Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
Л.Я. ДУБИНИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

Часть 1

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2008

ББК 22.11
Н 65

Рецензенты: Н.Ю. Голодная, канд. мат. наук, доцент каф. ММ ВГУЭС;
И.В. Пивоварова, ст. преп. каф. ММ ВГУЭС.

Никулина Л.С., Дубинина Л.Я.
Р 34 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: практикум. Ч. 1. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 84 с.

Практикум содержит методические указания, список литературы и контрольные работы по математическому анализу для студентов первого курса заочной и очной форм обучения, изучающих предмет «Математический анализ».

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Курс математического анализа является фундаментом математического образования, имеющим важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, а также таких дисциплин, как «Вычислительная математика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», «Эконометрика».

Студент заочной формы обучения должен выполнять две контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра.

Вариант	Номера задач	
	Контрольная работа № 1	Контрольная работа № 2
1	1.1, 3.1, 5.1, 7.1, 8.1, 9.1, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1, 15.1.	16.1, 16.2, 16.3, 16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8, 16.9, 16.10.
2	1.2, 3.2, 5.2, 7.2, 8.2, 9.2, 11.2, 12.2, 13.2, 14.2, 15.2.	17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9, 17.10.
3	1.3, 3.3, 5.3, 7.3, 8.3, 9.3, 11.3, 12.3, 13.3, 14.3, 15.3.	18.1, 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.7, 18.8, 18.9, 18.10.
4	1.4, 3.4, 5.4, 7.4, 8.4, 9.4, 11.4, 12.4, 13.4, 14.4, 15.4.	19.1, 19.2, 19.3, 19.4, 19.5, 19.6, 19.7, 19.8, 19.9, 19.10.
5	1.5, 3.5, 5.5, 7.5, 8.5, 9.5, 11.5, 12.5, 13.5, 14.5, 15.5.	22.1, 22.2, 22.3, 22.4, 22.5, 22.6, 22.7, 22.8, 22.9, 22.10.
6	1.6, 3.6, 5.6, 7.6, 8.6, 9.6, 11.6, 12.6, 13.6, 14.6, 15.6.	23.1, 23.2, 23.3, 23.4, 23.5, 23.6, 23.7, 23.8, 23.9, 23.10.
7	1.7, 3.7, 5.7, 7.7, 8.7, 9.7, 11.7, 12.7, 13.7, 14.7, 15.7.	24.1, 24.2, 24.3, 24.4, 24.5, 24.6, 24.7, 24.8, 24.9, 24.10.
8	1.8, 3.8, 5.8, 7.8, 8.8, 9.8, 11.8, 12.8, 13.8, 14.8, 15.8.	26.1, 26.2, 26.3, 26.4, 26.5, 26.6, 26.7, 26.8, 26.9, 26.10.
9	1.9, 3.9, 5.9, 7.9, 8.9, 9.9, 11.9, 12.9, 13.9, 14.9, 15.9.	27.1, 27.2, 27.3, 27.4, 27.5, 27.6, 27.7, 27.8, 27.9, 27.10.
10	1.10, 3.10, 5.10, 7.10, 8.10, 9.10, 11.10, 12.10, 13.10, 14.10, 15.10.	29.1, 29.2, 29.3, 29.4, 29.5, 29.6, 29.7, 29.8, 29.9, 29.10.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1.1.Предел функции

При вычислении предела функции применяются формулы:

$\lim\limits_{x\to a} k = k$, где k – любое число, a – любое число или ∞;

$\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$;

$\lim\limits_{x\to a} f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \ldots \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$;

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$;

$\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)} = (\lim\limits_{x\to a} f_1(x))^{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ не равны нулю одновременно;

$\lim\limits_{f(x)\to\infty} \dfrac{k}{f(x)} = 0$; $\lim\limits_{f(x)\to 0} \dfrac{k}{f(x)} = \infty$, если $k \neq 0$;

$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ – первый замечательный предел;

$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ – второй замечательный предел.

Предполагается, что каждый предел существует. Иногда при вычислении пределов удобно использовать свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim tg\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim arctg\alpha(x) \sim \ln(1+\alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1$

при $\alpha(x) \to 0$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+5x^2+1}{2x^3-3x-4}$.

Разделим числитель и знаменатель на x^3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2+1}{2x^3-3x-4} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-1}{2x^3-4x+8}$.

Разделим числитель и знаменатель на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-1}{2x^3-4x+8}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}+\frac{8}{x^4}}=\frac{3}{0}=\infty\ .$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+3x-8}{x^3-1}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$5x^2+3x-8=0$,

$D=9-4\cdot5\cdot(-8)=169$, $x_1=\dfrac{-3+13}{10}=1$, $x_2=\dfrac{-3-13}{10}=-1{,}6$.

$$\lim_{x\to1}\frac{5x^2+3x-8}{x^3-1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1{,}6)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{5x+8}{x^2+x+1}=\frac{13}{3}\ .$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1-4)}{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{6\cdot4}=\frac{1}{24}\ .$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}\ .$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2-1}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2x+2-x}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\infty\ .$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{3x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{3x}(\frac{0}{0})=\frac{10}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}=\frac{10}{3}\cdot 1=\frac{10}{3}$ по первому замечательному пределу.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}(\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 4x}{x})^2=2\lim\limits_{x\to 0}(\frac{4\sin 4x}{4x})^2=$

$=2\cdot 4^2\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 4x}{4x})^2=2\cdot 16\cdot 1^2=32$ по первому замечательному пределу.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+5}{3x+2})^{2x-1}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+5}{3x+2})^{2x-1}(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3x+5}{3x+2}-1)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{3x+2})^{2x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{3x+2})^{\frac{3x+2}{3}\cdot\frac{3}{3x+2}\cdot(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{6x-3}{3x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{6-\frac{3}{x}}{3x+\frac{2}{x}}}=e^2$ по второму замечательному пределу.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(\frac{x+2}{x}))^x(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}\cdot 2}=$

$=\ln e^2=2$ по второму замечательному пределу.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{2x-1})^{x^2}$.

$$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{2x-1})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}})^{x^2}=2^{+\infty}=+\infty.$$

1.2.Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Для того, чтобы функция была непрерывна в этой точке необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Точка разрыва a функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$. Разность $h = \lim\limits_{x\to a+} f(x) - \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ называется скачком функции в точке a. Если $h = 0$, то точка a называется точкой устранимого разрыва.

Точка разрыва a функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ не существует или равен бесконечности.

При решении примеров используются также свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке a, то в этой точке непрерывны также функции $\varphi(x) \pm \psi(x)$ и $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Если, кроме того, $\psi(a) \neq 0$, то в точке a непрерывна функции $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(a)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.

В следующих примерах нужно исследовать функцию на непрерывность, то есть выяснить, есть ли у функции точки разрыва и, если есть, то какого рода.

Пример 12.

$y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$.

Разрыв возможен в точке $x = 0$, так как $f(0)$ не определено.

$\lim\limits_{x\to 0-} (1 - 2^{\frac{1}{x}}) = 1 - 2^{-\infty} = 1 - \dfrac{1}{2^{+\infty}} = 1 - 0 = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0+} (1 - 2^{\frac{1}{x}}) = 1 - 2^{+\infty} = -\infty$, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва второго рода.

Пример 13.

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}, x<-3,\\ x^2, -3\le x<1,\\ 3x-1, x\ge 1.\end{cases}$$

Разрывы возможны при $x=-3$ и $x=1$. $f(-3)=(-3)^2=9$, $\lim\limits_{x\to -3-}\dfrac{1}{x+3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -3+}x^2=9$, следовательно, точка $x=-3$ является точкой разрыва второго рода. $f(1)=3\cdot 1-1=2$, $\lim\limits_{x\to 1-}x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1+}(3x-1)=2$, следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода и скачок в этой точке $h=2-1=1$.

Пример 14.

$$y=\frac{\sin x}{x}.$$

$f(0)$ не определено, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ по первому замечательному пределу, следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода. Скачок в этой точке равен $h=1-1=0$, значит это точка устранимого разрыва. Доопределим функцию до непрерывности, то есть найдем непрерывную в точке $x=0$ функцию, которая при всех $x\ne 0$ совпадает с данной функцией. Такой функцией, очевидно, является функция

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\ne 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$$

1.3. Вычисление производной функции

1.3.1. Производная явно заданной функции

Для нахождения производной функции необходимо знать правила вычисления производной и таблицу формул дифференцирования. Пусть $u=u(x)$ и $\upsilon=\upsilon(x)$ – дифференцируемые в точке x функции; c, n – любые числа, $a>0$, $a\ne 1$. Справедливы следующие правила:

$c'=0$; $(u\pm\upsilon)'=u'\pm\upsilon'$; $(u\upsilon)'=u'\upsilon+u\upsilon'$; $(\dfrac{u}{\upsilon})=\dfrac{u'\upsilon-u\upsilon'}{\upsilon^2}$, если $\upsilon(x)\ne 0$; $(cu)'=cu'$.

Производная сложной функции.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x, причем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблица формул дифференцирования

1. $C' = 0$	8. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
2. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \ln au'$	10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3a. $(e^u)' = e^u u'$	11. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$	12. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4a. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	13. $(chu)' = shu \cdot u'$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	14. $(shu)' = chu \cdot u'$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	15. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
7. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	16. $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

1.3.2. Производные высших порядков

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$. Тогда ее производная $f'(x)$ в этом интервале является функцией x. Пусть эта функция также имеет производную в $(a;b)$. Эта производная называется *второй производной* или *производной второго порядка функции* $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$. При этом $f'(x)$ называется *первой производной* или *производной первого порядка функции* $f(x)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, производной n-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x называется *первая производная* производной (n – 1)-го порядка функции $y = f(x)$ при условии, что в точке x существуют все производные от первого до n-го порядков. Обозначение: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

1.3.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана параметрически уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (\alpha;\beta)$. Предположим, что функции $x(t)$, $y(t)$ имеют производные на $(\alpha;\beta)$ и функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi(x)$, которая также имеет производную в соответствующих точках x. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, $t = \varphi(x)$, t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \varphi'(x)$. По теореме о дифференцировании обратной функции $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x'_t}$. Учитывая это, получаем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Если существует y''_x, то рассуждая аналогично, получаем $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Вообще, $y^{(n)}_x = \dfrac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}$ при условии, что все производные от первого до n-го порядка существуют.

1.3.4. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть значения переменных x и y связаны уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале $(\alpha;\beta)$, такая, что уравнение (1) при постановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество, то говорят, что уравнение (1) задает функцию $y = f(x)$ неявно или что функция $y = f(x)$ есть неявная функция.

Укажем правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, то есть, не представляя в виде $y = f(x)$, так как часто это преобразование бывает технически сложным или невозможным.

Для нахождения производной $y_x^{'}$ неявной функции нужно продифференцировать по x обе части равенства (1), учитывая, что y есть функция от x, затем из полученного равенства выразить $y_x^{'}$.

Заметим, что производная неявной функции выражается через x и y, то есть получается равенство

$$y_x^{'} = \varphi(x, y)\ . \qquad (2)$$

Для вычисления второй производной неявной функции, нужно продифференцировать обе части равенства (2) по x и затем подставить выражение $\varphi(x, y)$ вместо $y_x^{'}$. Аналогично можно вычислить производные любого порядка неявной функции.

1.3.5. Логарифмическое дифференцирование

Функция вида $y = (u(x))^{\upsilon(x)}$ называется степенно – показательной. Для вычисления ее производной при условии, что производная существует, нужно сначала прологарифмировать функцию по любому основанию (обычно по основанию e). Затем нужно вычислить производную полученной неявной функции.

Рассмотренный прием называется логарифмическим дифференцированием. Он применяется не только для вычисления производных степенно-показательной функции, но и в случаях, когда аналитическое выражение функции содержит несколько множителей.

Пример 15. $y = \ln arctgx$.

$$y' = \frac{1}{arctgx} \cdot (arctgx)' = \frac{1}{(1 + x^2)arctgx}\ .$$

Пример 16. $y = \cos^3 x^2$.

$$y' = 3\cos^2 x^2 \cdot (\cos x^2)' = 3\cos^2 x^2(-\sin x^2)2x = -6x\sin x^2 \cos^2 x^2\ .$$

Пример 17. $y = \arcsin^4 e^{x^3}$.

$$y' = 4\arcsin^3 e^{x^3} \cdot (\arcsin e^{x^3})' = 4\arcsin^3 e^{x^3} \cdot \frac{e^{x^3} \cdot 3x^2}{\sqrt{1-e^{2x^3}}} = \frac{12x^2 e^{x^3} \arcsin^3 e^{x^3}}{\sqrt{1-e^{2x^3}}} .$$

Пример 18. Найти y''' для функции $y = \cos^2 x$.

$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$, $y' = -2\cos 2x$, $y''' = 4\sin 2x$.

Пример 19. Найти $y^{(n)}$ для функции $y = e^{3x}$.

$y' = 3e^{3x}$, $y'' = 3^2 \cdot e^{3x}$, $y''' = 3^3 \cdot e^{3x}$, …, $y^{(n)} = 3^n \cdot e^{3x}$.

Пример 20. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Вычислить y''_x .

$x'_t = -3\cos^2 t \cdot \sin t$, $y'_t = 3\sin^2 t \cdot \cos t$, поэтому

$$y'_t = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -tgt \; ; \; (y'_x)'_t = (-tgt)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t} .$$

Тогда $y''_x = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3\cos^2 t \sin t} = \dfrac{1}{3\sin t \cos^4 t}$.

Пример 21. Вычислить y'_x , если $y^5 + xy - x^2 = 0$.

Продифференцируем обе части по x . Получим

$5y^4 y' + y + xy' - 2x = 0$, откуда $y'(5y^4 + x) = 2x - y$ и $y' = \dfrac{2x-y}{5y^4+x}$.

Пример22. Вычислить y'_x , если $tg(x+y) = xy$.

Продифференцируем обе части по x . Получим

$$\frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y') = y + xy'$$

или $\dfrac{1}{\cos^2(x+y)} + \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot y' = y + xy'$,

или $\left(\dfrac{1}{\cos^2(x+y)} - x\right) \cdot y' = y - \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}$,

или $\dfrac{1 - x\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y)} \cdot y' = \dfrac{y\cos^2(x+y) - 1}{\cos^2(x+y)}$,

откуда $y' = \dfrac{y\cos^2(x+y) - 1}{1 - x\cos^2(x+y)}$.

Пример 23. Вычислить y'' , если $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Продифференцируем обе части по x , получим $2x + 2yy' = 0$, откуда

$y' = -\frac{x}{y}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x, получим $y'' = -\frac{y - xy'}{y^2}$ или $y'' = \frac{xy' - y}{y^2}$. Подставляя $-\frac{x}{y}$ вместо y', получаем $y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$.

Пример 24. Найти производную функции $y = (\sin x)^x$.

Логарифмируем функцию по основанию e: $\ln y = x \ln \sin x$. Дифференцируем обе части равенства по x: $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln \sin x + x ctg x$, отсюда $y' = y(\ln \sin x + x ctg x)$ или $y' = (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + x ctg x)$.

1.4. Применение производной к исследованию функции

1.4.1. Интервалы монотонности. Экстремумы

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если для любых значений $x_2 > x_1$ этого промежутка выполняется условие: $f(x_2) > f(x_1)(f(x_2) < f(x_1))$.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x, $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$.

Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами. Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности функции.

Приведем без доказательства необходимые теоремы.

Теорема (необходимое условие монотонности функции).

Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$, то для всех $x \in (a;b)$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

Теорема (достаточное условие монотонности функции).

Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$.

Теорема (необходимый признак существования экстремума функции).

Если дифференцируемая в точке c функция $y = f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точке, в которой ее производная не существует. Например, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке $x = 0$, хотя $f'(0)$ не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Однако не во всех критических точках функция имеет экстремум. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремумов, хотя $y'(0) = 0$.

Теорема (достаточный признак существования экстремума).

Если непрерывная на интервале функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках этого интервала, за исключением, может быть, критической точки c, принадлежащей этому интервалу, и если $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку c меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция в точке c имеет максимум (минимум).

Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента через критическую точку, то функция в этой точке не имеет экстремума.

1.4.2. Выпуклость и вогнутость графика функции

График дифференцируемой функции называется выпуклым (вогнутым) в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется точкой перегиба.

Теорема (достаточный признак выпуклости и вогнутости).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график на $(a;b)$ выпуклый (вогнутый).

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале $(a;b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$ и пусть точка $x \in (a;b)$ является абсциссой точки перегиба графика данной функции. Тогда $f''(x) = 0$.

Замечание. Могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции не существует, однако точка x_0 является абсциссой точки перегиба. Например, для функции $y = \sqrt[3]{x^5}$ $y'' = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ и $y''(0)$ не существует. Очевидно, что $y'' < 0$ при $x \in (-\infty;0)$ и $y'' > 0$ при $x \in (0;+\infty)$, то есть точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

1.4.3. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Для нахождения вертикальных асимптот, то есть асимптот, параллельных оси OY, надо найти точки разрыва функции II рода. Если x_0 – такая точка и хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ равен бесконечности, то прямая $x = x_0$ – вертикальная асимптота. Функция может иметь вертикальные асимптоты, проходящие через граничные точки её области определения.

Уравнение невертикальной асимптоты можно записать в виде $y = kx + b$. Коэффициенты k и b находим по формулам $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx)$. Если оба эти предела конечны, то невертикальная асимптота существует. Могут быть разные невертикальные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, либо может существовать только одна из них.

План исследования функции и построение графика.

Исследование функции удобно проводить по следующему плану.

1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность функции.
4. Исследование функции на непрерывность. Вертикальные асимптоты.
5. Невертикальные асимптоты.
6. Интервалы монотонности и экстремумы.
7. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

8. Дополнительные точки, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, периодичность (по мере необходимости).

9. Построение графика.

Подчеркнем, что пункт 8 не является необходимым. Его выполняют, если необходимо уточнить график.

Пример 25. Исследовать функцию $x-2arctgx$ и построить ее график.

1. Область определения: $(-\infty;+\infty)$.

2. Пусть $x=0$, тогда $y=0$. Пусть $y=0$, тогда $x-2arctgx=0$ – решить уравнение точно не удается.

Найдена точка $(0;0)$ пересечения графика с осями координат.

3. $y(-x)=-x-2arctg(-x)=-(x-2arctgx)=-y(x)$ – функция нечетная.

4. Функция непрерывна во всей области определения. Вертикальных асимптот нет.

5. Невертикальные асимптоты.

$y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2arctgx}{x}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2arctgx}{x})=1,$$

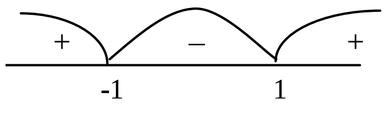
$$b=\lim_{x\to+\infty}(x-2arctgx-x)=-2\lim_{x\to+\infty}arctgx=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(x-2arctgx-x)=-2\lim_{x\to-\infty}arctgx=-2\cdot(-\frac{\pi}{2})=\pi.$$

$y=x+\pi$ – асимптота при $x\to-\infty$, $y=x-\pi$ – асимптота при $x\to+\infty$.

6. $y'=1-\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$; $1+x^2\neq 0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$.

$y'=0$, если $x^2-1=0$, откуда $x=-1$ и $x=1$ – критические точки. Нанесем критические точки на числовую прямую и определим знаки производной в образовавшихся интервалах.

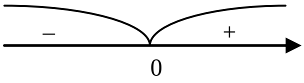


На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция возрастает, а на интервале (–1; 1)– убывает.

$$Y_{\max}(-1) = -1 - 2arctg(-1) = -1 + \frac{\pi}{2} \approx 0{,}57,$$

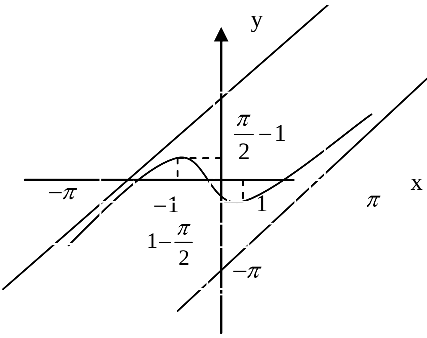
$$Y_{\min}(1) = 1 - 2arctg1 = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0{,}57$$

7. $y'' = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$; $y'' = 0$, если $4x = 0$, откуда $x = 0$ – критическая точка второго порядка. Нанесем ее на числовую прямую и определим знаки второй производной в образовавшихся интервалах.



На интервале $(-\infty;0)$ график выпуклый, а на интервале $(0;+\infty)$ – выгнутый. $(0;0)$ – точка перегиба.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - 2arctgx) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - 2arctgx) = -\infty$.



Пример 26. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ и построить график.

1. Область определения: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$, так как при $x = -2$ и $x = 2$ знаменатель дроби обращается в ноль.

2. Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$.

Пусть $y = 0$, тогда $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 0$, откуда $x = 0$.

$(0;0)$ – точка пересечения графика с осями координат.

3. $y(-x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = y(x)$ – функция четная.

4. Функция имеет разрывы в точках $x=-2$ и $x=2$, так как $f(-2)$ и $f(2)$ не определены.

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-2+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty, \qquad \lim_{x\to2+}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty,$$

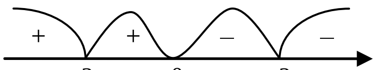
$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=-\infty$, следовательно, $x=-2$ и $x=2$ – точки разрыва II рода и прямые $x=-2$ и $x=2$ – вертикальные асимптоты.

5. Невертикальные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0,$$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1$, следовательно, прямая $y=1$- асимптота.

6. $y'=\dfrac{2x(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2}=-\dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$. $y'=0$, если $-8x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка. y' не существует, если $(x^2-4)^2=0$, откуда $x=-2$ и $x=2$ – критические точки.



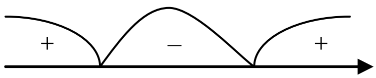
На интервалах $(-\infty;-2)$ и $(-2;0)$ функция возрастает, а на интервалах $(0;2)$ и $(2;+\infty)$ – убывает.

$Y_{\max}(0)=0$.

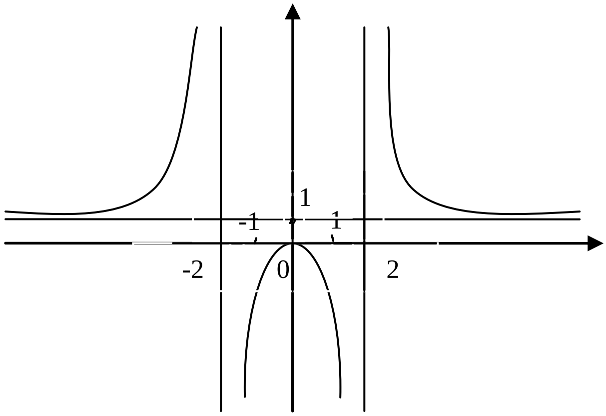
7. $$y''=-\frac{8(x^2-4)^2-8x\cdot2(x^2-4)\cdot2x}{(x^2-4)^4}=-\frac{8(x^2-4)-32x^2}{(x^2-4)^3}=$$

$$=-\frac{8x^2-32-32x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}.$$

$y''\neq0$ при $x\in(-\infty;\infty)$, y'' не существует, если $(x^2-4)^3=0$, откуда $x=-2$ и $x=2$ – критические точки второго порядка.



На интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$ – график функции вогнутый, а на интервале $(-2;2)$ – выпуклый. Точек перегиба нет.



2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

В заданиях 1 – 6 нужно вычислить указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

Задание 1.

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x+2}$,

1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-x+1}$,

1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-x}{2x^2-3x+2}$,

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x-3}{2x^2+1}$,

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{3x^2+x+2}$,

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-1}{x^2+x+2}$,

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+1}{3x+2}$,

1.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^3}{1+x+2x^2}$,

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+2}{2x^2+x+1}$,

1.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-2x^2}{2+4x^2}$,

1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{1-2x^3}$,

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x+1}{3x^3-5x+2}$,

1.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-2x^2}{x^2+3x+2}$,

1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{2-x^2}$,

1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x-1}$,

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+3}{x^3-1}$,

1.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+2x^3}{1+x-3x^3}$,

1.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+15}{6x-x^3}$,

1.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x-x^2}{1+2x^2}$,

1.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{2-x-3x^2}$,

1.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{5x^2-x+1}$,

1.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-3}{2x+1}$,

1.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x+2x^2}{2+4x^2}$,

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+1}{10x^2+2x-3}$, 1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-2x^2}{3+4x}$,

1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23+x-4x^3}{2-x^4}$,

1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+3x^2}{6-x^2}$,

1.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-4}{x^3+5}$,

1.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+2}{4x^2+x-3}$,

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+5x-3x^2}{4+5x^2}$.

Задание 2.

2.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-3x-1}{x^2-x}$,

2.2 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$,

2.3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$,

2.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2+5x}{3x^3-15x}$,

2.5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$,

2.6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$,

2.7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$,

2.8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$,

2.9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-3x+2}$,

2.10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$,

2.11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$,

2.12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$,

2.13. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$,

2.14. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$,

2.15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$,

2.16. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$,

2.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5-5x^3+x^2}{x^2-x}$,

2.18. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$,

2.19. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$,

2.20. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$,

2.21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$,

2.22. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$, 2.23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$,

2.24. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$,

2.25. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^3+1}$,

2.26. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3+x^2-x+2}$,

2.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-x^2+5x-33}{x^2+2x-15}$,

2.28. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$,

2.29. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}$,

2.30. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$.

Задание 3.

3.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

3.2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$,

3.3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$,

3.4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$,

3.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$,

3.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$,

3.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

3.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,

3.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^3}$,

3.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$,

3.11. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$,

3.12. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$,

3.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

3.14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{x+7}-3}$,

3.15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4+3x}}$,

3.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$,

3.17. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,

3.18. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$, 3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$,

3.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,

3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$,

3.22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$,

3.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$,

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$,

3.26. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$,

3.27. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$,

3.28. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+5}-x)$,

3.29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x})$,

3.30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

Задание 4.

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{2x}$,

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{x}$,

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$,

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{\sin 2x}$,

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$,

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{3x}$,

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,4x}{2\sin x}$,

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10}{tg\,5x}$,

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{\sin x}$,

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{\sin 3x}$,

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{tg\,2x}$,

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,11x}{\sin x}$,

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$,

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$,

4.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}$,

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$, 4.17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^3-1}$,

4.19. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sin(1-2x)}{4x^2-1}$,

4.21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$,

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{5x^2}$,

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, 4x}{\sin 3x}$,

4.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$,

4.29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$,

4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x}$,

4.20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$,

4.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 20x}{tg\, 4x}$,

4.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$,

4.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}$,

4.28. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx})$,

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$.

Задание 5.

5.1. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x}{1+x})^x$,

5.3. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x+1}{x+2})^{3x+2}$,

5.5. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}$,

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$,

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$,

5.11. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x+1}{x-3})^x$,

5.2. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^{x+1}$,

5.4. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{3x-4}{3x+5})^{\frac{x+2}{5}}$,

5.6. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2})^x$,

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{4x}$,

5.10. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{x}{3})^{\frac{1}{x-3}}$,

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$, 5.13. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{3x}$,

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

5.15. $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{x^2-9}}$,

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$,

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-2})^{x}$,

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$,

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)--\ln(x-2))$,

5.20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x}}$,

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)(\ln x--\ln(x+3))$,

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-4x)}$,

5.23. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{3}{x})^{\frac{2}{x-3}}$,

5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+3x^2)}$,

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2+x}{1+x})^{3x+1}$,

5.26. $\lim\limits_{x\to 6}(\frac{x}{6})^{\frac{1}{6-x}}$,

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{5x+1}{5x-2})^{3x}$,

5.28. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln x-\ln(x+5))$,

5.29. $\lim\limits_{x\to 5}(\frac{x}{5})^{\frac{3}{x-5}}$,

5.30. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\ln\frac{x-1}{x}$.

Задание 6.

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$,

6.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$,

6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$,

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$,

6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$,

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$,

6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$,

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$,

6.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$,

6.10.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$,

6.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$,

6.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$,

6.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$,

6.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$,

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$,

6.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$,

6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$,

6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$,

6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$,

6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$,

6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$,

6.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$,

6.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^5+(n-5)^2}$,

6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$,

6.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$,

6.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$,

6.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$,

6.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$,

6.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$,

6.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

В заданиях 7 и 8 нужно исследовать функции на непрерывность. Сделать чертеж.

7.1. $y=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+4, -1\le x<1, \\ 2x, x\ge 1; \end{cases}$

7.3. $y=\begin{cases} -x, x\le 0, \\ -(x-1)^2, 0<x<2, \\ x-3, x\ge 2; \end{cases}$

$$7.2.\ y=\begin{cases} x+2, x\le -1,\\ x^2+1, -1<x\le 1,\\ -x+3, x>1;\end{cases}$$

$$7.4.\ y=\begin{cases} \cos x, x\le 0,\\ x^2+1, 0<x<1,\\ x, x\ge 1;\end{cases}$$

$$7.5.\ y=\begin{cases} x, x\le 0,\\ x^2, 0<x\le 2,\\ x+1, x>2;\end{cases}$$

$$7.7.\ y=\begin{cases} -(x+1), x\le -1,\\ (x+1)^2, -1<x\le 0,\\ x, x>0;\end{cases}$$

$$7.9.\ y=\begin{cases} -2x, x\le 0,\\ x^2+1, 0<x\le 1,\\ 2, x>1;\end{cases}$$

$$7.11.\ y=\begin{cases} 1, x<0,\\ -\cos x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}+x, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$7.13.\ y=\begin{cases} x, x\le -1,\\ \dfrac{1}{2}, -1<x\le \dfrac{\pi}{6},\\ \sin x, x>\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$$

$$7.15.\ y=\begin{cases} 2, x<-1,\\ 2-2x, -1\le x\le 1,\\ \ln x, x>1;\end{cases}$$

$$7.17.\ y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}, x<0,\\ \cos 2x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ -x, 0>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$7.6.\ y=\begin{cases} -x, x\le 0,\\ \sin x, 0<x\le \pi,\\ x-2, x>\pi;\end{cases}$$

$$7.8.\ y=\begin{cases} -x^2, x\le 0,\\ tgx, 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2, x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$7.10.\ y=\begin{cases} -2x, x\le 0,\\ \sqrt{x}, 0<x<4,\\ 1, x\ge 4;\end{cases}$$

$$7.12.\ y=\begin{cases} x+2, x\le -2,\\ 2-x, -2<x<0,\\ x^2+2, x\ge 0;\end{cases}$$

$$7.14.\ y=\begin{cases} x^2-4, x<-1,\\ 3x, -1\le x\le 3,\\ 5, x>3;\end{cases}$$

7.16. $y=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, x<-2,\\ x, -2\le x<0,\\ 1-x, x\ge 0;\end{cases}$

7.27. $y=\begin{cases}x+1, x\le 0,\\ \cos x, 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2, x\ge\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

7.18. $y=\begin{cases}\cos x, x\le -\pi,\\ -1, -\pi<x\le 0,\\ \sqrt{x+1}, x>0;\end{cases}$

7.29. $y=\begin{cases}x^2, x\le 0,\\ \cos x, 0<x<\pi,\\ -1, x\ge\pi;\end{cases}$

7.20. $y=\begin{cases}x^2-4, x<-2,\\ 3x+2, -2\le x\le 2,\\ 12-x^2, x>2;\end{cases}$

7.22. $y=\begin{cases}x+2, x<-2,\\ 4-x^2, -2\le x\le 1,\\ 3-2x, x>1;\end{cases}$

7.19. $y=\begin{cases}x+\pi, x<-\pi,\\ \sin x, -\pi\le x<0,\\ 3-2x, x\ge 0;\end{cases}$

7.24. $y=\begin{cases}-3x, x\le 1,\\ x^2-4, 1<x<3,\\ 2x-5, x\ge 3;\end{cases}$

7.21. $y=\begin{cases}-2x, x<-1,\\ x^2+1, -1\le x\le 2,\\ x-1, x>2;\end{cases}$

7.26. $y=\begin{cases}2-x, x<0,\\ \sin x, 0\le x<\pi,\\ x-\pi, x\ge\pi;\end{cases}$

7.23. $y=\begin{cases}-3-x, x<-2,\\ x^2-5, -2\le x<3,\\ 7-2x, x\ge 3;\end{cases}$

7.28. $y=\begin{cases}2x, x<0,\\ \sin x, 0\le x\le\pi,\\ -3, x>\pi;\end{cases}$

7.25. $y=\begin{cases}2x+1, x<-1,\\ x^2, -1\le x\le 2,\\ 6-x, x>2;\end{cases}$

7.30. $y=\begin{cases}x^2-1, x<0,\\ \cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Задание 8.

8.1. $y=2^{\frac{1}{x-3}}+1$,

8.3. $y=4^{\frac{1}{3-x}}+2$,

8.5. $y = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1$,

8.25. $y = 7^{\frac{1}{x-3}} + 1$,

8.7. $y = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3$,

8.27. $y = 7^{\frac{3}{x+1}} - 2$,

8.2. $y = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1$,

8.29. $y = 8^{\frac{2}{x-3}} + 1$,

8.4. $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$,

8.10. $y = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1$,

8.6. $y = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2$,

8.12. $y = 2^{\frac{4}{x+3}} - 1$,

8.8. $y = 5^{\frac{2}{x-3}}$,

8.14. $y = 5^{\frac{1}{1-x}} - 1$,

8.9. $y = 4^{\frac{2}{x-1}}$,

8.16. $y = 4^{\frac{3}{x+1}} + 2$,

8.11. $y = 2^{\frac{3}{x+1}}$,

8.18. $y = 3^{\frac{1}{x-2}} + 1$,

8.13. $y = 5^{\frac{3}{x+1}} + 2$,

8.20. $y = 3^{\frac{4}{x+2}}$,

8.15. $y = 4^{\frac{2}{x-3}} - 1$,

8.22. $y = 6^{\frac{2}{x+3}} + 2$,

8.17. $y = 4^{\frac{1}{x-2}} + 3$,

8.24. $y = 6^{\frac{4}{x-1}} + 1$,

8.19. $y = 3^{\frac{2}{x+1}} - 1$,

8.26. $y = 7^{\frac{1}{x+2}} - 1$,

8.21. $y = 3^{\frac{1}{x-1}} + 1$,

8.28. $y = 8^{\frac{2}{x-1}} + 1$,

8.23. $y = 6^{\frac{1}{x-2}}$,

8.30. $y = 9^{\frac{2}{x-1}} - 3$.

В заданиях 9 – 12 вычислить y'_x.

Задание 9.

9.1. $y = \dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$,

9.3. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}$,

9.5 $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$,

9.7. $y=\ln tgx^3$,

9.2. $y=(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x)^3$,

9.4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{2-x^2}{x^3-6x}}$,

9.6. $y=(2^{arctgx}+\ln(1+x^2))^4$,

9.8. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}}$,

9.9. $y=(3^{\cos 3x}+\sin^2 3x)^3$,

9.11. $y=\sqrt{\dfrac{x^3+3}{x^3+9x}}$,

9.13. $\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-2}{x^3-3x}}$,

9.15. $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$,

9.17. $y=e^{arctg^2\sqrt{2x-1}}$,

9.19. $y=(4^{tg\sqrt{x}}+\sqrt{x})^3$,

9.21. $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-9x}}$,

9.23. $y=\ln\sin 2^{x^2}$,

9.25. $y=(2^{\cos^2 x}+\sin^2 x)^3$,

9.27. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{5-x^2}{x^3-15x}}$,

9.29. $y=\ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x}}$,

9.10. $y=arctg\,\dfrac{2x+1}{2x-1}$,

9.12. $y=(2^{\arcsin x}+\arccos x)^4$,

9.14. $y=\ln arctg\sqrt{x-1}$,

9.16. $y=(5^{tg\,2x}-x^2)^3$,

9.18. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4}{x^3+12x}}$,

9.20. $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$,

9.22. $y=(3^{arctg 2x}-\ln(1+4x^2))^4$,

9.24. $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{4-3x^2}{x^3-4x}}$,

9.26. $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$,

9.28. $y=(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2})^3$,

9.30. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$.

Задание 10.

10.1. $y=(3x-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2)^5$,

10.3. $y=(5x^2+4\sqrt[4]{x^5}+3)^3$,

10.5. $y=(\dfrac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1)^3$,

10.7. $y=2^{ctgx}-x^2\cos 3x$,

10.9. $y=\sqrt{x}ctg\,3x-2^{x^2}$,

10.11. $y=\sqrt[3]{x}\sin 3x+3^{x^3}$,

10.13. $y=(3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3)^5$,

10.2. $y=2^{tgx}+x\sin 2x$,

10.4. $y=e^{3x}-2xtg\,3x$,

10.6. $y=3^{\cos x}-x\sin 2x$,

10.8. $y=(\frac{1}{3}x^6-7\sqrt[7]{x^5}+3)^4$,

10.10. $y=(\frac{1}{5}x^5-3x\sqrt[3]{x}-4)^4$

,

10.12. $y=3^{\sqrt{x}}-x^2tg\,2x$,

10.14. $y=e^x\sin 3x+\cos^2 x$,

10.15. $y=3^{\sqrt{x}}+\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$,

10.17. $y=(4x^3-\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2)^5$,

10.19. $y=e^{x^2}\ln tg5x$,

10.21

$y=e^{2x}(2-\sin 2x--\cos^2 x)$,

10.23. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$,

10.25. $y=\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$,

10.27. $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$,

10.29 $y=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-$

$-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$,

10.16. $y=(5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3)^2$,

10.18. $y=2^{x^2+1}-x\sin 4x$,

10.20. $y=arctg\sqrt{\sin^2 x+1}$,

10.22. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$,

10.24. $y=\log_4\log_2 tgx$,

10.26. $y=\ln^3(1+\cos x)$,

10.28. $y=arctg\sqrt{2^x-1}$,

10.30. $y=\frac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$.

Задание 11.

11.1. $y=(\frac{x}{x+1})^x$,

11.3 $y=x^{e^{tgx}}$,

11.5. $y=(x^4+5)^{ctgx}$,

11.7. $y=x^{\sin x^3}$,

11.9. $y=(\cos 2x)^{\ln\cos 2x}$,

11.11. $y=(arctgx)^{\ln x}$,

11.13. $y=(\sin\sqrt{x})^{3x}$,

11.2. $y=(\frac{x-1}{x^2+1})^x$,

11.4. $y=(\cos 5x)^{e^x}$,

11.6 $y=x^{\arcsin x}$,

11.8. $y=(\ln x)^{3^x}$,

11.10. $y=x^{2^x}$,

11.12. $y=(arctgx)^{x^2}$,

11.14. $y=(\sin x)^{\cos x}$,

11.15. $y=(\sin 3x)^{tgx}$,

11.17. $y=(\cos 3x)^{\ln 3x}$,

11.19. $y=(\arcsin x)^{x+3}$,

11.21. $y=(x^3+4)^{tgx}$,

11.23. $y=(x^2-1)^{shx}$,

11.25. $y=(arctgx)^x$,

11.27. $y=(\arccos x)^{x^4}$,

11.29. $y=(\frac{x^2}{x^2+4})^x$,

11.16. $y=(\cos x)^{x^3}$,

11.18. $y=(\sin x)^{e^x}$,

11.20. $y=(\arcsin x)^{x^2}$,

11.22. $y=(x-5)^{chx}$,

11.24. $y=(x^2+1)^{thx}$,

11.26. $y=(arcctg 3x)^{x^2}$,

11.28. $y=(\arccos 3x)^{x^2}$,

11.30. $y=(x^4+5)^{ctg^2 x}$.

Задание 12.

12.1. $y^2+x^2-2y=0$,

12.3. $e^x-y-y^3=0$,

12.5. $ctgy+\ln\sqrt{x+y}=0$,

12.7. $2y-\sin 2x-y^2=0$,

12.9.
$tgx+y-\sqrt{4y+5}+2=0$,

12.11. $y^2\cos x=4\sin 3y$,

2.13. $x^2\cos y=\sin x$,

12.15. $2y\ln y=x^2$,

12.17. $y=\cos xy+x$,

12.19. $x\sin y-\cos y=0$,

12.21. $x\sin 2y-y\cos 2x=10$,

12.23. $xtgy-x^2+y^2=4$,

12.2. $\sin x+y-arctgy=0$,

12.4. $y+\ln x+\sqrt{3+2y}=0$,

12.6. $e^x-y^2-e^y=0$,

2.8. $arctgy - \ln(x^2 + y) = 0$,

12.10. $y \ln x - e^y + 1 = 0$,

12.12.
$x - y = \arcsin x - \arcsin y$,

12.14. $2^x + 2^x = 2^{x+y}$,

12.16. $y = \cos(x^2 + y)$,

12.18. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$,

12.20. $y - x = arctgy$,

12.22. $(e^y - x)^2 = x^2$,

12.24. $y + x^2 = arctgy$,

12.26. $x - y + x \sin y = 0$,

12.25. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$,

12.27. $e^{2y} + \frac{y}{x} - 1 = 0$,

12.29.
$\ln(x^2 + y^2) + arctg\,\frac{x}{y} = 0$,

12.28. $e^y + x^2 e^{-y} = 2x$,

12.30. $3^{x+y} - xy = 15$.

Задание 13.

Вычислить y''_x функции, заданной параметрически.

13.1. $\begin{cases} x = \ln\cos 2t, \\ y = \sin^2 2t; \end{cases}$

13.3. $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{t^2}, \\ y = \dfrac{1+t}{t^2}; \end{cases}$

13.5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + t, \\ y = \ln(t^2 + 1); \end{cases}$

13.7. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - arctgt; \end{cases}$

13.9. $\begin{cases} x = 4 - e^{-2t}, \\ y = \dfrac{3}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$

13.11. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sin^2 t; \end{cases}$

13.13. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

13.15. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = tg^2 t; \end{cases}$

13.2. $\begin{cases} x = 1 - e^{3t}, \\ y = \dfrac{1}{3}(e^{3t} + e^{-3t}); \end{cases}$

13.4. $\begin{cases} x = \sin^3 4t, \\ y = \dfrac{1}{2}\cos^3 4t; \end{cases}$

13.6. $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$

13.8. $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1+\sin t}, \\ y = \dfrac{\cos t}{1+\sin t}; \end{cases}$

13.10. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

13.12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}; \end{cases}$

13.14. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t; \end{cases}$

13.16. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t; \end{cases}$

13.17. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t; \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t; \end{cases}$

13.21. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tg\sqrt{1+t}; \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} x = \arcsin(\cos t), \\ y = \arccos(\sin t); \end{cases}$

13.25. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t-1); \end{cases}$

13.27. $\begin{cases} x = \ln ctgt, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$

13.29. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}; \end{cases}$

13.18. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-3); \end{cases}$

13.20. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$

13.22. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = (t-3)^{-\frac{2}{3}}; \end{cases}$

13.24. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}), \\ y = t\sqrt{t^2+1}; \end{cases}$

13.26. $\begin{cases} x = ctg\,(2e^t), \\ y = \ln tge^t; \end{cases}$

13.28. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

13.30. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

В заданиях 14 и 15 провести исследование функций и построить их графики.

Задание 14.

14.1. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$,

14.3. $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$,

14.5. $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$,

14.7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$,

14.2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$,

14.4. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$,

14.6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$,

14.9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$,

14.11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$,

14.13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$,

14.15. $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$,

14.17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$,

14.19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$,

14.21. $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$,

14.23. $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$,

14.25. $y=-(\dfrac{x}{x+2})^2$,

14.27. $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$,

14.29. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$,

14.8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$,

14.10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$,

14.12. $y=(1+\dfrac{1}{x})^2$,

14.14. $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$,

14.16. $y=(\dfrac{x-1}{x+1})^2$,

14.18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$,

14.20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$,

14.22. $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$,

14.24. $y=\dfrac{1}{x^4-1}$,

14.26. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$,

14.28. $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$,

14.30. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.

Задание 15.

15.1. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$,

15.3. $y=3\ln\frac{x}{x-3}-1$,

15.5. $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$,

15.7. $y=(x-2)e^{3-x}$,

15.2. $y=\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$,

15.4. $y=(3-x)e^{x-2}$,

15.6. $y=\ln\frac{x}{x+2}+1$,

15.8. $y=\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$,

15.9. $y=3-3\ln\frac{x}{x+4}$,

15.11. $y=\frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$,

15.13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$,

15.15. $y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$,

15.17. $y=-\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$,

15.19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$,

15.21. $y=2\ln\frac{x}{x-4}-3$,

15.23. $y=\frac{e^{x+3}}{x+3}$,

15.25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$,

15.27. $y=\ln\frac{x-5}{x}+2$,

15.29. $y=\ln\frac{x+6}{x}-1$,

15.10. $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$,

15.12. $y=\ln\frac{x}{x-2}-2$,

15.14. $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$,

15.16. $y=(4-x)e^{x-3}$,

15.18. $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$,

15.20. $y=-\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$,

15.22. $y=-(x+1)e^{x+2}$,

15.24. $y=\ln\frac{x}{x+1}-1$,

15.26. $y=-\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$,

15.28. $y=(x+4)e^{-(x+3)}$,

15.30. $y=2\ln\frac{x-1}{x}+1$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙРАБОТЕ № 2

3.1. Функции нескольких переменных

3.1.1. Частные производные. Производная по направлению. Градиент

Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной (первого порядка) функции $z=f(x,y)$ по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=z'_x=f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=z'_y=f_y(x,y).$$

Из определения частных производных следует, что при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной, а при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ постоянной считается переменная x, поэтому для вычисления производных не требуется никаких новых правил и формул.

Если вычислить $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, то мы получим производные второго порядка функции $z=f(x,y)$, обозначаемые соответственно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{XX}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{YY}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{YX}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{XY}$. Последние две производные называют смешанными. Смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Под производной функции $u=f(x,y,z)$ в данном направлении $\bar{l}$ понимается выражение

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$, которые вычисляют по формулам

$$\cos\alpha = \frac{l_X}{|\bar{l}|}, \cos\beta = \frac{l_Y}{|\bar{l}|}, \cos\gamma = \frac{l_Z}{|\bar{l}|}.$$

Здесь α, β и γ-углы между вектором $\bar{l}$ и координатными осями, а $|\bar{l}| = \sqrt{l_X^2 + l_Y^2 + l_Z^2}$ -длина вектора.

Вектор $\overline{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$.

Пример 1. Найти частные производные функций: а) $z = x^2 + y^2$;

б) $z = \frac{x^3}{y}$; в) $z = xy$.

Решение: а) Находим z'_X функции $z = x^2 + y^2$, где y^2 считаем постоянной. Тогда $z'_X = (x^2 + y^2)'_x = 2x$, $z'_Y = (x^2 + y^2)'_y = 2y$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = (\frac{x^3}{y})'_x = \frac{1}{y}(x^3)'_x = \frac{1}{y} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{y}$.

Для того чтобы вычислить $\frac{\partial z}{\partial y}$, представим z следующим образом: $z = x^3 \cdot y^{-1}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3(y^{-1})'_y = x^3(-1) \cdot y^{-2} = -\frac{x^3}{y^2}$.

в) производную по x функции $z = x^Y$ вычисляем как производную степенной функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Вычисляя производную этой функции по переменной y, считаем x постоянной. Тогда производную этой функции находим по формуле дифференцирования показательной функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = x^Y \ln x$.

Пример 2. Вычислить производные второго порядка функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(1;1)$.

Решении: Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ вычисляем как производные частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ и}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = \frac{2-2}{(1+1)^2} = 0.$$

Очевидно, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ и $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1;1)} = 0$.

Производную $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$ вычислим, предварительно представив $\frac{2x}{x^2+y^2}$ как $2x(x^2+y^2)^{-1}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [2x(x^2+y^2)^{-1}]'_y = 2x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\,2y = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции $z = x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y$ в точке $M(-9,-1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4,5)$.

Решение: Вычислим z'_x и z'_y.

$z'_x = 2x - y + 2$, $z'_y = 2y - x + 3$. Найдем значения этих производных в точке М.

$z'_X = -18 + 1 + 2 = -15$, $\left.z'_Y\right|_M = -2 + 9 + 3 = 10$.

Найдем вектор $\overline{MN} : \overline{MN} = (4+9, 5+1) = (13,6)$. Так как этот вектор лежит в плоскости, то его направление определяется углом между этим вектором и осью Ox, а производная по направлению определяется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$.

Вычислим:

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{13^2+6^2}} = \frac{13}{\sqrt{205}}, \quad \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{205}}.$$

Тогда $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M = -15\cdot\dfrac{13}{\sqrt{205}} + 10\cdot\dfrac{6}{\sqrt{205}} = -\dfrac{135}{\sqrt{205}}$.

Пример 4. Найти градиент функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M(6,2,3)$.

Решение: Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тогда $\overline{gradu}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}$.

Подставляя в это соотношение $x=6$, $y=2$, $z=3$, получим $\overline{gradu}=\dfrac{6}{7}\bar{i}+\dfrac{3}{7}\bar{j}+\dfrac{3}{7}\bar{k}$.

Пример 5. Найти производную функции $z=xy^3$ в точке $M(\frac{1}{2};2)$ в направлении градиента этой функции.

Решение: Производная функции в данной точке по направлению вектора $\bar{l}$ определяет скорость изменения функции в указанном направлении. Если направление вектора совпадает с направлением градиента, то эта скорость будет наибольшей, так как градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции. Это наибольшее значение производной равно $\left|\overline{gradz}\right|$, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\left|\overline{gradz}\right|$, где $\overline{gradz}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3xy^2$. Вычислим градиент в точке M. $\left.\overline{gradz}\right|_M=(y^3\bar{i}+3xy^2\bar{j})_M=8\bar{i}+6\bar{j}$.

Таким образом, $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$.

3.1.2. Дифференциал функции и его применение

Полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Если полное приращение функции в окрестности некоторой точки может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\ ,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, A и B – числа, не зависящие от Δx и Δy, то функцию называют дифференцируемой в этой точке.

Главную часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$, линейную относительно Δx и Δy, называют дифференциалом этой функции в данной точке. Тогда

$$dz = A\Delta x + B\Delta y\ .$$

Дифференциал функции двух переменных вычисляют по формуле

$$dz = z'_X\,dx + z'_Y\,dy\ ,$$

где полагают $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенные равенства:

$$\Delta z \approx dz\ ,$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)\ .$$

Пример 6. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 0,9.

Решение: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$,

$$\Delta f(x, y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2\ .$$

По определению $df(x, y) = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Так как $\Delta x = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$ $\Delta y = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$, то

$$\Delta f(2{,}1) = 2\cdot 2\cdot 0{,}1 - 2\cdot 1\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^2 = 0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}22\ ,$$

$$df(2{,}1) = 0{,}2\ .$$

Пример 7. Найти дифференциал функции $z = e^{xy}$.

Решение: $z'_X = e^{xy}y$, $z'_Y = e^{xy}x$. Имеем $dz = e^{xy}(ydx + xdy)$.

Пример 8. Вычислить приближенно $\sqrt{(3{,}96)^2 + (3{,}05)^2}$.

Решение: Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}^{\,2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$,

если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 3{,}96 - 4 = -0{,}04$, а

$\Delta y = 3{,}05 - 3 = 0{,}05$. Используя формулу для вычисления приближенного значения функции, имеем:

$$f(4{,}3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ ,$$

$$df(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\,,$$

$$df(4{,}3)=\frac{4}{5}(-0{,}04)+\frac{3}{5}0{,}05=-\frac{0{,}01}{5}=-0{,}002\,.$$

$$\sqrt{(3{,}96)^2+(3{,}05)^2}\approx f(4{,}3)+df(4{,}3)\,.$$

Поэтому окончательно

$$\sqrt{(3{,}96)^2+(3{,}05)^2}\approx 5-0{,}002=4{,}4{,}998\,.$$

3.1.3. Приложения частных производных

Экстремумы. Говорят, что точка (x_1, y_1) является точкой *максимума* функции $z = f(x,y)$ если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство $f(x_1, y_1) > f(x,y)$.

Аналогично, говорят, что точка (x_2, y_2) является точкой *минимума* функции $f(x,y)$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x_2, y_2) < f(x,y)$.

Сформулируем *необходимое условие экстремума* функции $f(x,y)$.

Теорема. В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Как и для функции одной переменной точки, в которых $f_x^{'}(x_0, y_0) = f_y^{'}(x_0, y_0) = 0$ или не существуют, называются точками возможного экстремума или *критическими точками* функции.

Достаточные условия экстремума функции $z = f(x,y)$.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), в которой $z'_X = z'_Y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = z''_{XX} \cdot z''_{YY} - (z''_{XY})^2 > 0$, то точка (x_0, y_0) является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $z''_{XX} < 0$, и точкой минимума, если $z''_{XX} > 0$ в этой точке.

Если же в этой точке $\Delta < 0$, то экстремума в точке (x_0, y_0) нет.

В том случае, если $\Delta = 0$ в точке (x_0, y_0), теорема ответа не дает.

Наибольшее и наименьшее значения функции. Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарных точках, т.е. в точках, где ее частные производные равны нулю, либо на границе области.

Геометрические приложения. *Касательной плоскостью* к поверхности в ее точке касания M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости, проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности имеет вид

$$F(x, y, z) = 0,$$

то касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задают уравнением

$$F'_X(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_Y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_Z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а нормаль – уравнением

$$\frac{x - x_0}{F'_X(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_Y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_Z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В случае явного задания поверхности

$$z = f(x, y)$$

уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_X(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_Y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{f'_X(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_Y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 9. Исследовать на экстремум функцию

$z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y \quad (x > 0, y > 0)$.

Решение: Найдем частные производные 1-го порядка:

$$z'_X = 2x - \frac{2}{x}, \quad z'_Y = 2y - \frac{18}{y}.$$

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{2}{x} = 0, \\ 2y - \dfrac{18}{y} = 0. \end{cases}$$

Имеем равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 9, \end{cases}$$

откуда получаем стационарную точку $M(1,3)$.

Вычислим производные 2-го порядка:

$$z''_{XX} = 2 + \frac{2}{x^2}, \; z''_{YY} = 2 + \frac{18}{y^2}, \; z''_{XY} = 0.$$

В точке M имеем $z''_{XX} = 4$, $z''_{YY} = 4$, поэтому выполнено условие $\Delta = z''_{XX} \cdot z''_{YY} - (z''_{XY})^2 > 0$ и, значит, в этой точке имеется экстремум, причем это минимум функции, так как $z''_{XX} > 0$ в этой точке.

Таким образом, $z_{\min} = z\big|_{(1,3)} = 1 + 9 - 2\ln 1 - 18\ln 3 = 10 - 18\ln 3$.

Пример 10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 y + xy^2 + 2$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $y = 1$, $x = 0$, $x + y = 4$.

Решение: Данная функция, очевидно, непрерывна в указанной области и, значит, достигает в этой области наименьшего и наибольшего значений. Найдем стационарные точки функции. Для этого вычислим ее частные производные первого порядка и приравняем их к нулю.

$$z'_X = 2xy + y^2, \; z'_Y = x^2 + 2xy.$$

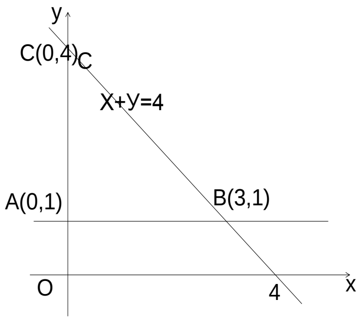
Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 = 0, \\ x^2 + 2xy = 0. \end{cases}$$

Далее имеем

$$\begin{cases} y(2x + y) = 0, \\ x(x + 2y) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что частные производные обращаются в нуль либо в точке $O(0{,}0)$, либо на прямых $y = -2x$ и $x = -2y$. Но ни эта точка, ни точки этих прямых в данную область не входят. **Поэтому** далее исследуем функцию на границе области. Изобразим область.



Рассмотрим поведение функции на AC. Здесь $x = 0$, а $y \in [1;4]$. Функция на всем отрезке равна двум.

На AB $y = 1$, $x \in [0;3]$, $z = x^2 + x + 2$. Находим производную: $z' = 2x + 1$. Производная обращается в нуль в точке

$x=-1/2$, которая не входит в область и поэтому не является критической. Вычислим значение функции в точке B. Здесь $z=3^2+3+2=14$. В точке A $z=2$ в силу непрерывности функции.

Далее рассмотрим функцию на BC. Имеем $y=4-x$,

$z=x^2(4-x)+x(4-x)^2+2=16x-4x^2+2$, $z'=16-8x$.

Производная обращается в нуль в точке $x=2$, в которой $z=18$. На концах этого отрезка значения функции уже вычислены.

Таким образом, имеем значения $z=2$, $z=14$ и $z=18$, первое из которых является наименьшим, а последнее – наибольшим значениями функции в данной области, т.е. $z_{НАИМ}=2$ на отрезке AC, а $z_{НАИБ}=18$ в точке $(2,1)$.

Пример 11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2-y^2+z^2+yz-2xz+9=0$$

в точке $M(2,-2,3)$.

Решение: Обозначим через $F(x,y,z)$ левую часть уравнения поверхности и найдем частные производные и их значения в точке M.

$$F'_X(x,y,z)=2x-2z,\ F'_Y(x,y,z)=-2y+z,\ F'_Z(x,y,z)=2z+y-2x.$$

$$F'_X(2,-2,3)=-2,\ F'_Y(2,-2,3)=-3,\ F'_Z(2,-2,3)=0.$$

Подставляя найденные значения в уравнения

$$F'_X(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_Y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_Z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

и

$$\frac{x-x_0}{F'_X(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_Y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_Z(x_0,y_0,z_0)},$$

имеем уравнение касательной плоскости

$$-2(x-2)-3(y+2)=0 \text{ или } 2x+3y+2=0$$

и уравнения нормали

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{0}.$$

3.2. Элементы интегрального исчисления

3.2.1. Неопределенный интеграл. Таблица

Интегрирование функций. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если

$F'(x)=f(x)$ для всех $x\in X$. Две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$.

3) $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

4) Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=u(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C$. В частности $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,\ a\neq 0$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x+C$.
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C$, $(a\neq -1)$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.
15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right| + C$.
17. $\int shxdx = chx + C$.
18. $\int chxdx = shx + C$.
19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.
20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Пример 12. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$.

Решение: Используя свойства интеграла, преобразуем интеграл к виду $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx=\int\frac{a-2\sqrt{ax}+x}{\sqrt{ax}}dx=\int\frac{a}{\sqrt{ax}}dx-2\int dx+\int\frac{x}{\sqrt{ax}}dx$.
Сведем далее первый и последний интегралы к табличным. Для этого сократим подынтегральные выражения и вынесем за знаки интегралов постоянные множители. Тогда имеем

$$\sqrt{a}\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\int x^{\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{ax}-2x+\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}+C.$$

Пример 13. Вычислить $\int\cos 5xdx$.

Решение: В таблице интегралов найдем $\int\cos xdx=\sin x+C$. Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax)=adx$.Тогда $\int\cos 5xdx=\int\cos 5x\frac{d(5x)}{5}=\frac{1}{5}\int\cos 5x(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C$.

Этот метод интегрирования *называется методом подведения функции под знак дифференциала.*

Пример 14. Вычислить интегралы:

а) $\int\sqrt{x+3}dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$; в) $\int\frac{dx}{3x+5}$.

*Решение:*При вычислении этих интегралов воспользуемся свойством 4 неопределенного интеграла.

а) $$\int\sqrt{x+3}dx=\int(x+3)^{1/2}dx=\frac{(x+3)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{(x+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C;$$

б) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}=\frac{1}{3}tg3x+C$; в) $\int\frac{dx}{3x+5}=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$.

Пример 15. Вычислить $\int\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение: Известно, что выражение $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является дифференциалом функции $\arcsin x$. Тогда данный интеграл можно вычислить методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^4 x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^5 x}{5} + C .$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt ,$$

где t – новая переменная, а $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 16. Вычислить $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

Решение: Обозначим $1+e^x = t$. Тогда $e^x = t-1$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию e. Получаем

$$\ln e^x = \ln(t-1) \Rightarrow x = \ln(t-1).$$

Отсюда находим

$$dx = \frac{1}{t-1}dt ,\ e^{2x} = (e^x)^2 = (t-1)^2 .$$

Подставляя новую переменную под знак интеграла, получим

$$\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int \frac{(t-1)^2 dt}{t(t-1)} = \int \frac{t-1}{t}dt = \int \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + C =$$
$$= 1+e^x - \ln\left|1+e^x\right| + C .$$

3.2.2. Методы интегрирования

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu ,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – *дифференцируемые* функции.

Методом интегрирования по частям берут, например, такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2...k$; б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,1,2...k$; г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nu^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) и подобных им обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Пример 17. Найти неопределенный интеграл $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$.

Решение: Введем обозначения: $u=\ln x$, $dv=(x^2+2x+3)dx$. Тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int (x^2+2x+3)dx=\frac{x^3}{3}+x^2+3x$, где под последним интегралом подразумевают одну первообразную (C не пишут). Подставляя все в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x^2+2x+3)\ln x dx=(\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\ln x-\int (\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\frac{dx}{x}=$$

$$=(\frac{x^3}{3}+x^2+3x)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}-3x+C.$$

Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

приводятся к табличным интегралам 10-16 путем выделения полного квадрата в знаменателе.

Пример 18. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение: Преобразуем x^2+4x+5, выделяя полный квадрат по формуле $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Тогда

$$x^2+4x+5=x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5=(x^2+2\cdot 2\cdot x+4)+1=(x+2)^2+1;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}=arctg(x+2)+C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \text{ и } \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

приводятся к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

путем выделения в числителе производной $2ax+b$ квадратного трехчлена. Тогда можно воспользоваться тем, что

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C.$$

Аналогично можно будет взять и второй интеграл.

Пример 19. Найти $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+7}}dx$.

Решение: Так как $(2x^2+4x+7)' = 4x+4$, $3x+1 = \frac{3}{4}(4x+4)-2$, то

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+7}}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2+4x+7}}dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+7}} =$$

$$= \frac{3}{4}2\sqrt{2x^2+4x+7} - \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{7}{2}}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+4x+7} - \sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+4x+7} - \sqrt{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{7}{2}}\right| + C.$$

3.2.3. Интегрирование рациональных дробей

Дроби вида $\frac{A}{x-\alpha}$, $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $k = 2,3,\ldots$, а дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, называют простейшими дробями 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов соответственно. Интегралы от дробей первых двух типов берутся по формулам 2 и 3 таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^5} = \frac{1}{3}\int (3x+1)^{-5}d(3x+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-12(3x+1)^4} + C$$

,

дроби 3-го типа содержат квадратный трехчлен и поэтому интегрируются как показано выше.

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной, в противном случае – неправильной. Если дробь неправильная, то из нее нужно выделить целую часть и правильную дробь, если деление происходит с остатком.

Пусть знаменатель дроби $Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^n + \ldots + a_n$ имеет действительные различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда его можно представить в виде:

$$Q_n(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Если среди корней знаменателя есть действительные кратные, то имеем разложение вида:

$$Q_n(x) = a_o (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_m)^{k_m},$$

при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Если же среди корней знаменателя имеются комплексные попарно-сопряженные корни β и $\overline{\beta}$, то этим корням в разложении соответствует множитель вида $x^2 + px + q = (x-\beta)(x+\overline{\beta})$.

Правильную рациональную дробь, числитель и знаменатель которой не имеют общих корней, то есть дробь несократимую можно разложить на сумму простейших дробей.

Здесь имеют место три случая.

1. Все корни многочлена $Q_n(x)$, стоящего в знаменателе, действительны и различны, то есть $Q_n(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Тогда $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно разложить на n простейших дробей *I* типа:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \qquad (7)$$

2. Все корни многочлена $Q_n(x)$ действительны, но среди них имеются кратные, то есть $Q_n(x) = a_o (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_m)^{k_m}$. Тогда рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей *I* и *II* типов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{(k_1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_m^{(1)}}{x-\alpha_m} + \frac{A_m^{(2)}}{(x-\alpha_m)^2} + \ldots + \frac{A_m^{(k_m)}}{(x-\alpha_\mathrm{m})^{k_m}}$$

(8)

3. Среди корней знаменателя правильной рациональной дроби имеются комплексно сопряженные не повторяющиеся, то есть $Q_n(x) = (x^2 + px + q)\ldots(x^2 + \ell x + s)\ldots(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}$.

Тогда дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ разлагается на простейшие дроби *I, II* и *III* типов. Запишем ту часть разложения, которая соответствует множителям $x^2+px+q, \dots x^2+\ell x+s$ знаменателя:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\dots+\frac{Mx+N}{x^2+\ell x+s}+\dots$$

Пример 20. Найти $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Решение: Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^3+4x^2+4x=x(x^2+4x+4)=x(x+2)^2.$$

Имеем

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и освободимся от знаменателя. Тогда

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx.$$

Положим в обеих частях этого тождества $x=0$. Получим $8=4A$, $A=2$. При $x=-2$ имеем $20=-2C$, а $C=-10$.

Приравнивая коэффициенты при x^2 в обеих частях тождества, получаем $3=A+B$, а так как $A=2$, то $B=1$.

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=2\ln|x|+\int\frac{d(x+2)}{x+2}-10\int(x+2)^{-2}d(x+2)=$$

$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+10\frac{1}{x+2}+C.$$

Пример 21. Вычислить $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Решение: Для интегрирования правильной рациональной дроби разложим ее на простейшие дроби. Так как знаменатель дроби имеет двукратные мнимые корни, что соответствует тому, что множитель x^2+1 входит в знаменатель во второй степени, то:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

и приравняем числители дробей:

$$x^3-2x=Ax+B+Cx^3+Dx^2+Cx+D.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1=C \\ x^2 & 0=D \\ x & -2=A+C \\ x^0 & 0=B+D \end{array}.$$

Отсюда имеем: $C=1$, $D=0$, $A=-3$, $B=0$.

Следовательно, подставляя найденные коэффициенты в разложение дроби на простейшие, получим

$$\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-3xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

3.2.4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$ где m или n – нечетное положительное число, вычисляют, отделяя от нечетной степени один сомножитель.

Пример 22. Вычислить $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

Решение: Отделим от нечетной степени косинуса один сомножитель, внесем под знак дифференциала синус и получим:

$$\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d(\sin x)=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}-\int d(\sin x)=\int\sin^{-2} xd(\sin x)-$$

$$-\sin x=\frac{\sin^{-1} x}{-1}-\sin x+C=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C.$$

Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$ где m и n – четные положительные числа, вычисляют с помощью формул понижения степени: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Пример 23. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение: Имеем

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Если $m+n$ является целым четным отрицательным числом, то используют подстановку $t = tgx$.

Пример 24.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d(tgx)}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x} \end{matrix} \right| = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Интегралы $\int tg^m x dx$, $\int ctg^m x dx$, где $m \in N$, вычисляют заменой:

$tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример 25. Найти $\int tg^3 x dx$.

Решение: Имеем $\int tg^3 x dx = \int \dfrac{t^3}{1+t^2} dt = \int \dfrac{t^3+t-t}{1+t^2} dt$.

Разложим интеграл на два интеграла. Получим:

$$\int \frac{t^3+t}{1+t^2} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+tg^2 x) + C.$$

Интегралы вида

$$\int \sin kx \sin mx dx, \quad \int \sin kx \cos mx dx, \quad \int \cos kx \cos mx dx.$$

Вычисляют преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму по формулам:

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x),$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(k-m)x + \sin(k=m)x),$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x)$$

Пример 26. Найти $\int \sin 10x \sin 15x dx$.

Решение: Имеем

$$\int \sin 10x \sin 15x dx = \frac{1}{2}\int (\cos(-5x)dx - \cos 25x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 25x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{50}\sin 25x + C .$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где подынтегральная функция является четной относительно синуса и косинуса, т. е. не меняется при одновременном изменении знаков синуса и косинуса, удобно вычислять с помощью подстановки $tgx = t$.

Пример 27. Найти $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение: При изменении знака синуса подынтегральная функция не изменяется, поэтому используем подстановку $tgx = t$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(t\sqrt{2}) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tgx) + C .$$

Если подынтегральная функция изменяется при перемене знаков синуса и косинуса, то используют подстановку $tg\frac{x}{2} = t.$ При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} .$$

Пример 28. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C .$

3.2.5. Интегрирование простейших иррациональностей

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

вычисляют с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = z^n$

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[k]{ax+b})dx$$

берут с помощью подстановки $ax+b = z^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел m и k.

Пример 29. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

Решение: Произведем замену переменной. Имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \left| \begin{matrix} x = z^6 \\ dx = 6z^5 dz \end{matrix} \right| = \int \frac{(z^3-1)6z^5 dz}{z^2+1} = 6\int \frac{z^8 - z^5}{z^2+1}dz .$$

Разделив столбиком числитель на знаменатель, получим

$$6\int (z^4 - z^3 - z^2 + z - 1 - \frac{z-1}{z^2+1})dz =$$

$$= 6\frac{z^5}{5} - 6\frac{z^4}{4} - 6\frac{z^3}{3} + 6\frac{z^2}{2} - 6z - 3\ln(z^2+1) + 6arctgz + C =$$

$$= 6\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - 3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) +$$

$$+ 6arctg\sqrt[6]{x} + C .$$

3.2.6. Определенный интеграл

Вычисление определенного интеграла. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

С помощью определенного интеграла можно вычислять *площади плоских фигур, длины дуг кривых* и решать другие задачи.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)\ (f(x) \ge 0)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox. Эту фигуру называют криволинейной трапецией, а ее площадь находят по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

В случае параметрического задания кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ площадь фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Оx равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

где пределы интегрирования определяют из уравнений

$$a = x(t_1) ,\ b = x(t_2) .$$

Пример 30. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение: Параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Вычислим площадь четвертой части эллипса, расположенной в первой четверти. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. При $y = 0$ имеем $x = a$, а $t = 0$. При $x = 0$ – $y = b$, а $t = \pi/2$. $x'(t) = -a\sin t$. Получаем:

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 tdt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}4ab(t - \frac{1}{2}\sin 2t)_0^{\pi/2} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab .$$

Длину дуги гладкой кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, вычисляют по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx ,$$

где a и b – абсциссы концов дуги.

Если кривая задается полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi .$$

Пример 31. Найти длину дуги спирали Архимеда $\rho = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $\rho = 10\pi$.

Решение: Окружность и спираль Архимеда пересекаются, если $5\varphi = 10\pi$, т.е. при $\varphi = 2\pi$. Тогда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{25\varphi^2 + 25}d\varphi = 5\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi .$$

Обозначив $\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi = I$, найдем этот интеграл посредством формулы интегрирования по частям.

Полагая в формуле интегрирования по частям $u = \sqrt{\varphi^2 + 1}$, $dv = d\varphi$, получим $du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}$, $v = \varphi$ и

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi = \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} d\varphi .$$

Прибавив и вычтя единицу в числителе подынтегральной функции последнего интеграла, разложим его на два интеграла:

$$I = 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} - I + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} .$$

Перенесем интеграл *I* из правой части равенства в левую, получим

$$2I = 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right|_0^{2\pi} .$$

Подставляя пределы интегрирования, найдем интеграл *I,* а после умножения его на 5, – длину дуги. Имеем

$$l = 5\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{5}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) .$$

4. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

Задание16. Найти частные производные функций.

16.1. $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.

16.3. $z = \ln(x^3 - 2y^3)$.

16.5. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

16.7. $z = tg^2 \dfrac{x}{y}$.

16.9. $z = \dfrac{\ln(x + 5y^2)}{xy}$.

16.11. $z = xy \cos xy$.

16.13. $z = tg \dfrac{x+y}{x-y}$.

16.15. $z = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2}$.

16.17. $z = arctg \sqrt{xy}$.

16.19. $z = (\dfrac{1}{3})^{\frac{Y}{X}}$.

16.21. $z = \ln tg \dfrac{x}{y}$.

16.23. $z = \dfrac{1}{\cos^4 xy}$.

16.25. $z = x^2 \sin \sqrt{y}$.

16.27. $z = \dfrac{x^2}{1-y}$.

16.2. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

16.4. $z = arctg \dfrac{x}{y^3}$.

16.6. $z = y \sin xy^2$.

16. 8. $z = \dfrac{y \ln x}{x+y}$.

16.10. $z = \dfrac{x}{2 + y^2}$.

16.12. $z = \sqrt{x+y} \ln y$.

16.14. $z = arctg \dfrac{x+y}{x}$.

16.16. $z = y^{x^2}$.

16.18. $z = x \ln \dfrac{y}{x}$.

16.20. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

16.22. $z = arctg \dfrac{x+y}{1-xy}$.

16.24. $z = \arcsin \dfrac{x+y}{xy}$.

16.26. $z = \sqrt{\ln xy}$.

16.28. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

16.29. $z = x^3 \ln \dfrac{y}{x}$.

16.30. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Задание 17.

17.1. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = arctg(xy^2)$ в точке $A(2;1)$.

17.2. Найти угол между градиентами функции $z = \ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $B(1;1)$.

17.3. Найти угол между градиентами функции $z = \arcsin xy$ в точках $A(1;0)$ и $B(0;4)$.

17.4. Найти производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в направлении градиента этой функции в точке $A(1;1)$.

17.5. Найдите наибольшую скорость изменения функции $z = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + 1$ в точке $A(1;2)$ и направление наибольшего возрастания функции.

17.6. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

17.7. Найти и построить градиент функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ в точке $P(1;\sqrt{3})$.

17.8. Найти и построить градиент функции $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке $P(1;1)$.

17.9. Найти угол между градиентами функции $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точках $A(1;\sqrt{3})$ и $B(0;1)$.

17.10. Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$.

17.11. Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении, составляющем угол $\pi/3$ с осью *Ox*.

17.12. Найти производную функции $z=\ln(e^x+e^y)$ по направлению биссектрисы 1-го координатного угла в точке $M(2;2)$.

17.13. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке $M(2;3;1)$ в направлении, составляющем равные углы с координатными осями.

17.14. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке $M(2;3;1)$ в направлении радиуса-вектора этой точки.

17.15. Найти градиент и его величину в точке $M(1;-1;2)$ функции $u=x^2+y^2-z^2$.

17.16. Найти угол между градиентами функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точках $M(-1;2;0)$ и $P(2;3;4)$.

17.17. Найти производную функции $z=3x^4-xy+y^3$ в точке $M(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60°.

17.18. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке $M(2;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $P(5;5)$.

17.19. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке $M(1;1;1)$ в направлении градиента этой функции.

17.20. Найти величину и направление градиента функции $u=x^2+2xy^2-yz^2$ в точке $M(1;2;-1)$.

17.21. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}$ в точке $M(2;3;4)$ в направлении вектора $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$.

17.22. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке $M(2;3;1)$ в направлении от этой точки к точке $P(-2;3;4)$.

17.23. Найти угол между градиентами функции $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$ в точках (1,1) и (3,4).

17.24. Найти производную функции $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точке $A(2,1)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

17.25. Найти производную функции $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точке $A(3,1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(6,5)$.

17.26. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1;1;2)$ в направлении, составляющем с осями координат углы соответственно $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

17.27. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $A(5;1;5)$ в направлении, составляющем равные углы с осями координат.

17.28. Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $A(3,4)$.

17.29. Найти величину и направление градиента функции $z = x^Y$ в точке $M(2;2;4)$.

17.30. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

17.31. Вычислить приближенно $a = (1{,}04)^{2{,}02}$.

17.32. Вычислить приближенно $a = (1{,}02)(0{,}97)^2$.

17.33. Вычислить приближенно $a = \ln(\sqrt[3]{1{,}03 + \sqrt[4]{0{,}98}} - 1)$.

17.34. Вычислить приближенно $a = \sqrt{\dfrac{16{,}02}{3{,}95}}$.

17.35. Вычислить приближенно $a = (0{,}98)^{2{,}01}$.

17.36. Вычислить приближенно $a = \dfrac{9{,}05^2}{0{,}95^2}$.

17.37. Вычислить приближенно $a = (1{,}02)^{4{,}05}$.

17.38. Вычислить приближенно $a = \sqrt{8{,}04^2 + 6{,}03^2}$

17.39. Вычислить приближенно $a = (1{,}02)^{3{,}01}$.

17.40. Вычислить приближенно $a = \sqrt{2{,}03^2 + 5e^{0{,}02}}$.

17.41. Вычислить приближенно $a = 8{,}98^2 - 3{,}02^2$.

17.42. Вычислить $a = arctg\,\dfrac{0{,}99}{1{,}03}$.

17.43. Найти значение дифференциала функции $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}03$.

17.44. Радиус основания R цилиндра равен 3 дм, его высота $H = 10$ дм. Как изменится объем V цилиндра, если R увеличить на 0,5 дм, а H уменьшить на 0,4 дм?

17.45. Вычислить приближенно изменение функции $z=\dfrac{x+3y}{y-3x}$ при изменении x от $x_1=2$ до $x_2=2{,}5$, y – от $y_1=4$ до $y_2=3{,}5$.

17.46. При деформации конуса радиус его основания r увеличился с 15см до 15,4см, а высота h уменьшилась с 45см до 44,8см. Найти приближенно изменение объема V конуса.

17.47. Вычислить dz в точке $A(0,1)$ при $dx=0{,}1$, $dy=0{,}01$, если $z=\ln\cos(x\sqrt{y})$.

17.48. Дан прямоугольник со сторонами x=8м, y =6м. Как изменится площадь S прямоугольника, если большую сторону уменьшить на 1,2см, а меньшую – на 1,4см?

17.49. Высота конуса $H=30$ см, радиус основания $R=10$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить H на 3мм и уменьшить R на 1 мм?

17.50. Дан прямоугольник со сторонами x=8м, y=6м. Как изменится длина диагонали L, если большую сторон уменьшить на 1,2см, а меньшую увеличить на 1,4 см?

17.21. Найти полное приращение и дифференциал функции $z=x^2-xy+y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

17.52. Цилиндрическая ваза имеет внутренние размеры: радиус основания $R=2{,}5$ дм, высоту $H=4$ дм и толщину стенок $L=1$ см. Найти приближенно объем материала, затраченного на изготовление вазы.

17.53. Прямоугольник имеет измерения $a=2$ м, $b=3$ м. Найти приближенно величину изменения длины диагонали прямоугольника, если a увеличится на 2см, а b – на 1см.

17.54. Высота конуса $H=20$ см, радиус основания $R=5$ см. Как изменится объем конуса, если уменьшить H на 6мм и увеличить R на 3 мм?

17.55. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

17.56. Вычислить приближенно $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$.

17.57. Найти значение полного приращения и дифференциала функции $z=x^2+3xy+y^2$, если x изменяется от 2 до 1,9, а y – от 1 до 1,1.

17.58. Найти полное приращение и дифференциал функции $z=\lg(x^2+y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 0,9.

17.59. При деформации конуса радиус его основания r увеличился с 10см до 10,2см, а высота h уменьшилась с 50см до 49,7см. Найти приближенно изменение объема V конуса.

17.60. Вычислить значение дифференциала функции $z=\dfrac{x}{x-y}$ при изменении x от 2 до 1,96, а y – от 1 до 1,04.

Задание 18. Исследовать на экстремум следующие функции:

18.1. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

18.4. $z=7x^2-6xy-3y^2+6y-4x-12$.

18.3. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

18.6. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

18.5. $z=x^2+xy+y^2-2x-5y$.

18.8. $z=xy^2(1-x-y)$.

18.7. $z=3x^2-y^2+4y+5$.

18.10. $z=xy^2-9x+6y$, $(x>0, y>0)$.

18.9. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

18.12. $z=x^3+y^2-6xy+18y-39x+20$.

18.11. $z=2xy-2x-4y$.

18.14. $z=x^2y+18x-16y$.

18.13. $z=x\sqrt{y}-x^2+6x-y+3$.

18.16. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $(x>0, y>0)$.

18.15. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

18.18. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

18.17. $z=x^3+y^3-9xy+27$.

18.20. $z=x^3+y^2-3x+4\sqrt{y^5}$.

18.19. $z=x^3+y^3-3xy$.

18.22. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy$.

18.21. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$.

18.24. $z=x^3+xy^2+6xy$.

18.23. $z=(x^2+y)\sqrt{e^Y}$.

18.26. $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

18.25. $z=x^2y(2-x-y)$ $(x>0, y>0)$.

18.28. $z=3\ln x+xy^2-y^3$.

18.27. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

18.30. $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

18.29. $z=xy^2(6-x-y)$ $(x>0, y>0)$.

18.2. $z=x^2+y^2-8x-2$.

Задание 19. Найти набольшее наименьшее значения функций в указанных областях.

19.1. $z=3xy$ в круге $x^2+y^2\le 2$.

19.2. $z=x^2+y^2-xy-x-y$ в треугольнике $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 3$.

19.3. $z = x - 2y - 5$ в области: $x \le 0$, $y \ge 0$, $y - x \le 1$.

19.4. $z = x^2 + y^2 - xy$ в треугольнике $x \ge 1$, $y \ge 0$, $x + y \le 2$.

19.5. $z = xy^2 + 2x + 1$ в треугольнике $x \ge -2$, $y \ge -2$, $x + y \le 5$.

19.6. $z = 2x + 2y - xy$ в треугольнике $x \le 4$, $y \le 4$, $y \ge -x$.

19.7. $z = x^2 - 2x$ в квадрате $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

19.8. $z = x^2 + xy$ в треугольнике $x \le 1$, $y \le 2x + 2$, $y \ge -1$.

19.9. $z = x^2 + y^2 + 2$ в квадрате $-1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$.

19.10. $z = \dfrac{x^2}{2} - xy$ в прямоугольнике $-2 \le x \le 0$, $1 \le y \le 5$.

19.11. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

19.12. $z = xy(4 - x - y)$ в треугольнике $x \ge 1$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

19.13. $z = 2y^2 - 3x^2 + 12x - 4y$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$,
$3x + 4y \le 12$.

19.14. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

19.15. $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

19.16. $z = x^2 + y^2$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x + 3y \le 6$.

19.17. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

19.18. $z = x^2 + 3xy + y^2 - 1$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$.

19.19. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

19.20. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

19.21. $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

19.22. $z = x^2 y(4 - x - y)$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

19.23. $z = \dfrac{x^2}{2} - xy$ в области, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{3}$, $y = 3$.

19.24. $z = x^2 + xy$ в прямоугольнике $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

19.25. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

19.26. $z = x^2 + y^2 + 2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

19.27. $z = y^2 - 4(x + y)$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

19.28. $z = xy^2 + 2x + 1$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

19.29. $z = x^2 y$ в области, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$.

19.30. $z = 2(x - y)^2 + y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x + y = 1$, $x - y = 1$ и $x = 0$.

Задание 20. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям в указанных точках.

20.1. $3x^4 + 4y^3z + 4z^3x + 1 = 0$ в точке $A(1, 1, 1)$.

20.2. $z = (x + y)^2 - 2xy^2$ в точке $A(2, 1, 7)$.

20.3. $z = 3y^2 - 9xy + y$ в точке $M(1, 3, 3)$.

20.4. $z = 2y^2 - x + 12y + 17$ в точке $M(1, 0, 16)$.

20.5. $z = 4x^2 + 4x - y$ в точке $M(3, -2, 1)$.

20.6. $z = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$ в точке $A(4, 1, -3)$.

20.7. $z = y^2 - 10x - 2y - 19$ в точке $A(1, 2, 1)$.

20.8. $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$ в точке $M(2, -1, 1)$.

20.9. $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$ в точке $M(1, 0, -1)$.

20.10. $3xyz - z = 1$ в точке $M(0,1,-1)$.

20.11. $2z = x^2 - y^2$ в точке $M(3,1,4)$.

20.12. $z^2 = x^2 + y^2$ в точке $M_0(0,1,1)$.

20.13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3,4,5)$.

20.14. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $M(1,1,2)$.

20.15. $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$ в точке $M(1,1,\pi/4)$.

20.16. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$ в точке $M(1,2, 3)$.

20.17. $z = \sin\dfrac{x}{y}$ в точке $A(\pi,1,0)$.

20.18. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ в точке $M(2,3, 6)$.

20.19. $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}$ в точке $A(2,3,2)$.

20.20. $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке $M(2;1;12)$.

20.21. $2z = x^2 - y^2$ в точке $M(3;1;4)$.

20.22. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M_0(1,2,3)$.

20.23. $z=(x+y)^2+2xy^2$ в точке M(2, -1, 5).

20.24. $z=3y^2-9xy-y$ в точке M(1, 3, -3).

20.25. $z=x^2-y^2+4x+6y+2$ в точке A(1, 1, 12).

20.26. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ в точке M(4,3,4).

20.27. $z=(x-4)^2+\frac{y^2}{9}$ в точке A(4,3,1).

20.28. $z=x^2+6y^2-4x+y$ в точке A(1,2,22).

20.29. $(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}+z^2=1$ в точке M(1,2,0).

20.30. $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3,4,15)$.

Задание 21. Найти интегралы.

21.1. $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

21.3. $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$.

21.5. $\int\frac{(\sqrt{x}+1)}{x}dx$.

21.7. $\int\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{3x}}dx$.

21.9. $\int\left(\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^2dx$.

21.11. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

21.13. $\int\frac{2x^2+x-1}{x^3}dx$.

21.2. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

21.4. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

21.6. $\int(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})dx$.

21.8. $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$.

21.10. $\int\frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

21.12. $\int\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

21.14. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$.

21.15. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+5)dx$.

21.17. $\int\frac{\left(\frac{1}{x}-5\right)^2}{\sqrt{x}}dx$.

21.19. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

21.21. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)dx$.

21.23. $\int\frac{5x^3+1}{x^4}dx$.

21.25. $\int\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^3}{\sqrt{2x}}dx$.

21.27. $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx$.

21.29. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$.

21.16. $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

21.18. $\int\frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

21.20. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

21.22. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)^2dx$.

21.24. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$.

21.26. $\int\frac{(1-\sqrt{x})(x+1)}{\sqrt{x}}dx$.

21.28. $\int\frac{x^3+3x}{\sqrt{x}}dx$.

21.30. $\int\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^3dx$.

Задание 22. Найти интегралы.

22.1. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{1+x}}dx$.

22.3. $\int x\sqrt{x-1}dx$.

22.5. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$.

22.7. $\int x\sqrt{3-x}dx$.

22.9. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

22.2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

22.**4.** $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

22.6. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{1+x}}dx$

22.8. $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

22.10. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

22.11. $\int\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\right)dx$.

22.13. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

22.15. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$.

22.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

22.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$.

22.21. $\int \frac{2x}{\sqrt{2x+3}}dx$.

22.23. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$.

22.25. $\int \frac{2x-4}{\sqrt{1+x}}dx$.

22.27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

22.29. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$.

22.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

22.14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

22.16. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}dx$.

22.18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

22.20. $\int \frac{2x-4}{\sqrt{1+x}}dx$.

22.22. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}}dx$.

22.24. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$.

22.26. $\int \frac{5\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

22.28. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$.

22.30. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

Задание 23. Найти неопределенные интегралы.

23.1. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx$.

23.3. $\int (x^2+4x+3)\cos x dx$.

23.5. $\int \ln(4x^2+1)dx$.

23.7. $\int (9x^2+9x+11)\cos 3x dx$.

23.9. $\int (3-7x^2)\cos 2x dx$.

23.2. $\int (x^2-3x)\sin 2x dx$.

23.4. $\int (x^2-3x+2)\sin x dx$.

23.6. $\int (x^2+6x+9)\sin 2x dx$.

23.8. $\int (x^2+35)\sin 2x dx$.

23.10. $\int x\ln^2 x dx$.

23.11. $\int (3-7x^2)\cos 2x dx$.

23.13. $\int (x^2-4)\cos 3x dx$.

23.15. $\int (x+2)^2 \cos 3x dx$.

23.16. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

23.17. $\int arctg\sqrt{6x-1}dx$.

23.18. $\int \sqrt{x}\ln^2 x$.

23.19. $\int x arctg(1-x)dx$.

23.20. $\int (x^2+2x+1)\sin 3x dx$.

23.21. $\int (3x^2+5)\cos 2x dx$.

23.22. $\int (x^2-5x+6)\sin 3x dx$.

23.23. $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$.

23.24. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$.

23.25. $\int 8x^2 \cos 4x dx$.

23.26. $\int (3x-x^2)\sin 2x dx$.

23.27. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

23.28. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

23.29. $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx$.

23.30. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$.

23.12. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x} dx$.

23.14. $\int x\ln(3x+2)dx$.

Задание 24. Найти неопределенные интегралы.

24.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2+x} dx$.

24.4. $\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx$.

24.3. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$.

24.6. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x} dx$.

24.5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx$.

24.8. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx$.

24.7. $\int \frac{2x+3}{(x+1)(x-4)x} dx$.

24.10. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx$.

24.9. $\int \frac{x^3+3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx$.

24.11. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$.

24.2. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$.

24.13. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx$.

24.15. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$.

24.17. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x^2-4x+3)x}$.

24.19. $\int \frac{3x^3-1}{x^3-x}dx$.

24.21. $\int \frac{2x^3-8}{x(x^2-4)}dx$.

24.23. $\int \frac{2x^3-9}{x(x-1)(x+3)}dx$.

24.25. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{(x-1)(x-2)x}dx$.

24.27. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx$.

24.29. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$.

24.12. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$.

24.14. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx$.

24.16. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x+5)}$.

24.18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$.

24.20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx$.

24.22. $\int \frac{-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx$.

24.24. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x^2+3x+2)}$.

24.26. $\int \frac{2x^3+20}{x(x-4)(x+5)}dx$.

24.28. $\int \frac{12x+2}{x(x+1)(x+3)}dx$.

24.30. $\int \frac{x+3}{x(x^2-1)}dx$.

Задание 25. Найти неопределенные интегралы.

25.1. $\int \frac{-6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$.

25.3. $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$.

25.5. $\int \frac{6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx$.

25.2. $\int \frac{6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^2}dx$.

25.4. $\int \frac{6x^2-7x+1}{(x-1)(x+1)^2}dx$.

25.6. $\int \frac{6x^2+7x+2}{x(x+1)^2}dx$.

25.7. $\int \frac{6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^2}dx$.

25.9. $\int \frac{-6x^2-10x-10}{(x+1)(x-2)^2}dx$.

25.11. $\int\frac{9x^2+10x+2}{(x-1)(x+2)^2}dx$.

25.10. $\int\frac{-4x^2-16x-12}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$.

25.13. $\int\frac{6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^2}dx$.

25.12. $\int\frac{6x^2+2x+3}{(x+2)x^2}dx$.

25.15. $\int\frac{6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^2}dx$.

25.14. $\int\frac{2x^2+x+1}{(x+1)x^2}dx$.

25.17. $\int\frac{6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^2}dx$.

25.16. $\int\frac{6x^2+5x}{(x+2)(x-3)^2}dx$.

25.19. $\int\frac{dx}{(x-3)^2(x+3)^2}$.

25.18. $\int\frac{6x^2+5x+4}{(x-2)(x-3)^2}dx$.

25.21. $\int\frac{x^2dx}{(x-2)^3(x+4)}$.

25.20. $\int\frac{6x^2+14x+4}{(x+1)(x-4)^2}dx$.

25.23. $\int\frac{6x^2+18x-4}{(x-3)(x+1)^2}dx$.

25.22. $\int\frac{dx}{(x-2)^2(x^2+5x+6)}$.

25.25. $\int\frac{6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^2}dx$.

25.24. $\int\frac{6x^2+15x+2}{(x-4)(x-1)^2}dx$.

25.27. $\int\frac{6x-2}{x(x+3)^2}dx$.

25.26. $\int\frac{-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^2}dx$.

25.29. $\int\frac{-6x^2+13x+8}{x(x-2)^2}dx$.

25.28. $\int\frac{6x^2-10x+52}{(x-2)x^2}dx$.

25.8. $\int\frac{-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^2}dx$.

25.30. $\int\frac{14x+4}{(x+5)x^2}dx$.

Задание 26. Найти неопределенные интегралы.

26.1. $\int\frac{4x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$.

26.3. $\int\frac{7x^2+7x-1}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$.

26.2. $\int\frac{11x^2+16x+10}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx$.

26.5. $\int\frac{6x^2+9x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)}dx$.

26.7. $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$.

26.9. $\int \frac{9x^2+21x+21}{(x+3)(x^2+3)}dx$.

26.11. $\int \frac{9x^2+12x+4}{(x+2)(x^2+1)}dx$.

26.13. $\int \frac{13x^2-13x+1}{(x-2)(x^2-x+1)}dx$.

26.15. $\int \frac{24x^2+20x-28}{(x+3)(x^2+2x+2)}dx$.

26.17. $\int \frac{11x^2+21x+21}{(x-4)(x^2+9)}dx$.

26.19. $\int \frac{4x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2)}dx$.

26.21. $\int \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2-4)}$.

26.23. $\int \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2-1)}$.

26.25. $\int \frac{dx}{x(x^2-x+1)}$.

26.27. $\int \frac{3x^2-2x}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

26.29. $\int \frac{7x^2+12x+6}{x(x^2+1)}dx$.

26.4. $\int \frac{4x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

26.6. $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$.

26.8. $\int \frac{x^2+8x+8}{(x+2)(x^2+4)}dx$.

26.10. $\int \frac{-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^2}dx$.

26.12. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x+1)(x^2+49)}dx$.

26.14. $\int \frac{3x^3+3x+2}{(x+5)(x^2+1)}dx$.

26.16. $\int \frac{x^2+x+3}{(x-6)(x^2+x+1)}dx$.

26.18. $\int \frac{7x^2+7x+9}{(x+1)(x^2+x+2)}dx$.

26.20. $\int \frac{3x^2+2x+6}{(x+2)(x^2+3)}dx$.

26.22. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x-2)(x^2+1)}dx$.

26.24. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x^2+3)}$.

26.26. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

26.28. $\int \frac{x+4}{(x+2)(x^2+2)}dx$.

26.30. $\int \frac{x^2+2x-2}{(x+6)(x^2-x+1)}dx$.

Задание 27. Найти неопределенные интегралы.

27.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

27.2. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$.

27.3. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

27.4. $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.

27.5. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

27.6. $\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$.

27.7. $\int \frac{dx}{3-\sin x+\cos x}$.

27.8. $\int \frac{dx}{3+\sin 5x}$.

27.9. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

27.10. $\int \frac{dx}{4+2\cos x}$.

27.11. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

27.12. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$.

27.13. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

27.14. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

27.15. $\int \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

27.16. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

27.17. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$.

27.18. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

27.19. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

27.20. $\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$.

27.21. $\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$.

27.22. $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

27.23. $\int \frac{dx}{2+3\sin x}$.

27.24. $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$.

27.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x Cos x}$.

27.26. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

27.27. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

27.28. $\int \sin^2 7x dx$.

27.29. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x}$.

27.30. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Задание 28. Найти неопределенные интегралы.

28.1. $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$.

28.3. $\int \cos x \cos 3x dx$.

28.5. $\int \sin \frac{3}{4}x \cos \frac{x}{4} dx$.

28.7. $\int \sin 6x \cos 7x dx$.

28.9. $\int \cos 2x \cos 6x dx$.

28.11. $\int \sin 2x \cos 5x dx$.

28.13. $\int \cos^4 x dx$.

28.15. $\int ctg^3 x dx$.

28.17. $\int \sin 2x \sin 5x dx$.

28.19. $\int ctg^4 x dx$.

28.21. $\int tg^2 5x dx$.

28.23. $\int \sin 3x \cos x dx$.

28.25. $\int tg^4 x dx$.

28.27. $\int \sin^5 x dx$.

28.29. $\int \cos^4 3x dx$.

28.2. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

28.4. $\int \sin 2x \cos 4x dx$.

28.6. $\int \sin 5x \sin \frac{x}{2} dx$.

28.8. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

28.10. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

28.12. $\int \sin^5 x dx$.

28.14. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

28.16. $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx$.

28.18. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

28.20. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$.

28.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$.

28.24. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

28.26. $\int \sin^4 5x dx$.

28.28. $\int \sin^4 x Cos^4 x dx$.

28.30 $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$.

Задача 29. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

29.1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 (x \ge 2)$.

29.2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2 (y \ge 2)$.

29.3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4 (0 < x < 8\pi, y \ge 4)$.

29.4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 (x \ge 2)$.

29.5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3 (y \ge 3)$.

29.6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3 (0 < x < 4\pi, y \ge 3)$.

29.7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3} (x \ge 6\sqrt{3})$.

29.8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3} (y \ge \sqrt{3})$.

29.9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3 (0 < x < 6\pi, y \ge 3)$.

29.10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 (x \ge 4)$.

29.11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3 (y \ge 3)$.

29.12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(t - \cos t), \end{cases}$ $y = 9 (0 < x < 12\pi, y \ge 9)$.

29.13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 (x \ge 4)$.

29.14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4 (y \ge 4)$.

29.15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6 (0 < x < 12\pi, y \ge 6)$.

29.16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3} (x \ge 3\sqrt{3})$.

29.17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3} (y \ge 2\sqrt{3})$.

29.18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15 (0 < x < 20\pi, y \ge 15)$.

29.19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 (x \geq 1).$

29.20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4 (y \geq 4).$

29.21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1 (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$

29.22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 (x \geq 1).$

29.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2 (y \geq 2).$

29.24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 12 (0 < x < 16\pi, y \geq 12).$

29.25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 9\sqrt{3} (x \geq 9\sqrt{3}).$

29.26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$x = 4\sqrt{3} (y \geq 4\sqrt{3}).$

29.27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 2 (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$

29.28. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 (x \geq 2).$

29.29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 5 (y \geq 5).$

29.30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6 (0 < x < 8\pi, y \geq 6).$

Задача 30. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

30.1. $\rho = 3e^{3\varphi/4},$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30.4. $\rho = 5e^{5\varphi/12},$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30.3. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi},$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30.6. $\rho = 3e^{3\varphi/4},$
$0 \leq \varphi \leq \pi/3.$

30.5. $\rho = 6e^{12\varphi/5},$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30.8. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi},$
$0 \leq \varphi \leq \pi/3.$

30.7. $\rho = 4e^{4\varphi/3},$
$0 \leq \varphi \leq \pi/3.$

30.9. $\rho = 5e^{5\varphi/12},$
$0 \leq \varphi \leq \pi/3.$

30.2. $\rho = 2e^{4\varphi/3},$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30.11. $\rho = 1 - \sin\varphi,$
$-\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$

30.13. $\rho = 3(1+\sin\varphi),$
$-\pi/6 \le \varphi \le 0.$

30.12. $\rho = 2(1-\cos\varphi),$
$-\pi \le \varphi \le -\pi/2.$

30.15. $\rho = 5(1-\cos\varphi),$
$-\pi/3 \le \varphi \le 0.$

30.14. $\rho = 4(1-\sin\varphi),$
$0 \le \varphi \le \pi/6.$

30.17. $\rho = 7(1-\sin\varphi),$
$-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6.$

30.16. $\rho = 6(1+\sin\varphi),$
$-\pi/2 \le \varphi \le 0.$

30.19. $\rho = 2\varphi,$
$0 \le \varphi \le 3/4.$

30.18. $\rho = 8(1-\cos\varphi),$
$-2\pi/3 \le \varphi \le 0.$

30.21. $\rho = 2\varphi,$
$0 \le \varphi \le \dfrac{5}{12}.$

30.20. $\rho = 2\varphi,$
$0 \le \varphi \le 4/3.$

30.23. $\rho = 4\varphi,$
$0 \le \varphi \le 3/4.$

30.22. $\rho = 2\varphi,$
$0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}.$

30.25. $\rho = 5\varphi,$
$0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}.$

30.24. $\rho = 3\varphi,$
$0 \le \varphi \le 4/3.$

30.27. $\rho = 8\cos\varphi,$
$0 \le \varphi \le \pi/4.$

30.26. $\rho = 2\cos\varphi,$
$0 \le \varphi \le \pi/6.$

30.29. $\rho = 2\sin\varphi,$
$0 \le \varphi \le \pi/6.$

30.28. $\rho = 6\cos\varphi,$
$0 \le \varphi \le \pi/3.$

30.10. $\rho = 12e^{12\varphi/5},$
$0 \le \varphi \le \pi/3.$

30.30. $\rho = 8\sin\varphi,$
$0 \le \varphi \le \pi/4.$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители:
Людмила Сергеевна Никулина
Любовь Яковлевна Дубинина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

Часть 1

В авторской редакции
Компьютерная верстка Н.А. Игнатьевой

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41