Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
А.Н. ТКАЛИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов-заочников специальности 230100
«Сервис транспортных и технологических машин
и оборудования»

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2005

ББК 22.11
Н 65

Рецензенты: Н.Ю. Голодная, доцент каф. ММ;
И.В. Пивоварова, ст. преп. каф. ММ

Никулина Л.С., Ткалич А.Н.
Н 65 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2005. – 52 с.

Практикум является методическим руководством для изучения общего курса высшей математики студентами-заочниками 1-го курса специальности 230100 «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования». В работе содержатся контрольные задания и методические указания к выполнению контрольных работ. Приводятся примеры решения типовых задач.

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в высшем учебном заведении. Математические методы широко используются для решения всевозможных технических задач, и поэтому их изучение необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом специальности.

Учебные планы специальности «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования» предусматривают изучение курса «Высшая математика». Объем и содержание этого курса определяются Государственными образовательными стандартами и не зависят от формы обучения.

Данное учебно-практическое пособие соответствует учебной программе курса «Высшей математики» для специальности СТ.

1. РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Общие рекомендации

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка и выполнение контрольных работ. В помощь студентам-заочникам в университете проводятся консультации, во время экзаменационных сессий читаются лекции, проводятся практические занятия. Однако студент должен помнить, что только при систематической самостоятельной работе помощь преподавателей университета окажется эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса служит экзамен.

1.1.1. Чтение учебника

Особое внимание следует обращать на определение основных понятий, формулировки теорем, подробно разбирать примеры, которые поясняют эти определения или ту или иную теорему.

Для того чтобы закрепить рассмотренный теоретический материал необходимо чтение учебника сопровождать решением задач. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, в вычислениях не следует заменять корни, числа π, e их приближенными значениями. По возможности следует делать проверку решения задачи. Например, решив систему линейных алгебраических уравнений, сделайте подстановку найденного решения в уравнения системы и убедитесь в правильности решения.

1.1.2. Контрольные работы

В процессе изучения курса высшей математики студент должен выполнить шесть контрольных работ: по три на первом и втором курсах соответственно. Контрольные работы студент должен выполнять самостоятельно, так как несамостоятельно выполненная контрольная работа не дает студенту возможности приобретения навыков решения задач, в результате чего он оказывается неподготовленным к сдаче экзамена.

Контрольные работы после их выполнения высылаются на проверку в университет. Прорецензированные контрольные работы студент должен предъявить преподавателю на экзамене. Без прорецензированных работ студент к экзамену не допускается.

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Алгебра

2.1.1. Определители и матрицы

Определителем 2-го порядка называется число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определителем 3-го порядка называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Матрицей называется прямоугольная таблица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ состоящая из m строк и n столбцов.

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица *C*, элемент которой стоящий в i-й строке и j-ом столбце равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы *A* на соответственные элементы j-го столбца матрицы *B*: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу столбцов. Соответствующее этой матрице число $\Delta = \det A$ называется определителем этой матрицы.

Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то для такой матрицы существует и притом единственная обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где *E*-единичная матрица (т.е. такая, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны нулю). Для матрицы размера 3х3 *обратная* матрица находится по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы, т. е. определитель 2-го порядка, получающийся из матрицы вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент, и взятый со знаком +, если сумма номеров строки и столбца четная, и со знаком -, если эта сумма нечетная.

Если в матрице выбрать произвольно одинаковое количество строк и столбцов и из элементов, стоящих на их пересечении, составить определитель, называемый минором, то наивысший порядок, отличного от нуля минора матрицы, называется ее *рангом*. Ранг легко вычислить, если с помощью элементарных преобразований привести матрицу к такому виду, когда ниже ее главной диагонали стоят нули. Тогда ранг матрицы будет равен числу ненулевых строк, т. е. числу строк, содержащих отличные от нуля элементы.

К элементарным преобразованиям относятся такие преобразования: а) сложение или вычитание ее строк, б) умножение строки на какое-нибудь, отличное от нуля число, и в) прибавление соответствующей строки к какой-либо другой ее строке.

Эти преобразования не меняют ранга матрицы.

2.1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Система уравнений $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. Тогда систему можно решить по формулам Крамера: $x = \dfrac{\Delta_X}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_Y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_Z}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы отличен от нуля, то систему можно решить и матричным методом по формуле $X = A^{-1}B$, где A – матрица системы, A^{-1} – ее обратная матрица, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов, а $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных.

2.1.3. Комплексные числа

Число $z=x+iy$, где x и y – действительные числа, а $i=\sqrt{-1}$, является *комплексным*. Эту форму записи комплексного числа принято называть *алгебраической формой* комплексного числа. Число x – это действительная часть, а y – мнимая часть комплексного числа.

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат *Oxy,* то всякому комплексному числу $z=x+iy$ может быть поставлена в соответствие точка $M(x;y)$ с абсциссой x и ординатой y. Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа. Он равен расстоянию от точки M до начала координат.

Угол φ, найденный из системы уравнений $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, называется аргументом комплексного числа.

Для всякого комплексного числа имеет место равенство, называемое *тригонометрической формой* комплексного числа:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) .$$

Число $\overline{z}=x-iy=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ называется *сопряженным* комплексному числу.

Возведение комплексного числа в степень производится по формуле Муавра: $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Извлечение корня из комплексного числа производят по формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $k=0,1,2,\dots,(n-1)$.

2.2. Векторная алгебра

2.2.1. Линейные операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок. Длина этого отрезка является длиной вектора. Векторы считаются равными, если у них одинаковые длины и они одинаково направлены.

Коллинеарными называют векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Компланарными называют векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{e}$ называется число $np_{\overline{e}}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi$,где φ-угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{e}$.

Всякий геометрический вектор может быть представлен единственным образом в виде $\overline{a}=a_X\overline{i}+a_Y\overline{j}+a_Z\overline{k}$, где векторы $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ образуют базис, а a_X, a_Y, a_Z – координаты вектора в этом базисе, которые совпадают с проекциями вектора на базисные векторы.

Длину вектора вычисляют по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2}$.

Числа $\cos\alpha = \dfrac{a_X}{|\bar{a}|}, \cos\beta = \dfrac{a_Y}{|\bar{a}|}, \cos\gamma = \dfrac{a_Z}{|\bar{a}|}$, где *α, β* и *γ* – углы между вектором $\bar{a}$ и координатными осями, называются *направляющими косинусами вектора.*

При сложении векторов их координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

Координаты вектора $\overline{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, находят по формуле $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Расстояние между точками *A* и *B* равно длине вектора $\overline{AB}$.

Координаты точки, делящей отрезок *AB* в данном отношении *λ*, находят по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} .$$

2.2.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения:

а) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$; б) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = 0$ – условие перпендикулярности векторов; в) $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

Если сила $\bar{F}$ перемещается из начала в конец вектора $\bar{S}$, то работа этой силы А= $\bar{F}\bar{S}$.

2.2.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, удовлетворяющий условиям:

а) длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах;

б) вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

в) тройка векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – правая, т. е. кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ с конца вектора $\bar{c}$ кажется происходящим против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения:

а) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$; б) $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$ – условие коллинеарности векторов.

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix}$.

$$S_{\text{ПАР}} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|, \quad \text{S}_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

2.2.4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов называется число $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах, если тройка векторов правая. Если тройка векторов левая, то смешанное произведение имеет противоположный знак.

Смешанное произведение в координатной форме имеет вид:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \\ c_X & c_Y & c_Z \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы три вектора были *компланарны*, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Объемы параллелепипеда и тетраэдра вычисляют по формулам:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|, \quad V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

2.3. Аналитическая геометрия

2.3.1. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+C=0$ – *общее* уравнение прямой;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно *нормальному* вектору (нормали) $\overline{n}=(A, B)$;

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в «*отрезках*», где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях;

4) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ – *каноническое* уравнение прямой, или уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно заданному вектору $\overline{a}=(m, n)$, называемому *направляющим* вектором прямой;

5) $x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$ – *параметрические* уравнения прямой;

6) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей *через две точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$;

7) $y=kx+b$ – уравнение прямой *с угловым коэффициентом* $k=tg\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси Ox, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy;

8) $y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение *пучка* прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Угол между прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то а) прямые *параллельны*, если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, б) *перпендикулярны*, если $A_1A_2+B_1B_2=0$ и в) *угол* φ между прямыми находят по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}$.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ соответственно, то а) прямые *параллельны*, если $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$; б) прямые *перпендикулярны*, если $m_1m_2+n_1n_2=0$; в) *угол* между прямыми находят по формуле $\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\,\overline{a_2}}{|\overline{a_1}||\overline{a_2}|}$.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то а) прямые *параллельны*, если $k_1=k_2$; б) прямые *перпендикулярны*, если $k_2=-\frac{1}{k_1}$; в) *угол* между прямыми находят по формуле $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находят по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2.3.2. Плоскость

Плоскость в декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz* может быть задана уравнением одного из видов:

1) $Ax+By+Cz+D=0$ – *общее* уравнение;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно *нормальному* вектору $\overline{n}=(A,B,C)$;

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей *через три точки.*

Угол между плоскостями.

Если плоскости P_1 и P_2 заданы соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то а) плоскости *параллельны*, если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$; б) *перпендикулярны*, если $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ и в) *угол* между плоскостями находят так же, как угол между прямыми, заданными общими уравнениями.

Расстояние от точки до плоскости: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2.3.3. Плоскость и прямая в пространстве

Прямую в пространстве задают уравнениями:

1) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ – *канонические* уравнения;

2) $x=mt+x_0,\quad y=nt+y_0,\quad z=pt+z_0$ – *параметрические* уравнения;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнения прямой, проходящей *через две точки*.

Угол между прямыми.

Прямые *параллельны*, если коллинеарны их направляющие векторы: $l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Прямые *перпендикулярны*, если $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, т.е. $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a_1}\,\overline{a_2}}{|\overline{a_1}||\overline{a_2}|}$.

Угол между прямой и плоскостью.

Прямая *параллельна* плоскости при условии, что ее направляющий вектор перпендикулярен к нормальному вектору плоскости, т.е. если $Am+Bn+Cp=0$.

Прямая *перпендикулярна* плоскости, если $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

Угол между прямой и плоскостью находят по формуле $\sin\varphi=\dfrac{|\overline{n}\cdot\overline{a}|}{|\overline{n}||\overline{a}|}$.

2.4. Элементы математического анализа

2.4.1. Пределы и непрерывность функций

Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от a, соответствующее значение функции $f(x)$ как угодно мало отличается от числа A.

Если число A есть предел функции при $x \to a$, то записывают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Условно записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ для всех значений x, достаточно мало отличающихся от a. Здесь M – произвольное положительное число. В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при* $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой при* $x \to a$.

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $1/f(x) \to 0$ при $x \to a$. Если же $f(x) \to 0$ при $x \to a$, то $1/f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующей теореме: если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Используются также следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ и } \lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x = \lim_{y \to 0}(1 + y)^{1/y} = e.$$

Если $x < a$ и $x \to a$, то условно пишут $x \to a-0$ и если $x > a$ и $x \to a$, то условно пишут $x \to a+0$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ называют *левосторонним* пределом функции в точке a, а $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ -*правосторонним* пределом функции в точке a.

Для того чтобы существовал предел функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если: 1) эта функция определена в точке x_0 и ее окрестности; 2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

3) этот предел равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из определения вытекает, что функция *непрерывна* в точке x_0, если выполнены условия: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Если нарушается условие непрерывности в точке x_0, то говорят, что в этой точке функция претерпевает разрыв.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она называется непрерывной на этом промежутке.

Если функция непрерывна на отрезке [a,b], то она на этом отрезке достигает своего наименьшего и наибольшего значений.

2.4.2. Дифференцирование функций одной переменной

Пусть функция *y=f(x)* определена на некотором промежутке. Рассмотрим точки x_0 – исходную и x – новую. Разности $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x) - f(x_0) = y - y_0$ называются соответственно *приращением* аргумента в точке x_0 и *приращением* функции в этой точке.

Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется *производной* функции в точке x_0 и обозначается y' или $f'(x_0)$.

Геометрически производная функции в точке совпадает с угловым коэффициентом $k = tg\alpha$ касательной к графику функции в этой точке.

Функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Производная $f'(x_0)$ представляет собой скорость изменения функции в точке x_0 относительно аргумента *x*.

Правила дифференцирования

Пусть *u=u(x)* и *v=v(x)* – дифференцируемые функции от *x*. Тогда

1) $(C)'=0$; 4) $(Cu)'=Cu'$;

2) $(u+v)'=u'+v'$; 5) $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

3) $(uv)'=u'v+uv'$;

4) если $y=f(u)$, где $u=u(x)$, т.е. $y=f(u(x))$, и функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'=f'(u)u'(x)$.

Таблица производных

Приведем формулы для вычисления производных сложных функций.

1. $(u^p)' = pu^{p-1}u'$, где p – действительное число.
2. $(a^u)' = a^u u' \ln a, \quad a > 0; \quad (e^u)' = e^u u'$.
3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} u', \; a > 0, \; a \neq 1; \quad (\ln u)' = \dfrac{1}{u} u'$.
4. $(sinu)'=cosu \cdot u'$.
5. $(cosu)'=-sinu \cdot u'$.
6. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$.
7. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$.
8. $(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$.
9. $(arctgu)' = -(arcctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} u'$.
10. $(shu)' = chu \cdot u'$.
11. $(chu)' = shu \cdot u'$.
12. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} u'$.
13. $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} u'$.

2.4.3. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование

Если каждому значению действительной переменной t из некоторого множества $D \subset R$ поставлен в соответствие вектор $\overline{r(t)}$, то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция* скалярного аргумента.

Задание вектор-функции $\overline{r(t)}$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координат вектора $\overline{r(t)}$. Принято обозначение $\overline{r(t)}$ ={ $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$}.

Линия, которую описывает в пространстве конец вектора $\overline{r(t)}$, называется *годографом* вектор-функции. *Производной вектор-функции* $\overline{r(t)}$ по аргументу t называется новая вектор-функция $\overline{r'(t)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$.

Имеет место формула вычисления производной вектор-функции: $\overline{r'(t)} = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}$. Производная вектор-функции есть вектор, направленный по касательной к годографу $\overline{r(t)}$ в сторону возрастания аргумента *t*.

Если *t*-время, то $\overline{r'(t)}$ есть вектор скорости конца вектора $\overline{r(t)}$.

2.4.4. Дифференцирование функций двух переменных

Частной производной функции двух переменных $z = f(x, y)$ по независимой переменной *x* называется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, вычисленный при постоянном *y*. Аналогично вводится производная по переменной *y* при постоянном *x*. Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

2.4.5. Интегрирование функций

Функция $F(x)$называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве *X*, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *C*-произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$.

3) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

4) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u=u(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C.$ В частности $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0.$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$. 11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$. 12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\, \dfrac{x}{a} + C$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$. 15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$. 17. $\int shx dx = chx + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$. 18. $\int chx dx = shx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$. 19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$. 20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ –дифференцируемые функции.

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где t – новая переменная, а $x=\varphi(t)$-непрерывно дифференцируемая функция.

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ >0 на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной линиями $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$.

Моменты и центры масс плоских кривых

Если дуга кривой задана уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$, и имеет плотность $\rho=\rho(x)$, то статические моменты этой дуги M_X и M_Y относительно осей координат равны

$$M_X = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx ,$$

$$M_Y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx .$$

Моменты инерции относительно осей координат вычисляют по формулам

$$J_X = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx ,$$

$$J_Y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx .$$

3. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

3.1. Алгебра и аналитическая геометрия

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x+2y+z=10, \\ 2x+y+z=20, \\ x+3y+z=30 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Решение. Составим из коэффициентов при неизвестных системы определитель и вычислим его, разложив по элементам первой строки. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1-3)-2(2-1)+(6-1)=1.$ Так как определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители, заменяя в определителе системы последовательно первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов системы.

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 20 & 1 & 1 \\ 30 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 30\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10(-2)-20(-1)+30\cdot 1 = 30.$$

Аналогично вычислим два других вспомогательных определителя.

$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 20 & 1 \\ 1 & 30 & 1 \end{vmatrix} = 20$ и $\Delta_Z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 30 \end{vmatrix} = -60$. Вычислим значения неизвестных по формулам $x = \dfrac{\Delta_X}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_Y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_Z}{\Delta}$. Имеем x=30, y=20 и z=-60.

Задание 2. Доказать совместность системы линейных уравнений $\begin{cases} x-3y+5z=-10, \\ 2x+y-z=5, \\ 4x+2y+3z=5 \end{cases}$ и решить ее двумя методами: 1) матричным и 2) методом Гаусса.

Решение. 1) Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда определитель системы отличен от нуля, имеет решение и притом только одно. Каждая квадратная матрица с определителем, отличным от нуля, имеет обратную матрицу и притом только одну. В таком случае систему трех уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения $AX=B$, где A – матрица системы, B – матрица-столбец свободных членов и X – матрица-столбец неизвестных. Решение системы находят из уравнения: $X=A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A.

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных системы: $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

$$\Delta=1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=1(3+2)+3(6+4)+5(4-4)=35.$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение найдем матричным методом. Для этого найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, где

A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам матрицы. Вычислим их.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=19,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-17,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-14,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=11,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7.$$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix}5 & 19 & -2\\ -10 & -17 & 11\\ 0 & -14 & 7\end{pmatrix}$.

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}5 & 19 & -2\\ -10 & -17 & 11\\ 0 & -14 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\ 5\\ 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-5\cdot 10+19\cdot 5-2\cdot 5\\ -10\cdot(-10)-17\cdot 5+11\cdot 5\\ 0\cdot(-10)-14\cdot 5+7\cdot 5\end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}35\\ 70\\ -35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, x=1, y=2 и z=-1.

2) Решим систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$. Произведем элементарные преобразования матрицы. Умножим первую строку на –2 и прибавим ее ко второй строке, затем умножим первую строку на –4 и прибавим ее к третьей строке. В результате получим следующую матрицу: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -11 & 25 \\ 0 & 14 & -17 & 45 \end{array}\right)$. Умножим теперь вторую строку этой матрицы на –2, сложим ее с третьей строкой, а затем разделим последнюю строку на –5. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -11 & 25 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -11 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Эта матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x-3y+5z=-10, \\ \quad 7y-11z=25, \\ \qquad\quad z=-1. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение этой системы z=-1, найдем y=2, затем подставляя в первое уравнение системы найденные значения неизвестных, получим x=1.

Задание 3. Даны вершины треугольника A(2;-2), B(3;-5) и C(5;1). Требуется:

1) написать уравнение стороны AB;

2) написать уравнение высоты $CД$ и найти ее длину;

3) написать уравнение медианы BM, проведенной к стороне AC, и найти угол между высотой $CД$ и медианой BM;

4) составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине B.

Решение. 1) Составим уравнение стороны AB, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставим сюда координаты точек A и B. Тогда имеем: $\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y+2}{-5+2}$.

Преобразуем это уравнение: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-3}$ или $-3(x-2)=y+2$ и окончательно $3x+y-4=0$. Мы получили уравнение стороны *AB* треугольника *ABC* в общем виде. Здесь коэффициенты 3 и 1 означают координаты нормального, т.е. перпендикулярного к этой прямой, вектора $\bar{n}$.

2) Высота *СД* перпендикулярна к стороне *AB*, так что вектор $\bar{n}=(3;1)$ является направляющим вектором высоты, т.е. вектором, параллельным высоте, поэтому уравнение высоты *СД* можно составить как уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$. Тогда уравнение прямой *СД* получаем, подставляя в это уравнение координаты вершины *C* треугольника и координаты направляющего вектора: $\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{1}$ или

$$x-5=3(y-1), \text{ или } x-3y-2=0.$$

Найдем длину высоты *СД*, т. е. расстояние от точки *C* до стороны *AB*. Для этого воспользуемся формулой расстояния от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Имеем: $d=\frac{3\cdot 5+1-4}{\sqrt{3^2+1}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$.

3) Медиана *BM* делит сторону *AC* в точке *M* пополам. Координаты точки *M* равны полусумме соответствующих координат точек *A* и *C*, т.е. M(3,5;-0,5). Тогда уравнение медианы находим по двум точкам: $\frac{x-3}{3{,}5-3}=\frac{y+5}{-0{,}5+5}$ или $\frac{x-3}{0{,}5}=\frac{y+5}{4{,}5}$, или $9x-y-32=0$.

Угол между медианой *BM* и высотой *СД* найдем по формуле угла между прямыми, заданными общими уравнениями. Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ соответственно, то угол между этими прямыми вычисляют по формуле $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, так что косинус угла между высотой и медианой будет равен $\frac{9\cdot 1+3\cdot 1}{\sqrt{9^2+1}\sqrt{1+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{82}\sqrt{10}}$. $\varphi=64°48'$.

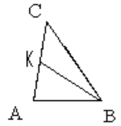
4) Известно, что биссектриса обладает свойством: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AK}{KC} = \lambda$.

Найдем длины сторон AB и CB.

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}.$$

Таким образом, $\lambda = \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{1}{2}$.



Координаты точки K найдем по формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{2}5}{1+\frac{1}{2}} = 3; \; y_K = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-2 + \frac{1}{2}1}{\frac{3}{2}} = -1; \quad K(3;-1).$$

Запишем уравнение биссектрисы как уравнение прямой, проходящей через две точки B(3;-5) и K(3;-1). Имеем $\dfrac{x-3}{3-3} = \dfrac{y+5}{-1+5}$ или $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+5}{4}$. Откуда получаем x-3=0 или x=3. Эта прямая, очевидно, перпендикулярна оси Ox, поэтому биссектриса внешнего угла при вершине B будет перпендикулярна этой прямой и, значит, параллельна оси Oy. При этом она проходит через точку B(3;-5). Следовательно, уравнение этой прямой – y=-5.

Задание 4. Даны вершины тетраэдра A(2;-3;5), B(0;2;1), C(-2;-2;3) и $Д$(3;2;4). Найти:

1) площадь грани ABC;

2) объем тетраэдра;

3) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины $Д$ на основание ABC;

4) уравнение высоты, опущенной из вершины $Д$ на основание ABC.

Решение. 1) Площадь треугольника ABC найдем по формуле $S = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$, где $\overline{AB} \times \overline{AC}$ – векторное произведение векторов. Координаты вектора находят, вычитая из координат его конца координаты начала: $\overline{AB} = (-2;5;-4); \overline{AC} = (-4;1;-2)$. Тогда

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} + 12\bar{j} + 18\bar{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|-6\bar{i}+12\bar{j}+18\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+12^2+18^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{504} = 2\sqrt{31}.$$

2) Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AД}\right|$, где под знаком модуля стоит смешанное произведение трех векторов, два из которых уже известны. Координаты вектора $\overline{AД} = (1;5;-1)$. Смешанное произведение векторов ищем по формуле:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AД} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 36.$$ Следовательно, объем тетраэдра V=6.

3) Из школьного курса геометрии известно, что $V_{тетр} = \frac{1}{3}S_{осн}h.$ Поэтому $h = \frac{3V_{тетр}}{S_{осн}} = \frac{3\cdot 6}{2\sqrt{31}} = \frac{9}{\sqrt{31}}$.

4) Высота тетраэдра, опущенная на основание треугольника *ABC*, – это прямая, проходящая через точку *Д*, направляющий вектор которой коллинеарен векторному произведению $\overline{AB}\times\overline{AC}$ =(-6;12;18). Следовательно, уравнение высоты тетраэдра имеет вид $\frac{x-3}{-6} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-4}{18}$ или

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-3}.$$

Задание 5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;0)$ и $B(2;1;1)$ перпендикулярно заданной плоскости $-x+y$-1=0.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна заданной плоскости, то нормаль к заданной плоскости коллинеарна к искомой. Обозначим через M произвольную точку плоскости. Тогда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$ лежат в плоскости, уравнение которой мы должны составить и, следовательно, $\overline{AM} = (x-1;\, y-2,\, z-0);\ \overline{AB} = (2-1;1-2;1-0);\ \bar{n} = (-1;1;0)$ компланарны. В таком случае смешанное произведение этих векторов равно нулю, т.е. равен нулю определитель третьего порядка, составленный из координат этих векторов: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Разложим определитель по элементам первой строки. Получим $x+y$-3=0. Это и есть уравнение плоскости, проходящей через две точки перпендикулярно данной плоскости.

Задание 6. Привести уравнение $2x^2+3y^2-16x-64=0$ кривой второго порядка к каноническому виду и найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис и, если кривая имеет асимптоты, уравнения асимптот.

Решение. Для того чтобы привести уравнение кривой к каноническому виду, выделим полный квадрат переменной x. Для этого произведем преобразования: $2(x^2-8x)+3y^2-64=0$; $2(x^2-8x+16-16)+3y^2-64=0$. Далее $2((x-4)^2-16)+3y^2-64=0$; $2(x-4)^2+3y^2-32-64=0$; $2(x-4)^2+3y^2=96$. Разделим теперь обе части уравнения на 96 и получим уравнение $\frac{(x-4)^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1$. Это каноническое уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса соответственно равны: $a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}, b=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Центр эллипса находится в точке $C(4;0)$. Эксцентриситет находят по формуле $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{48-32}}{4\sqrt{3}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Уравнения директрис эллипса имеют вид $x=-\frac{a}{e}, x=\frac{a}{e}$. Получаем x=-12 и x=12.

Задание 7. Записав комплексное число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме, вычислить z^5 и все значения $\sqrt[3]{z}$.

Решение. Комплексное число в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа, а φ – аргументом этого числа. Аргумент комплексного числа находят из уравнений $\cos\varphi=x/r$, $\sin\varphi=y/r$, где x – действительная, а y – мнимая часть комплексного числа. Имеем: $r=\sqrt{1+3}=2$, $\cos\varphi=-\frac{1}{2},\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из этих уравнений находим $\varphi=4\pi/3$. Тогда $z=-1-i\sqrt{3}=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$. Возведем это число в пятую степень по формуле Муавра $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, полагая n=5: $z^5=2^5(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3})=32(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$. Воспользовавшись табличными значениями тригонометрических функций, получим: $z^5=16(-1+i\sqrt{3})$.

Далее найдем все значения кубического корня из данного числа по формуле $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}),\ \ k=0{,}1{,}2.$

При k=0 имеем: $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})$.

При k=1 получаем еще одно значение корня

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{4\pi/3+2\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi/3+2\pi}{3})=$$

$$=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}).$$

Наконец, при k=2 имеем последнее значение кубического корня $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9})$.

3.2. Элементы математического анализа

3.2.1. Пределы и непрерывность функций

Задание 8. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-18}{x^2-6x+9}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2}$.

Решение. В первом случае мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределенности почленно разделим числитель и знаменатель дроби на x. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{3}{3}=1$, так как $1/x$ и $2/x$ при $x\to\infty$ являются бесконечно малыми, т.е. стремятся к нулю.

Во втором случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители: $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-18}{x^2-6x+9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{2(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}=2\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x-3}=\infty$, так как при $x\to3$ знаменатель дроби является бесконечно малой, а числитель стремится к значению 6.

В третьем случае имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{u(x)\to0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$, для чего преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\sin 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=12\,.$$

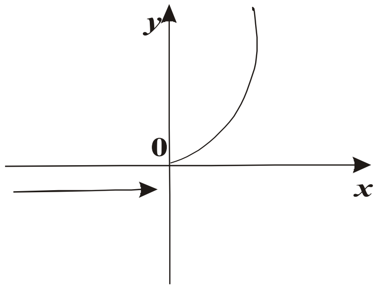
Задание 9. Дана функция $y=\begin{cases}-1, x<0,\\ x^2, 0\le x\le 1,\\ 3x-2, x>1.\end{cases}$ Исследовать ее на непрерывность и схематически построить график.

Решение. Известно, что элементарные функции непрерывны в области определения. Значит, функция непрерывна в каждом из интервалов (-∞,0), (0,1), (1,∞), где непрерывны функции –1, квадратичная и линейная функции. Функция у может претерпевать разрыв в точках перехода от одного аналитического выражения к другому, т.е. в точках 0 и 1. Исследуем поведение функции в этих точках.

Функция y=*f*(x) непрерывна в точке x_0, если выполняется условие: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции при *x*, стремящемся к нулю. $\lim\limits_{x\to -0} y=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1,\ \lim\limits_{x\to +0} y=\lim\limits_{x\to +0} x^2=0,\ y(0)=x^2\Big|_{X=0}=0.$ Так как левосторонний и правосторонний пределы не совпадают, то функция в точке 0 претерпевает разрыв первого рода со скачком $y=f(+0)-f(-0)=0-(-1)=1$.

Исследуем теперь поведение функции в точке *x*=1. Найдем пределы функции при *x*→1 слева и справа и вычислим значение функции в этой точке. Имеем: $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1+0}(3x-2)=1$`.

Значение функции в точке *x*=1равно 1. Левосторонний и правосторонний пределы функции равны и совпадают со значением функции в этой точке. В таком случае функция в точке *x*=1 непрерывна. В заключение построим график функции:



3.2.2. Производные функций

Задание 10. Вычислить производные данных функций:

а) $y = x^2 \ln(3x+1)$; б) $y = \sin^5(x^3)$

в) $x + y = e^y$ г) $y = \sqrt[x]{x}$.

Решение. В первом случае функция представляет собой произведение двух сомножителей. Тогда производную этой функции следует брать по формуле дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$. Так что производная данной функции $y' = 2x\ln(3x+1) + x^2 \dfrac{1}{3x+1} 3$.

Окончательно имеем $y' = 2x\ln(3x+1) + \dfrac{3x^2}{3x+1}$.

Производную следующей функции вычислим как производную степенной функции с основанием $\sin(x^3)$, которое в свою очередь является сложной функцией. Таким образом, имеем $y' = 5\sin^4(x^3)(\sin(x^3))' = 5\sin^4(x^3)\cos(x^3)(x^3)' =$
$= 5\sin^4(x^3)\cos(x^3)3x^2 = 15\sin(x^3)\cos(x^3)x^2$.

В третьем случае функция задана неявно. Продифференцировав обе части уравнения по *x*, получим $(x + y)' = (e^y)'$. Так как *y* зависит от *x*, то имеем $1 + y' = e^y y'$. Из этого уравнения выразим производную, решив уравнение относительно *y*'. Тогда $y' = \dfrac{1}{e^y - 1}$.

Производную последней функции найдем методом логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем обе части уравнения $y = \sqrt[x]{x}$. Получим $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln x$ или $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$. Продифференцируем обе части этого соотношения по переменной *x* с учетом того, что *y* зависит от *x*. Тогда $\dfrac{1}{y} y' = \dfrac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Отсюда получим $y' = y \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \sqrt[x]{x} \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Задание 11. Функция *y*=*y*(*x*) задана параметрически $x = 3t - t^2$, $y = 3t^2$.

Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Решение. Для вычисления производных воспользуемся формулами:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}$. Имеем $\dfrac{dy}{dt}=6t,\dfrac{dx}{dt}=3-2t$. Следовательно, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6t}{3-2t}$. Найдем теперь производную функции $\dfrac{6t}{3-2t}$ как производную частного и разделим результат на 3-2*t*. Окончательно получим $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{18}{(3-2t)^3}$.

Задание 12. Дано уравнение движения $\overline{r(t)}=\bar{i}-4t^2\bar{j}+3t^2\bar{k}$. Определить траекторию движения, скорость и ускорение в момент времени t=5.

Решение. Из уравнения движения имеем $x=1, y=-4t^2, z=3t^2$. Отсюда выразим параметр: $t^2=\dfrac{y}{-4}, t^2=\dfrac{z}{3}, t^2=\dfrac{x-1}{0}$. А теперь исключим параметр из уравнений, приравняв их правые части. Получим уравнения траектории движения $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{3}$, откуда видим, что траектория движения является прямой.

Скорость движения $\overline{v(t)}=\dfrac{d\overline{r(t)}}{dt}=-8t\bar{j}+6t\bar{k}$, а величина скорости равна $\left|\overline{v(t)}\right|=\sqrt{(-8t)^2+(6t)^2}=10t$. Тогда в момент времени *t*=5 величина скорости равна 50.

Ускорение движения находится как вторая производная $\overline{r(t)}$. Тогда $\overline{a(t)}=\dfrac{d^2\overline{r(t)}}{dt^2}=-8\bar{j}+6\bar{k}$, величина ускорения $\left|\bar{a}(t)\right|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$. Следовательно, и в момент времени *t*=5 величина ускорения равна 10.

Задание 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4x^2y-x^3y-x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми *x*=0, *y*=0 и *x*+*y*=6.

Решение. Найдем критические точки функции в области *D*, ограниченной прямыми. Для этого приравняем к нулю частные производные функции по обеим переменным: $\begin{array}{l} z'_X=8xy-3x^2y-2xy^2, \\ z'_Y=4x^2-x^3-2x^2y. \end{array}$ Имеем систему двух уравнений $\begin{cases} 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$ Вынесем за скобки множитель xy в первом и x^2 во втором уравнении соответственно. Тогда получим $\begin{cases} xy(8-3x-2y) = 0, \\ x^2(4-x-2y) = 0. \end{cases}$ Но из условия задачи ясно, что множители xy и x^2 могут быть равны нулю только на границе области. Во внутренних же точках области нулю могут быть равны только множители 8-3x-2y и 4-2x-2y. Следовательно, критические точки ищем из системы $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим 2x=4, x=2. Подставляя x=2 во второе уравнение, получим 2y=2 и y=1. Так что точка M(2;1) – критическая. Очевидно, она находится внутри области D.

Вычислим значение функции в этой точке: $z\big|_M = 4\cdot 2^2 - 2^3 - 2^2 = 4$.

Исследуем поведение функции на каждом из участков границы области. При x=0 имеем z=0. При y=0 снова z=0. Рассмотрим теперь функцию на отрезке прямой x+y=6, заключенном между осями координат. Подставим в уравнение функции z вместо y уравнение прямой y=6-x:

$$z = 4x^2(6-x) - x^3(6-x) - x^2(6-x)^2 = 24x^2 - 10x^3 + x^4 -$$

$$- x^2(36 - 12x + x^2) = 2x^3 - 12x^2.$$

Мы получили уравнение функции одной переменной, где переменная x изменяется на промежутке [0,6]. Найдем критические точки этой функции. Так как $z' = 6x^2 - 24x$, то производная обращается в нуль при x=0 и x=4. Но точка x=0 угловая и не является критической, поэтому вычислим значение функции в точке x=4 и на концах промежутка [0,6], т. е. в точках x=0 и x=6. Но при x=0 значение функции уже найдено. Поэтому находим $z\big|_{X=4} = -64; z\big|_{X=6} = 0$. Выбираем среди найденных значений функции наименьшее в точке M(2;1) и наибольшее в точке (4;2): $\max\limits_D z = z(M) = z(2;1) = 4;\ \min\limits_D z = z(4;2) = -64$.

Задание 14. Найти производную функции $z = xy^3$ в точке $M(\frac{1}{2};2)$ в направлении градиента этой функции.

Решение. Производная функции в данной точке по направлению вектора $\bar{l}$ определяет скорость изменения функции в указанном направлении. Если направление вектора совпадает с направлением градиента, то эта скорость будет наибольшей, так как градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции. Это наибольшее значение производной равно $\left|\overline{gradz}\right|$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial l}=\left|\overline{gradz}\right|$, где $\overline{gradz}=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^3, \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2$. Вычислим градиент в точке M. $\left.\overline{gradz}\right|_M=(y^3\bar{i}+3xy^2\bar{j})_M=8\bar{i}+6\bar{j}$.

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial l}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$.

3.2.3. Неопределенный интеграл

Задание 15. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$.

Решение. Используя свойства интеграла, преобразуем интеграл к виду $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx=\int\frac{a-2\sqrt{ax}+x}{\sqrt{ax}}dx=\int\frac{a}{\sqrt{ax}}dx-2\int dx+\int\frac{x}{\sqrt{ax}}dx$. Сведем далее первый и последний интегралы к табличным. Для этого сократим подынтегральные выражения и вынесем за знаки интегралов постоянные множители. Тогда имеем $\sqrt{a}\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\int x^{\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{ax}-2x+\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}+C$.

Задание 16. Вычислить $\int\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ и результат проверить дифференцированием.

Решение. Известно, что выражение $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является дифференциалом функции arcsin$x$. Тогда данный интеграл можно вычислить методом подведения функции под знак дифференциала: $\int\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\arcsin^4 x\,d(\arcsin x)=\frac{\arcsin^5 x}{5}+C$.

Проверим результат интегрирования дифференцированием. Вычислим производную от получившегося выражения. $(\frac{\arcsin^5 x}{5})'=\frac{1}{5}5(\arcsin^4 x)(\arcsin x)'=\arcsin^4 x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. А это выражение совпадает с подынтегральной функцией, что означает, что мы правильно нашли первообразную подынтегральной функции и, следовательно, неопределенный интеграл.

Задание 17. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

Решение. Данный интеграл от выражения, содержащего квадратный трехчлен, вычислим, выделяя под знаком квадратного корня полный квадрат. Тогда данный интеграл сводится к следующему интегралу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-6x+9)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3)+C .$$

Задание 18. Вычислить $\int \cos^5 xdx$.

Решение. Для того чтобы свести этот интеграл к табличному, по правилу интегрирования тригонометрических функций необходимо отделить от нечетной степени косинуса его первую степень, а затем оставшуюся четную степень выразить через синус. Тогда получим:

$$\int \cos^5 xdx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos xdx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x) = \int d(\sin x) - 2\int \sin^2 xd(\sin x) +$$

$$+ \int \sin^4 xd(\sin x) = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Замечание. При вычислении интеграла использованы формулы:

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x; d(\sin x) = \cos xdx; \int du = u+C, \int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1}+C .$$

Задание 19. Найти неопределенный интеграл $\int (x^2+2x+3)\ln xdx$.

Решение. Этот интеграл вычислим по частям, используя формулу $\int udv = uv - \int vdu$. Введем обозначения: $u = \ln x, dv = (x^2+2x+3)dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int (x^2+2x+3)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+3x$, где под последним интегралом подразумевают одну первообразную (С не пишут). Подставляя все в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x^2+2x+3)\ln xdx = (\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\ln x - \int (\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\frac{dx}{x} =$$

$$= (\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - 3x + C .$$

Задание 20. Вычислить $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Решение. Для интегрирования правильной рациональной дроби разложим ее на простейшие дроби. Так как знаменатель дроби имеет двукратные мнимые корни, что соответствует тому, что множитель x^2+1 входит в знаменатель во второй степени, то: $\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$. Приведем выражение к общему знаменателю: $\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$ и приравняем числители $x^3-2x=Ax+B+Cx^3+Dx^2+Cx+D$. Многочлены, стоящие в правой и левой частях этого соотношения тождественно равны, т.е. равны коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях последнего соотношения. Таким образом, имеем уравнения для определения неизвестных коэффициентов *A, B, C* и *D*.

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 1=C \\ x^2 & 0=D \\ x & -2=A+C \\ x^0 & 0=B+D \end{array}$$

. Отсюда получаем: C=1, D=0, A=-3, B=0. Следовательно, подставляя найденные коэффициенты в разложение дроби на простейшие, получим

$$\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-3xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

3.2.4. Определенный интеграл

Задание 21. Вычислить определенный интеграл $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Применим метод замены переменной. Положим $\sqrt{x+1}=t$. Тогда $x=t^2-1,\ \ dx=2tdt$. Найдем пределы изменения переменной *t*. Если *x*=3,то *t*=2, *если* *x*=8, то *t*=3. Имеем

$$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int_2^3(t^2-1)dt=2(\frac{t^3}{3}-t)\Big|_2^3=2(\frac{3^3}{3}-3)-$$

$$-2(\frac{2^3}{3}-2)=10\frac{2}{3}.$$

Задание 22. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{1,6} \sin(x^2)dx$ по формуле Симпсона при n=4 и n=8.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})).$$

Если подынтегральная функция на [a,b] имеет непрерывную производную четвертого порядка, то погрешность формулы Симпсона $R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c), c \in [a, b]$, где h=(b-a)/n. Из-за трудности оценки четвертой производной подынтегральной функции этой формулой пользуются редко.

На практике применяют правило Рунге. Для этого выбирают число n кратное 2 и вычисляют приближенное значение интеграла по формуле Симпсона с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ (обозначим это приближенное значение интеграла I_n). Затем вычислим приближенное значение интеграла по формуле Симпсона с шагом, вдвое меньшим, и обозначим этот интеграл I_{2n}. За приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, вычисленное по формуле Симпсона с поправкой Рунге, принимают $I = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{15}$.

Погрешность этого результата приближенно оценивается величиной $\Delta = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15}$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции при n=4 с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ =(1,6-0)/4=0,4.

i	x_i	x_i^2	y_i=Sin(x_i^2)
0	0	0	0
1	0,4	0,16	0,1593
2	0,8	0,64	0,5972
3	1,2	1,44	0,9915
4	1,6	2,56	0,5494

Подставляя найденные значения подынтегральной функции в формулу Симпсона, получим $I_n = \int\limits_0^{1,6} \sin(x^2)dx = \frac{1,6-0}{3\cdot 4}(0+0,5494+2\cdot 0,5972+$

+4(0,1593+0,9915))=0,8462.

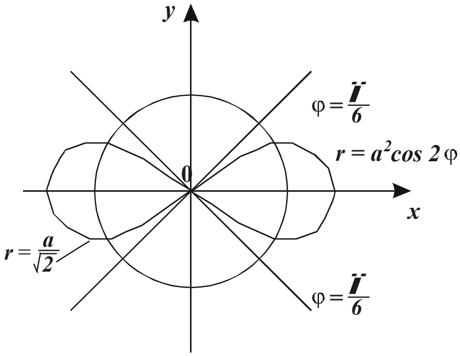
Составим таблицу значений функции при n=8 с шагом $h=\frac{b-a}{2n}$=(1,6-0)/8=0,2.

i	x_i	x_i^2	$y_i=\mathrm{Sin}(x_i^2)$	i	x_i	x_i^2	$y_i=\mathrm{Sin}(x_i^2)$
0	0	0	0	5	1,0	1,00	0,8415
1	0,2	0,04	0,0400	6	1,2	1,44	0,9915
2	0,4	0,16	01593	7	1,4	1,96	0,9252
3	0,6	0,36	0,3523	8	1,6	2,56	0,5494
4	0,8	0,64	0,5972				

$I_{2n} = \frac{1,6-0}{3\cdot 8}$ (0+0,5494+2(0,1593+0,5972+0,9915)+4(0,0400+0,3523+ +0,8415+0,9252))=0,8454. Теперь вычислим значение интеграла, используя поправку Рунге: $\int\limits_0^{1,6} \sin(x^2)dx$ = 0,8454+(0,8454-0,8463)/15=0,8453.

Задание 23. Найти площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, лежащей вне окружности $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Решение. Решив совместно уравнения кривых, получим: $a\sqrt{\cos 2\varphi}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, или $\sqrt{\cos 2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Откуда $\cos 2\varphi=\frac{1}{2}$, а $2\varphi=\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{6}$. В силу периодичности косинуса получим еще два значения угла φ: $\varphi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}, \varphi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$.



В силу симметрии фигуры найдем площадь ее четвертой части, находящейся в первой четверти. Эта площадь равна разности площадей секторов, ограниченных лемнискатой и окружностью. Площадь полярного сектора вычисляют по формуле $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$. Тогда

$$S/4=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/6} a^2\cos 2\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{a^2}{2}d\varphi=\left(\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi-\frac{1}{4}a^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6}=$$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$ Отсюда искомая площадь $S=\dfrac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Задание 24. Найти статические моменты относительно осей координат дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, лежащей в первой четверти.

Решение. Если дуга кривой задана уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ и имеет плотность $\rho=\rho(x)$, то статические моменты этой дуги вычисляют по формулам: $M_X=\int\limits_a^b \rho(x)y(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ и $M_Y=\int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Если плотность не указана, то предполагается, что $\rho(x)\equiv 1$.

Вычислим производную функции $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Получим $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Тогда статический момент дуги окружности относительно оси Ox будет равен значению

$$M_X = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + (-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}})^2}\,dx =$$

$$= R\int_0 \sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = R\int_0^R dx = Rx\Big|_0^R = R^2.$$

Произведя аналогичные вычисления, получим статический момент дуги окружности относительно оси Oy: $M_Y = \int_0^R x\sqrt{1 + (\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}})^2}\,dx$.

Окончательно $M_Y = R^2$.

Задание 25. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4}$ (или установить его расходимость).

Решение. Если $F(x)$-первообразная для функции $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{X \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, то несобственный интеграл сходится и равен $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$. Если же конечного предела первообразной не существует, то несобственный интеграл расходится.

Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\int_0^b \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\ln(x^2 + 4)\Big|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}(\ln(b^2 + 4) - \ln 4)$$

Этот несобственный интеграл расходится, так как $\lim\limits_{b \to +\infty}\ln(b^2 + 4) = \infty$.

Задание 26. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

Решение. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg\,\frac{b}{2} = \frac{1}{2} arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

4.1. Контрольная работа 1

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

1-10. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) матричным способом и 3) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x - y + z = -4, \\ 2x + 2y - z = 5, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} x - 2y + 5z = 24, \\ 5x + y - z = 5, \\ x + 2y + 3z = 12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + 2z = 10, \\ x + y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 12. \end{cases}$ **4**. $\begin{cases} 2x - y + z = 7, \\ 3x + \quad 2z = 8, \\ x + y + 2z = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + y + z = 7, \\ -2x + 2y + z = 3, \\ 2x + \quad 3z = 11. \end{cases}$ **6**. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 4, \\ 2x + \quad 3z = 9, \\ 3x - y - 4z = -10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x - y + 2z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ 6x - 3y - 5z = 5. \end{cases}$ **8**. $\begin{cases} 7x + y + z = 7, \\ x - 3y + 3z = 13, \\ 2x + 2y - 4z = -10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ -4x - y + 3z = -3. \end{cases}$ **10**. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 4x - 5y + z = 16. \end{cases}$

11-20. Треугольник *ABC* задан координатами своих вершин. Требуется:

1) написать уравнение стороны *AB*;
2) написать уравнение высоты *СД* и вычислить ее длину;
3) составить уравнение медианы *BM*, проведенной к стороне *AB*;
4) найти угол между высотой *СД* и медианой *BM*;
5) составить уравнение средней линии, параллельной стороне *AB*;
5) составить уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине *B*.

11. *A*(5;3), *B*(-11;-9), *C*(-4;15).

12. *A*(-7;2), *B*(5;-3), *C*(8;1).

13. A(1;-15), B(6;-3), C(2;0).
14. A(6;3), B(-10;-9), C(-3;15).
15. A(-9;6), B(3;1), C(6;5).
16. A(20;5), B(-4;12), C(-8;9).
17. A(-3;-7), B(2;5), C(-2;8).
18. A(10;1), B(-6;13), C(1;-11).
19. A(0;-9), B(5;3), C(1;6).
20. A(-8;3), B(4;-2), C(7;2).

21-30. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды; 4) длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 5) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

21. $A_1(1;2;0), A_2(3;0;-3), A_3(5;2;6), A_4(8;4;-9)$.

22. $A_1(2;-1;2), A_2(1;2;-1), A_3(3;2;1), A_4(-4;2;5)$.

23. $A_1(1;1;2), A_2(-1;1;3), A_3(2;-2;4), A_4(-1;0;-2)$.

24. $A_1(2;3;1), A_2(4;1;-2), A_3(6;3;7), A_4(7;5;-3)$.

25. $A_1(1;1;-1), A_2(2;3;1), A_3(3;2;1), A_4(5;9;-8)$.

26. $A_1(1;5;-7), A_2(-3;6;3), A_3(-2;7;3), A_4(-4;8;-12)$.

27. $A_{1(}(-3;4;-7), A_2(1;5;-4), A_3(-5;-2;0), A_4(2;5;4)$.

28. $A_1(-1;2;-3), A_2(4;-1;0), A_3(2;1;-2), A_4(3;4;5)$.

29. $A_1(4;-1;3), A_2(-2;1;0), A_3(0;-5;1), A_4(3;2;-6)$.

30. $A_1(1;-1;1), A_2(-2;0;3), A_3(2;1;-1), A_4(2;-2;-4)$.

31. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$.

32. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(4;6;-3) и прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

33. Найти уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

34. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(1;2;-3) параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

35. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;1;3)$ и $M_2(-1;4;0)$ параллельно прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3}$.

36. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

37. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;8)$ и прямую $\frac{x}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

38. Найти уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{2}$.

39. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;4)$ параллельно прямым $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

40. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;-2)$ и $M_2(3;0;-1)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{6}$.

41-50. Установить, какую кривую определяет уравнение, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет и уравнения асимптот, если у кривой есть асимптоты.

41. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

42. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$.

43. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

44. $3x^2+4y^2-18x-8y-5=0$.

45. $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$.

46. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$.

47. $4x^2-y^2-8x-6y-9=0$.

48. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

49. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

50. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

51-60. Записать комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме, по формуле Муавра вычислить z^3 и найти все значения $\sqrt[3]{z}$.

51. $z=8\sqrt{3}-8i$.

52. $z=-2-i2\sqrt{3}$.

53. $z=-\sqrt{3}+i$.

54. $z=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

55. $z=-2-i\sqrt{12}$.

56. $z=-2+i\sqrt{12}$.

57. $z=-2\sqrt{2}(1-i\sqrt{3})$.

58. $z=-1-i\sqrt{3}$.

59. $z=-2+2i$.

60. $z=-\sqrt{3}-i$.

4.2. Контрольная работа 2

Пределы и производные

61-70. Найти указанные пределы (не используя правило Лопиталя):

61. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-x+2}{2x^5+3x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{6x^2-16x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x\cdot\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x-1)-\ln(2x-3)\right].$

62. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x-1}{4x^6+4x^5-x}$; b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\ln(1+2x)}$.

63. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-x}{x^3+4x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\cdot tgx$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right].$

64. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-3x^2+2x}{x^5+x-5}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-14x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$.

65. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-3x^2+5x}{x^3+10}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\sin 6x\cdot ctg\,4x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+3)-\ln x\right].$

66. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^4+5x^2-2}{3x^4-4x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+16x+24}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$.

67. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+9}{x^2+x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim 2x\left[\ln(x+3)-\ln(x-3)\right].$

68. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+2}{2x^2+3x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-12x+10}{x^2-125}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3}$.

69. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^4+x^3+6x^2}{-x^4+x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{3x^2+4x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]$.

70. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+x^6+2}{-x^7-x^2+3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^2 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1-5x)}$.

71-80. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют, установить тип разрыва. Сделать чертёж.

71. $y=\begin{cases}x^2+1, x<1,\\ 2x, 1\le x\le 3,\\ x+2, x>3.\end{cases}$ **72.** $y=\begin{cases}x-3, x<0,\\ x-1, 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, x>4.\end{cases}$

73. $y=\begin{cases}2x^2, x<0,\\ x, 0\le x\le 1,\\ 2, x>1.\end{cases}$ **74.** $y=\begin{cases}x-1, x<0,\\ x^2, 0\le x\le 2,\\ 2x, x\ge 2.\end{cases}$

75. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, x<0,\\ 1, 0\le x\le 2,\\ x-2, x>2.\end{cases}$ **76.** $y=\begin{cases}\cos x, x<0,\\ 1-x, 0\le x\le 2,\\ x^2, x>2.\end{cases}$

77. $y=\begin{cases}\sin x, x<0,\\ x, 0\le x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$ **78.** $y=\begin{cases}x, x<0,\\ tgx, 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2, x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

79. $y=\begin{cases}0, x<0,\\ tgx, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x, x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ **80.** $y=\begin{cases}\cos x, x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, x>\pi.\end{cases}$

81-90. Найти производные данных функций $y(x)$:

81. а) $y=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$; b) $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)$;

в) $x\sin y-y\cos x=0$; г) $y=x^{\frac{2}{x}}$.

82. а) $y=\sqrt{x\cdot e^{-2x}+x^2}$; b) $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$;

в) $e^{xy}-x^2+y^3=0$; г) $y=x^{\arcsin x}$.

83. а) $y=\sqrt[3]{2e^{-x}-2^x+1}$; b) $y=\sqrt{\sin^3 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $tg\frac{y}{x}=5x+3$; г) $y=x^{\ln x}$.

84. а) $y=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}$; b) $y=\arccos\frac{x^2-1}{x^2}$;

в) $e^{x+y}=\sin(y-x)$; г) $y=x^{\sqrt{x}}$.

85. а) $y=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; b) $y=2^{\arcsin 3x}$;

в) $x^3+xy^2+y^3=a^2$; г) $y=x^{\cos x}$.

86. а) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$; b) $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$;

в) $e^y=x+y$; г) $y=x^{x^2}$.

87. а) $y=\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}$; b) $y=e^{tg^2 x}$;

в) $x^3+x^2y+y^2=0$; г) $y=x^{x^x}$.

88. а) $y=\frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}$; b) $y=x^4\cdot(1-2x^3)^2$;

в) $y^3=\frac{x-y}{x+y}$; г) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

89. а) $y=\sqrt{\frac{3\sin 2x-2\cos 3x}{5}}$; b) $y=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$;

в) $\ln x+e^{\frac{-y}{x}}=1$; г) $y=\sqrt[x]{x}$.

90. а) $y=\left(\frac{1+2x^3}{1-2x^3}\right)^5$; b) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

в) $arctg\,\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$; г) $y=(\cos x)^{\sin x}$.

91-100. Для функций, заданных параметрически, найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$:

91. $\begin{cases} x(t)=\arcsin t \\ y(t)=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ **92.** $\begin{cases} x(t)=arctgt \\ y(t)=\ln(1+t^2) \end{cases}$

93. $\begin{cases} x(t)=\ln t \\ y(t)=\frac{1}{1-t} \end{cases}$ **94.** $\begin{cases} x(t)=\ln(1+t^2) \\ y(t)=t^2 \end{cases}$

95. $\begin{cases} x(t)=a(t-\sin t) \\ y(t)=a(1-\cos t) \end{cases}$ **96.** $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{\cos t} \\ y(t)=tgt \end{cases}$

97. $\begin{cases} x(t)=a(\sin t-t\cos t) \\ y(t)=a(\cos t+t\sin t) \end{cases}$ **98.** $\begin{cases} x(t)=t\cdot\ln t \\ y(t)=\frac{\ln t}{t} \end{cases}$

99. $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{t+1} \\ y(t)=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$ **100.** $\begin{cases} x(t)=\ln(1+t^2) \\ y(t)=t-arctgt \end{cases}$

101-110. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанной области:

101. $z=x^3+y^3-9xy+27$ в квадрате $0\le x\le 4, 0\le y\le 4$.

102. $z=xy(4-x-y)$ в треугольнике $x\ge 1, y\ge 0, x+y\le 6$.

103. $z=2y^2-3x^2+12x-4y$ в треугольнике $x\ge 0, y\ge 0, 3x+4y\le 12$.

104. $z=x^2+2xy-4x+8y$ в треугольнике $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6$.

105. $z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4, 0\le y\le 4$.

106. $z=x^2+y^2$ в треугольнике $x\ge 0, y\ge 0, 2x+3y\le 6$.

107. $z=x^3+y^3-3xy$ в прямоугольнике $0\le x\le 2, 0\le y\le 3$.

108. $z=x^2+3xy+y^2-1$ в прямоугольнике $0\le x\le 3, 0\le y\le 2$.

109. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в треугольнике $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$.

110. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$.

111. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = arctg(xy^2)$ в точке $A(2;1)$.

112. Найти угол между градиентами функции $z = \ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $B(1;1)$.

113. Найти угол между градиентами функции $z = \arcsin xy$ в точках $A(1;0)$ и $B(0;4)$.

114. Найти производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в направлении градиента этой функции в точке $A(1;1)$.

115. Найдите наибольшую скорость изменения функции $z = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + 1$ в точке $A(1;2)$ и направление наибольшего возрастания функции.

116. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

117. Найти и построить градиент функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ в точке $P(1;\sqrt{3})$.

118. Найти и построить градиент функции $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке $P(1;1)$.

119. Найти угол между градиентами функции $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точках $A(1;\sqrt{3})$ и $B(0;1)$.

120. Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$.

121-130. Дано уравнение движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Определить траекторию движения, скорость и ускорение для момента $t = t_0$:

121. $\bar{r}(t) = (2t-1)\cdot\bar{i} + (-3t+2)\cdot\bar{j} + 4t\cdot\bar{k},\ t_0 = 10.$

122. $\bar{r}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\bar{i} + \frac{2t}{1+t^2}\cdot\bar{j} + \bar{k},\ t_0 = 1.$

123. $\bar{r}(t)=\sqrt{1-t^2}\cdot\bar{i}+\sqrt{1+t^2}\cdot\bar{j}-2\bar{k},\ t_0=0.$

124. $\bar{r}(t)=3t\cdot\bar{i}+(4t-t^2)\cdot\bar{j},\ t_0=5.$

125. $\bar{r}(t)=3\cos t\cdot\bar{i}+4\sin t\cdot\bar{j}+5\bar{k},\ t_0=0.$

126. $\bar{r}(t)=2\cos t\cdot\bar{i}+2\sin t\cdot\bar{j}+3t\cdot\bar{k},\ t_0=\dfrac{\pi}{2}.$

127. $\bar{r}(t)=(3t+1)\cdot\bar{i}+(2t-5)\cdot\bar{j}+(4t+3)\cdot\bar{k},\ t_0=5.$

128. $\bar{r}(t)=4cht\cdot\bar{i}-\bar{j}+3sht\cdot\bar{k},\ t_0=0.$

129. $\bar{r}(t)=2(t-\sin t)\cdot\bar{i}+2(1-\cos t)\cdot\bar{j},\ t_0=\pi.$

130. $\bar{r}(t)=(2t+2)\cdot\bar{i}+(2t+3)\cdot\bar{j}+t\cdot\bar{k},\ t_0=100.$

4.3. Контрольная работа 3

Интегрирование функций

131-140. Найти неопределенные интегралы, результаты проверить дифференцированием:

131. а) $\int(a+bx^3)^2\,dx$; b) $\int(2+5x)^9\,dx$;

в) $\int\dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int\dfrac{dx}{x^2-6x+13}$.

132. а) $\int\dfrac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$; b) $\int\sqrt{a-bx}\,dx$;

в) $\int x\sqrt{x^2+25}\,dx$; г) $\int\dfrac{dx}{x^2-2x+5}dx$.

133. а) $\int\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\cdot dx$**;** b) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

в) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; г) $\int\dfrac{dx}{5x^2-2x+1}$.

134. а) $\int\left(a+\dfrac{b}{x-a}\right)^2dx$; b) $\int(10+3x)^{10}\,dx$;

в) $\int\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$; г) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$.

135. а) $\int\frac{(x^2-x^5)^2}{\sqrt{x}}dx$;   b) $\int 4^{1-3x}dx$;

в) $\int x^2\cdot e^{-x^3}dx$;   г) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

136. а) $\int(e^x+1)^3dx$;   b) $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$;

в) $\int\sqrt[3]{3-7x}dx$;   г) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

137. а) $\int\frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$;   b) $\int\frac{dx}{3-5x^2}$;

в) $\int\frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$;   г) $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

138. а) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$;   b) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$;

в) $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$;   г) $\int\frac{dx}{\sqrt{-9x^2-6x+2}}$.

139. а) $\int 3^{2-5x}dx$;   b) $\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$;

в) $\int(a+bx)^5dx$;   г) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

140. а) $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$;   b) $\int\frac{\cos xdx}{a^2+\sin^2 x}$;

в) $\int\frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$;   г) $\int\frac{dx}{x^2-2x+3}$.

141-150. Найти неопределенные интегралы:

141. а) $\int\sqrt[3]{x}\cdot\ln xdx$;   b) $\int\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}dx$.

142. а) $\int(3x+1)\cdot 3^x dx$;   b) $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$.

143. а) $\int(x^2+3x+2)\cdot\ln xdx$;   b) $\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}$.

144. а) $\int(2x-1)\cdot 2^x dx$;   b) $\int\frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}dx$.

145. a) $\int \frac{x}{x^3+x^2-2}dx$; b) $\int (5x-3)\cdot e^{5x}dx$.

146. a) $\int (x^3-1)\cdot \ln x dx$; b) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$.

147. a) $\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)(x+1)}$; b) $\int (1-x)\cdot e^{3x}dx$.

148. a) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; b) $\int (2x+7)\cdot \ln x dx$.

149. a) $\int (5x-2)\cdot 5^x dx$; b) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx$.

150. a) $\int (2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$; b) $\int \frac{x+1}{2x^3-3x^2+x}dx$.

151-160. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

151. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}(a>1)$. **152.** $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}(a>1)$.

153. $\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{x^2+1}dx$. **154.** $\int_2^{\infty} \frac{\ln xdx}{x}$.

155. $\int_0^{\infty} e^{-kx}dx(k>0)$. **156.** $\int_0^{\infty} x\cdot \sin xdx$.

157. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$. **158.** $\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}dx$.

159. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$. **160.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

161-170. Вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона при $n=4$ и $n=8$.

161. $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ **162.** $\int_{0,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x\ \ +3,2}}$

163. $\int_{-1}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$ **164.** $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$

165. $\int_{0,7}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ **166.** $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$

167. $\int\limits_{1,6}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ **168.** $\int\limits_{1,4}^{3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$

169. $\int\limits_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$ **170.** $\int\limits_{1,7}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$

171. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащей вне окружности $r = a.$.

172. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sin 3\varphi$ и лежащей вне окружности $r = \frac{a}{2}.$

173. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2a\sin 2\varphi$ и лежащей вне окружности $r = a.$

174. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 6\cos 3\varphi$ и $r = 3\,(\mathrm{r} \geq 3).$

175. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a|\sin 2\varphi|.$

176. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 6\sin 3\varphi,\ \mathrm{r} = 3\,(\mathrm{r} \geq 3).$

177. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ \mathrm{r} = \sin\varphi\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$

178. Найти площадь части фигуры, ограниченной кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi,$ лежащей внутри окружности $r = \frac{a}{2}.$

179. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2a(1+\cos\varphi)$ и лежащей вне окружности r=a.

180. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4\sin^2\varphi.$

181. Найти статические моменты синусоиды $y = \sin x(0 \leq x \leq \pi)$ относительно оси Ox.

182. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t).$

183. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса R относительно её диаметра.

184. Найти статические моменты дуги астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t(0 \leq t \leq \pi)$ относительно осей координат.

185. Найти статический момент и момент инерции дуги цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right), 0 \le x \le a,$ относительно оси Ox.

186. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y=ach\frac{x}{a}$ от $x=-a$ до $x=a.$

187. Найти момент инерции относительно оси Ox дуги кривой $y=e^{x}(0 \le x \le 1).$

188. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей координат дуги кривой $y=\sqrt{x^{3}}\,(0 \le x \le 5).$

189. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x=a\cdot\cos^{3}t,\ \mathrm{y}=\mathrm{a}\cdot\sin^{3}t,$ расположенной в первом квадранте.

190. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей координат отрезка прямой линии $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$ заключенного между осями координат.

4.4. Правила выполнения контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы. Здесь же указывается название учебного заведения, дата отсылки контрольной работы и адрес студента.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

В случае незачета работы студент должен сделать исправления всех неверно решенных задач и выслать исправления вместе с уже проверенной тетрадью. Вносить исправления в сам текст прорецензированной работы не разрешается.

4.5. Литература

4.5.1. Основная литература

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1985.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980. ч. 1, 2.

4.5.2. Дополнительная литература

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1978.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1988.

4.5.3. Учебно-методические разработки

6. Дубинина Л.Я., Никулина Л.С., Пивоварова И.В. Курс лекций по высшей математике. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Никулина Людмила Сергеевна
Ткалич Анна Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов-заочников специальности 2310100
«Сервис транспортных и технологических машин
и оборудования»

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать .09.05. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л..
Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57