Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Логика предикатов

Лекция 6

Алгебраические системы

Напомним, что *n-местным предикатом (отношением) на множестве A* называется любое подмножество множества A^n;

n*-местной алгебраической операцией* на множестве A называется функция $F: A^n \to A$, где $A^n = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle | a_1, \dots, a_n \in A\}$ – *n*-я декартова степень множества *A*.

Сигнатурой Σ называется совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности.

Константным символом или просто *константой* называется 0-местный функциональный символ.

Если α - функциональный или предикатный символ, то его местность обозначается через $\mu(\alpha)$. Часто *n*-местные предикатные и функциональные символы будем обозначать соответственно через $\mathrm{P}^{(n)}$ и $F^{(n)}$, возможно с индексами.

Если в рассматриваемой сигнатуре используются стандартные символы, такие, например, как + для операции сложения, ≤ для отношения порядка, | для отношения делимости, 0 для константного символа и другие, то мы просто пишем $\Sigma = \{\leq\}, \Sigma = \{\leq, +, \dots, 0\}$ и т.д.

Алгебраической системой сигнатуры Σ называется пара $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, где *A* – непустое множество и каждому *n*-местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие *n*-местный предикат (соответственно операция) на *A.*

Множество *A* называется *носителем,* или *универсумом* алгебраической системы $\mathfrak{A}$. Предикаты и функции, соответствующие символам из Σ, называются их *интерпретациями.* Обозначать интерпретации будем теми же буквами, что и соответствующие символы сигнатуры, возможно с индексом *A*. Заметим, что интерпретацией любого константного символа является некоторый элемент из *A.*

Примеры. 1) Набор $\langle N; +, \cdot \rangle$ является алгебраической системой с двумя двухместными операциями.

2) Набор $\langle N; +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ является алгебраической системой с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+$, $\cdot$, одноместной операцией $'$: $n \to n + 1$ и нуль-местной операций 1.

Примеры.

3) Набор $\langle Z;\ +, :\ , \sqrt{2}\rangle$ не является алгебраической системой, поскольку деление не является операцией на множестве Z, а элемент не принадлежит Z.

4) Набор $\langle P(U); \cup, \cap, ^{-}, U\rangle$ является алгебраической системой, где $P(U)$ – булеан множества U, т.е. множество всех подмножеств множества U.

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$=⟨A; Σ⟩, называется *подсистемой* системы $\mathfrak{B}$=⟨B; Σ⟩, (обозначается $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если выполняются следующие условия:

а) $A \subseteq B$;

б) для любого функционального символа $F^{(n)} \in \Sigma$ и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$F_A(a_1, a_2, \dots, a_n) = F_B(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

т.е. интерпретации символа F действуют одинаково на элементах из A;

в) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$ справедливо равенство $P_A = P_B \cap A^n$, т.е. предикат P_A содержит в точности те кортежи предиката P_B, которые состоят из элементов множества A.

Теорема 1. Если $\mathfrak{B} = \langle B;\ \Sigma \rangle$ - алгебраическая система, $X \subseteq \mathrm{B}$, $X \neq \emptyset$, то существует единственная подсистема $\mathfrak{B}$ *(X)*= $\langle B(X);\ \Sigma \rangle$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$ такая, что $X \subseteq \mathrm{B(X)}$ и $\mathfrak{B}$*(X)* $\subseteq \mathfrak{A}$ для любой подсистемы $\mathfrak{A} = \langle \mathrm{A};\ \Sigma \rangle$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$, для которой $X \subseteq \mathrm{A}$.

Подсистема $\mathfrak{B}$ *(X)* из теоремы 1 называется *подсистемой алгебраической системы* $\mathfrak{B}$*, порожденной множеством X.*

Для описания элементов подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ определим индукцией по построению понятие *терма* сигнатуры Σ:

1. переменные и константные символы из Σ суть термы;
2. если F_Σ - *n*-местный функциональный символ, $t_1, t_2, \dots, t_n$ - термы, то $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - терм;
3. никаких термов, кроме построенных по пп. 1,2, нет.

Множество всех термов сигнатуры Σ обозначается через $\mathrm{T}(\Sigma)$.

Под *сложностью* терма будем понимать число символов, входящих в терм.

Примеры

1) Термами сигнатуры $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$ будут, например, $0, x, x + y, z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$, а $x + y \leq (0 + x) \cdot x$ термом не является.

2) Если $\Sigma = \{\mathrm{f}^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$ - функциональная сигнатура, то выражения $h(\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3), g(x_2)), g(\mathrm{f}(h(x_1, x_2), x_1, g(x_2))$ – термы, а $h(x_1, \mathrm{f}(x_1, x_3))$ термом не является.