому маятнику.

2. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения. Поясните смысл величин, входящих в него.

3. Сформулируйте теорему Штейнера.

4. Получите дифференциальное уравнение колебания физического маятника.

5. Почему максимальный угол отклонения маятника не должен превышать 10°? Как будет двигаться маятник при больших углах отклонения?

6. Получите рабочую формулу для определения ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника.

7. Что такое приведенная длина физического маятника?

Лабораторная работа № 4.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучить методику определения скорости тела с помощью крутильного маятника; экспериментально найти скорость пули.

Краткая теория

В основе данной работы лежат законы динамики вращательного движения относительно неподвижной оси и закон сохранения энергии колебаний крутильного маятника.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z называется произведение модуля силы $\left|\vec{F}\right|$, лежащей в плоскости перпендикулярной оси, на её плечо l (кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы) (рис. 4.1):

$$M_z = F_\perp l. \tag{4.1}$$

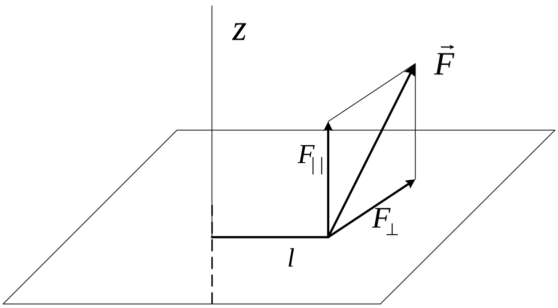


Рис. 4.1

Аналогично определяется момент импульса относительно оси – произведение проекции импульса частицы $\left|\vec{p}_\perp\right|$ на его плечо l:

$$L_z = \left|\vec{p}_\perp\right| l. \tag{4.2}$$

В лекционном курсе физики показывается, что момент силы M_z и момент импульса L_z, взятые относительно оси, связаны между собой соотношением, которое называется уравнением моментов:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z\,. \qquad (4.3)$$

Изменение момента импульса частицы относительно оси в единицу времени равно моменту силы, действующей на частицу, относительной этой оси. Если момент всех внешних сил относительно оси равен нулю $M_z = 0$, то $\frac{dL_z}{dt} = 0$, и момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным во времени:

$$L_z = const\,.$$

Это положение носит название закона сохранения момента импульса относительно оси; является одним из важнейших фундаментальных законов физики.

Применим закон сохранения момента импульса к вращательному движению. Пусть материальная точка (рис. 4.2) массой m вращается по окружности радиусом r вокруг оси z (ось направлена перпендикулярно к плоскости рисунка) со скоростью υ. Так как плечом импульса в данном случае является радиус $l = r$, то момент импульса частицы относительно оси вращения равен

$$L_z = m\upsilon r = m\omega r^2, \qquad (4.4)$$

где ω – угловая скорость; υ – линейная скорость частицы, $\upsilon = \omega r$.

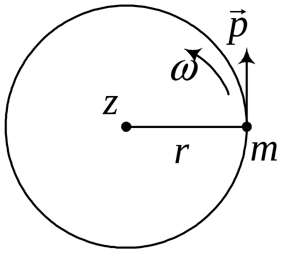


Рис. 4.2

Если вокруг оси вращается система материальных точек, имеющих одну и ту же угловую скорость, то момент импульса всей системы относительно этой оси равен сумме моментов импульсов каждой точки:

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega,$$

где m_i, – масса i-й частицы; r_i – расстояние i-й частицы до оси вращения.

Величину ω, одинаковую для всех материальных точек, можно вынести из-под знака суммы:

$$L_z = \omega \sum_i m_i \, r_i^2 = \omega I_z, \tag{4.5}$$

где обозначено

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 . \tag{4.6}$$

Величина I_z, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения (оси z), называется моментом инерции системы относительно этой оси. Момент инерции I_z есть мера инертности при вращательном движении, аналогичная массе при поступательном движении. Выражение (4.5) показывает, что при вращении системы её момент импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции системы относительно этой оси на угловую скорость.

Кинетическая энергия E_k вращающегося твердого тела как системы материальных точек определяется выражением

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\omega r_i\right)^2,$$

где m_i, υ_i – масса и скорость i-й частицы.

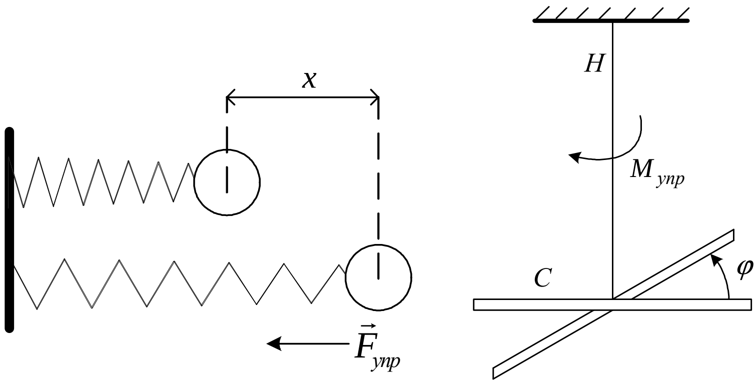
Здесь используется связь линейной υ_i и угловой скорости: ω – $\upsilon_i = \omega \, r_i$. Так как угловая скорость ω вращения этих элементов одинакова, то

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \upsilon_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \, r_i^2 = \frac{I_z \, \omega^2}{2}. \tag{4.7}$$

С учетом формулы (4.5) выражение (4.7) для кинетической энергии вращающегося твердого тела может быть записано также через L_z и I_z:

$$E_k = \frac{I_z \omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I_z} = \frac{L_z \omega}{2}. \qquad (4.8)$$

Приведенные понятия и законы динамики вращательного движения используются в данной работе при изучении параметров крутильного маятника (рис. 4.3).



а б

Рис. 4.3

Крутильный маятник представляет собой стержень C, подвешенный на упругой металлической нити H (рис. 4.3б). Упругим элементом является нить. При повороте стержня на некоторый угол φ закручивается и металлическая нить. В ней возникает сила упругости и, соответственно, связанный с ней момент упругих сил $M_{\text{упр}}$. Опыт показывает, что величина упругого момента $M_{\text{упр}}$ пропорциональна углу закручивания φ: $M_{\text{упр}} \sim \varphi$. Коэффициент пропорциональности между величинами $M_{\text{упр}}$ и φ называется коэффициентом упругого кручения G:

$$M_{\text{упр}} = -G\varphi. \qquad (4.9)$$

Знак «минус» в формуле показывает, что момент силы сообщает маятнику обратное движение к положению равновесия. Если эту систему вывести из положения равновесия, повернув маятник на некоторый угол φ, и отпустить, то возникнут крутильные колебания.

Составим уравнение движения маятника на основе уравнения динамики вращательного движения. Согласно основному закону динамики вращательного движения момент силы M_z относительно оси z равен произведению момента инерции тела I_z относительно той же оси на его угловое ускорение ε:

$$M_z = I_z \varepsilon . \tag{4.10}$$

Угловое ускорение ε есть вторая производная угла вращения φ по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \tag{4.11}$$

Подставляя формулы (4.9) и (4.11) в выражение (4.10), получим равенство

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -G\varphi ,$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{G}{I_z}\varphi = 0 . \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний, которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 , \tag{4.13}$$

где $\omega_0^2 = G / I_z$.

Уравнение (4.13) описывает гармонические колебания. В нем ω_0 – циклическая частота колебаний, которая связана с периодом колебаний соотношением $\omega_0 = 2\pi / T$. Это позволяет получить формулу для периода крутильных колебаний маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G}}. \tag{4.14}$$

К формуле (4.14) можно прийти и без составления дифференциального уравнения. Крутильный маятник по всем характеристикам движения полностью аналогичен пружинному маятнику, который изучался в школьном курсе физики. Пружинный маятник представляет собой груз массой m, связанный с упругой невесомой пружиной, имеющей коэффициент упругости k (рис. 4.3а). Напомним три основные формулы.

1. При небольших растяжениях пружины x справедлив закон Гука – значение упругой силы $F_{\text{упр}}$ пропорционально деформации, т.е. изменению длины пружины x:

$$F_{\text{упр}} = -k\,x. \tag{4.15}$$

2. Потенциальная энергия в деформированном состоянии определяется формулой

$$E_p = \frac{k\,x^2}{2}. \tag{4.16}$$

3. Если пружинный маятник вывести из равновесия и предоставить самому себе, то он будет совершать гармонические колебания, период которых равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{4.17}$$

Крутильные колебания маятника совершаются под действием момента упругих сил $M_{\text{упр}}$ (4.9), который пропорционален углу закручивания φ. Формула (4.9) представляет собой закон Гука для деформации кручения; является полным аналогом формулы (4.15). Потенциальная энергия упругого закручивания нити определяется по формуле, аналогичной формуле (4.16):

$$E_p = \frac{G\,\varphi^2}{2}. \tag{4.18}$$

Выражение для периода крутильных колебаний можно записать по аналогии с формулой (4.17) в виде выражения (4.14):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G}}\,.$$

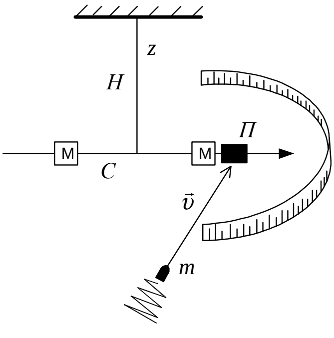
Аналогом массы m при поступательном движении является момент инерции маятника I_z относительно оси вращения z при вращательном движении.

Лабораторная установка

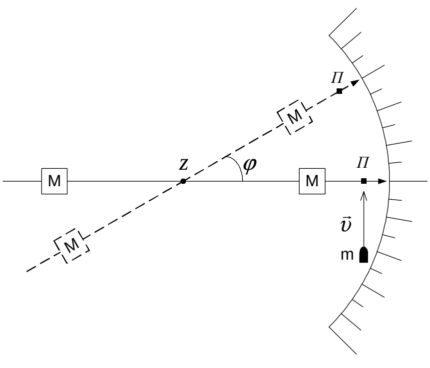
Схема лабораторной установки изображена на рис. 4.4а, ее вид сверху – на рис. 4.4б. Стержень C с двумя грузами массой M, находящимися на расстоянии R от центра, подвешен на упругой металлической нити H. Эта система образует крутильный маятник.

Из пускового устройства горизонтально вылетает пуля, которая попадает в пластину Π (мишень), закрепленную на стержне крутильного маятника. В результате удара стержень C поворачивается на угол φ, упруго закручивая нить на тот же угол, и затем совершает упругие крутильные колебания.

Для расчетов воспользуемся тем, что для системы маятник – пуля справедлив закон сохранения момента импульса, так как момента внешних сил относительно оси z в этой системе нет.



а



б

Рис. 4.4

Момент импульса крутильного маятника относительно оси вращения сразу после удара равен моменту импульса пули относительно той же оси до удара:

$$I_z\,\omega = m\upsilon r\,, \tag{4.19}$$

где I_z и ω – момент инерции крутильного маятника и его угловая скорость вращения сразу после удара; m и υ – масса пули и ее скорость непосредственно перед попаданием в мишень; r – расстояние от точки соударения до оси вращения.

В результате удара маятник приобретает кинетическую энергию (4.8). По мере закручивания нити кинетическая энергия маятника переходит в потенциальную энергию упругой деформации кручения нити (4.18). В момент остановки вся кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию:

$$\frac{L_z^2}{2I_z} = \frac{G\varphi^2}{2}\,, \tag{4.20}$$

где I_z – момент инерции; L_z – момент импульса крутильного маятника; φ – угол максимального отклонения маятника от положения равновесия.

Подставляя $L_z = I_z\,\omega = m\upsilon r$ из закона сохранения момента импульса (4.19) в формулу (4.20), получим скорость пули в момент удара о мишень:

$$\upsilon = \frac{\varphi}{mr}\sqrt{G\,I_z}\,. \tag{4.21}$$

В формулу (4.21) входят неизвестные величины G и I_z. Для их определения используем выражение для периода крутильных колебаний маятника (4.14):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{G}}\,.$$

За T_1 обозначено значение периода крутильных колебаний маятника в первоначальном положении (с двумя грузами массой M).

Выражения (4.14) и (4.21) образуют два уравнения с тремя неизвестными υ, G, I_z, остальные величины T_1, φ, m и r определяются экспериментально. Чтобы разрешить эти уравнения, необходимо еще одно уравнение, для составления которого проводится дополнительный опыт.

Если со стержня убрать два груза M , то момент инерции маятника уменьшится. Так как размеры грузов намного меньше расстояния R от оси вращения до центра масс грузов, то их можно считать материальными точками, момент инерции каждой из которых определяется формулой $M R^2$, где M – масса груза. В итоге момент инерции маятника без грузов будет равен $I_z - 2M R^2$, а период его крутильных колебаний T_2 определится так же, как T_1:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z - 2M R^2}{G}}\,, \qquad (4.22)$$

где I_z – момент инерции маятника с грузами.

Возведем формулы (4.14) и (4.22) в квадрат и вычтем из первой вторую:

$$T_1^2 - T_2^2 = 4\pi^2\,\frac{2M R^2}{G}\,.$$

В результате коэффициент упругого кручения нити будет равен

$$G = 4\pi^2\,\frac{2M R^2}{T_1^2 - T_2^2}\,. \qquad (4.23)$$

Выразим момент инерции I_z из формулы (4.14):

$$I_z = G\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2. \qquad (4.24)$$

Подставим в формулу (4.21) выражение для момента инерции I_z (4.24) и с учетом коэффициента упругого кручения G (4.23) получим

$$\upsilon = \frac{\varphi}{m r}G\left(\frac{T_1}{2\pi}\right) = 4\pi\,\frac{\varphi M R^2}{m r}\,\frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2}\,. \qquad (4.25)$$

Периоды крутильных колебаний маятника определяются по формуле $T = t / N$, где t – время, за которое совершается N колебаний: с грузами $T_1 = t_1 / N$, без грузов $T_2 = t_2 / N$. Число колебаний N считаем одинаковыми для каждого опыта.

Таким образом, для определения численного значения скорости пули υ необходимо: знать массу пули m, массу груза M; измерить расстояние от оси вращения до центра масс грузов R, расстояние от оси вращения до места соударения пули r, время, за которое совершается N крутильных колебаний маятника с грузами t_1 и без грузов t_2, угол максимального отклонения маятника от положения равновесия φ.

Порядок выполнения работы:

1. Из пускового устройства выстрелить пулей по мишени, закрепленной на стержне маятника. При этом на транспортирной шкале определить угол максимального отклонения маятника от положения равновесия φ и измерить время нескольких полных колебаний маятника N с грузами t_1 и без грузов t_2.

2. Измерить расстояние от оси вращения до центра масс грузов R, расстояние от оси вращения до места соударения пули r.

3. Провести несколько выстрелов (5–7 раз), измеряя φ, t_1, t_2, и найти средние значения $\varphi_{ср}$, $T_{1ср}$, $T_{2ср}$.

4. По формуле (4.25) вычислить скорость пули.

5. Рассчитать погрешность вычисления скорости пули по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t_1}{t_1}\right)^2},$$

где $\delta = t_1^2 - t_2^2$; $\Delta\delta = \sqrt{\left(2t_1\Delta t_1\right)^2 + \left(2t_2\Delta t_2\right)^2}$; ΔR, Δr, Δt_1, Δt_2 определить как погрешности прямых измерений (через среднеквадратичную ошибку).

6. Результаты занести в табл. 4.1.

Таблица 4.1

N	R, м	r, м	t_1, с	t_2, с	φ	υ, м/с	$\Delta\upsilon$, м/с
1 2 … 5–7							
Средн.			$t_{1ср}$ =	$t_{2ср}$ =	$\varphi_{ср}$ =		

Контрольные вопросы

1. Дайте определение моменту силы относительно оси.
2. Дайте определение моменту импульса частицы относительно оси.
3. Запишите уравнение моментов.
4. Как определяется момент инерции системы относительно оси?
5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
6. Получите дифференциальное уравнение крутильных колебаний маятника.
7. Получите формулу для периода крутильных колебаний маятника, используя аналогию колебаний пружинного и крутильного маятника.
8. Выведите расчетную формулу для скорости пули.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБРАЗЕЦ БЛАНКА ОТЧЕТА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Владивостокский государственный университет

Курс физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ПОЛНОЕ НАЗВАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВЫПОЛНИЛ

студент гр. ИБ-22-3
Фамилия И.О.

ПРОВЕРИЛ

Преподаватель
Фамилия И.О.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Приборы и принадлежности:
(таблица заполняется при наличии ее в описании к работе)

Название прибора	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Абсолютнаяприборная погрешность
Лабораторная установка «Маятник Максвелла»	–	–	–	–
Штангенциркуль	15 см	0,01 мм	–	0,01 мм

СХЕМА ОПЫТА:

Рисунок

схемы опыта

Обозначения на схеме:
1.
2.
3.

Основные формулы:

$$I = \frac{m\upsilon^2}{\omega^2}\left(\frac{2gh}{\upsilon^2} - 1\right),$$

$$I_{теор} = \frac{m_{д}\left(D^2 + d^2\right)}{8} + \frac{m_{ст}\, d^2}{8}.$$

Таблица измерений (пример заполнения таблицы):

№ п/п	t, с	h, м	I, кг·м^2	ΔI, кг·м^2	$I_{теор}$, кг·м^2
1					
…					
5					

Расчеты

Оценка погрешности измерений

Результат измерений с учетом погрешности

(пример)

I = (3,42±0,02) 10^{-3} кг·м^2.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для вуза: в 5 т. Т. 1. Механика / И.В. Савельев. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 340 с.: ил.

2. Бондарев, Б.В. Курс общей физики. Кн. 1. Механика / Б.В. Бондарев, Н.П., Калашников, Г.Г. Спирин. – Москва: Юрайт, 2023. – 354 с.

3. Физика: учебник / И.И. Молчанов, Н.А. Гуляева, Р.А. Водолаженко, Ж.В. Мекшенева. – Москва: Изд. дом ун-та «Синергия», 2024. – 248 с.

4. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – Москва: Изд. центр «Академия», 2014. – 560 с.

5. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие для вузов в 5 т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – Москва: Изд-во Физматлит, 2022. – 560 с. – ISBN 978-5-9221-1512-4

6. Пинский, А.А. Физика: учебник / А.А. Пинский, Г.Ю. Граковский; под общ. ред. Ю.И. Дика, Н.С. Пурышевой. – 3-е изд., испр. – Москва: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 560 с.

Учебное издание

Терлецкий Игорь Анатольевич

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

Редактор: И.Г. Шабунина
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Подписано печать: .10.2024. Формат 60×84/16.
Уч.-изд. л. 6,0. Усл.-печ. л. 5,24
Тираж 300 экз. (1–50) Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в ресурсном информационно-методическом центре ВВГУ
690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41

ISBN 978-5-9736-0736-4

9 785973 607364