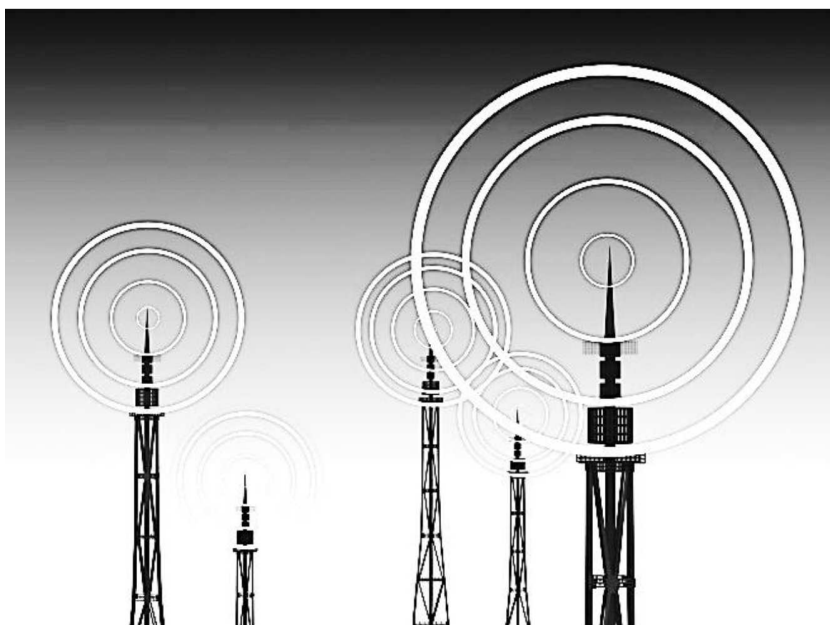


**И.А. Белоус, Ю.А. Левашов**

---

---

# **ТЕОРИЯ СИГНАЛОВ**



**Учебное пособие**

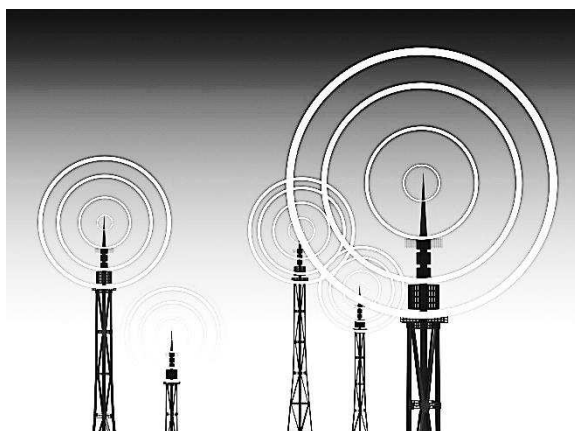
Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет  
экономики и сервиса (ВГУЭС)

---

**И.А. Белоус**  
**Ю.А. Левашов**

# ТЕОРИЯ СИГНАЛОВ



Учебное пособие

Владивосток  
Издательство ВГУЭС  
2017

УДК 621.391  
ББК 32.841  
Б43

**Рецензент:** В.А.

Игнатюк, д-р физ.-мат. наук, профессор  
кафедры ИТС ВГУЭС

**Белоус, И.А.**

Б43 **Теория сигналов:** учебное пособие / И.А. Белоус, Ю.А. Левашов ; Владивостокский государственный университет экономики и сервиса. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2017. – 100 с.

ISBN 978-5-9736-0458-5

Предлагаемое пособие обеспечивает формирование: знаний методов анализа цепей постоянного и переменного тока во временной и частотной областях, основных видов детерминированных и случайных сигналов в радиотехнике и методы их преобразования, основ теории дискретных и цифровых сигналов и систем; владений спектральными методами анализа детерминированных и случайных сигналов и их преобразований в электрических цепях. Основное внимание в учебном пособии уделено описанию методик расчетов и измерения основных параметров сигналов, анализу результатов измерений и сравнению их с ожидаемыми величинами. Материалы пособия могут быть использованы для проведения практических занятий в интерактивной форме, предусматривающей дискуссии и анализ конкретных ситуаций для лучшего усвоения материала.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

УДК 621.391  
ББК 32.841

ISBN 978-5-9736-0458-5

© ФГБОУ ВО «Владивостокский  
государственный университет  
экономики и сервиса, 2017

© Белоус И.А., Левашов Ю.А.,  
2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ .....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	10
Тема 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ.....	14
1.1. Тригонометрический ряд Фурье. Спектр периодического сигнала.....	14
1.2. Амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов .....	17
1.3. Гармонический анализ и синтез периодических сигналов.....	25
Тема 2. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ .....	45
2.1. Теорема Котельникова .....	45
2.2. Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование сигналов .....	53
Тема 3. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ.....	65
3.1. Классификация видов модуляции .....	65
3.2. Сигналы с непрерывной амплитудной модуляцией .....	67
3.3. Сигналы балансной и однополосной амплитудной модуляции.....	71
3.4. Сигналы с непрерывной угловой модуляцией. Обобщенное представление сигналов с угловой модуляцией.....	75
Тема 4. ШУМОПОДОБНЫЕ СИГНАЛЫ.....	89
4.1. Общие сведения и основные характеристики шумоподобных сигналов .....	89
4.2. Псевдослучайные последовательности для реализации шумоподобных сигналов.....	92
4.3. Периодические последовательности .....	94
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	98

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

---

Дисциплина «Теория сигналов» занимает одно из центральных мест среди общепрофессиональных дисциплин, определяющих своим содержанием профессиональную подготовку. В отличие от других общепрофессиональных и специальных дисциплин, посвященных изучению конкретных систем и устройств, дисциплина «Теория сигналов» дает студентам набор знаний и умений для математического описания самых различных радиоэлектронных систем и устройств.

Предлагаемое пособие обеспечивает формирование: знаний методов анализа цепей постоянного и переменного тока во временной и частотной областях, основных видов детерминированных и случайных сигналов в радиотехнике и методы их преобразования, основ теории дискретных и цифровых сигналов и систем; владений спектральными методами анализа детерминированных и случайных сигналов и их преобразований в электрических цепях.

Основное внимание в пособии уделено описанию методик расчетов и измерения основных параметров сигналов, анализу результатов измерений и сравнению их с ожидаемыми величинами.

Материалы пособия могут быть использованы для проведения практических занятий в интерактивной форме, предусматривающей дискуссии и анализ конкретных ситуаций для лучшего усвоения материала.

Для закрепления и самооценки самостоятельного изучения дисциплины в соответствующих разделах приведены контрольные вопросы.

В связи с тем, что аппаратные методы исследования радиотехнических цепей и сигналов требуют больших затрат времени и средств, предлагаются методики исследования с использованием современного программного пакета компьютерного моделирования и проектирования NI Multisim.

## СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

---

---

Термин	Определение
1	2
Измерительный радиотехнический сигнал	Электрическое напряжение или ток, изменяющиеся во времени, с заранее известными характеристиками, используемые для измерения характеристик радиотехнических цепей и их контроля
Мгновенное значение сигнала (Отсчет сигнала)	Значение сигнала в заданный момент времени
Максимальное значение сигнала (Амплитуда)	Наибольшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Минимальное значение сигнала	Наименьшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Постоянная составляющая сигнала	Среднее значение сигнала
Переменная составляющая сигнала (Центрированный сигнал)	Разность между сигналом и его постоянной составляющей
Пиковое отклонение «вверх»	Наибольшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени
Пиковое отклонение «вниз»	Наименьшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени, взятое по модулю
Размах сигнала	Разность между максимальным и минимальным значениями сигнала на протяжении заданного интервала времени
Средневыпрямленное значение сигнала (Среднее значение сигнала)	Среднее значение модуля сигнала

1	2
Среднеквадратичное значение сигнала (Среднеквадратичное значение. Действующее значение. Эффективное значение)	Корень квадратный из среднего значения квадрата сигнала
Средняя мощность сигнала, выделяемая на сопротивлении $1 \text{ Ом}$	Среднее значение квадрата сигнала
Энергия сигнала, выделяемая на сопротивлении $1 \text{ Ом}$	Интеграл из квадрата сигнала по всей оси времени
Период периодического сигнала (Период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала
Частота периодического сигнала (Частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала
Амплитудный спектр периодического сигнала (Спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала
Фазовый спектр периодического сигнала	Функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента
Одномерная плотность вероятности (Дифференциальный закон распределения вероятности. Распределение амплитуд)	Функция, равная пределу отношения вероятности пребывания случайного сигнала в некотором интервале значений к ширине этого интервала при стремлении его к нулю, причем ее аргументом является значение, к которому стягивается интервал

1	2
Корреляционная функция (Автокорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей случайного сигнала и такой же переменной составляющей, но запаздывающей на заданное время.
Нормированная корреляционная функция (Коэффициент корреляции)	Функция, равная отношению корреляционной функции случайного сигнала к его дисперсии
Энергетический спектр (Спектральная плотность)	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от корреляционной функции, аргументом которой является частота
Отношение сигнал-помеха	Отношение величин, характеризующих интенсивности сигнала и помехи.
Коэффициент модуляции «вверх» (Коэффициент глубины модуляции «вверх»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вверх» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции
Коэффициент модуляции «вниз» (Коэффициент глубины модуляции «вниз»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вниз» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции.
Девиация частоты «вверх»	Пиковое отклонение «вверх» закона модуляции при частотной модуляции
Девиация частоты «вниз»	Пиковое отклонение «вниз» закона модуляции при частотной модуляции.
Индекс угловой модуляции (Индекс модуляции)	Пиковое отклонение закона модуляции фазо-модулированного сигнала при гармоническом законе модуляции
Взаимокорреляционная функция (Кросскорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей одного случайного сигнала и запаздывающей на заданное время переменной составляющей другого случайного сигнала.
Взаимный энергетический спектр	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от взаимокорреляционной функции, аргументом которой является частота



1	2
Время запаздывания	Параметр, равный значению временного сдвига одного из сигналов, при котором достигается тождественное равенство его другому сигналу с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого
Фазовый сдвиг (Сдвиг фаз)	Модуль разности начальных фаз двух гармонических сигналов одинаковой частоты
Коэффициент гармоник (Коэффициент нелинейных искажений. Клирфактор)	Коэффициент, характеризующий отличие формы данного периодического сигнала от гармонической, равный отношению среднеквадратического напряжения суммы всех гармоник сигнала, кроме первой, к среднеквадратическому напряжению первой гармоники
Относительное отклонение сигнала от линейного закона	Коэффициент, равный отношению абсолютного отклонения данного сигнала от прямой линии, соединяющей мгновенные значения сигнала, соответствующие началу и концу заданного интервала времени к максимальному значению сигнала на этом же интервале
Коэффициент нелинейности сигнала	Коэффициент, равный отношению размаха производной сигнала на заданном интервале времени к максимальному значению производной на этом же интервале
Абсолютное отклонение сигналов	Максимальное значение разности мгновенных значений сигналов, взятых в один и тот же момент времени на протяжении заданного интервала времени

## ВВЕДЕНИЕ

---

---

В настоящее время практическая радиотехника использует множество различных сигналов. Прежде, чем приступать к их изучению, необходимо определить понятие «сигнал» и охарактеризовать его общие свойства.

*Назовём сигналом изменяющуюся физическую величину, отображающую передаваемое сообщение.* В качестве таких величин могут выступать ток, напряжение, электромагнитное поле, световой поток и др. Иными словами, сигнал выступает как материальный носитель информации.

При теоретических исследованиях используют математические модели сигналов. В самом общем виде математическая модель сигнала представляет собой функцию  $s(t)$  аргумента времени  $t$ . Следует отметить, что математическая модель не учитывает конкретную физическую природу сигнала. Одной и той же математической моделью может быть описано изменение во времени и напряжения, и интенсивности светового потока, и напряжённости электромагнитного поля.

Все сигналы как физические процессы являются материальными и описываются *вещественными функциями*. Вместе с тем, при теоретических исследованиях часто удобно описывать сигналы *комплексными функциями*.

Вид функции  $s(t)$  определяет форму сигнала.

Как функция времени сигнал может быть определён как на конечном, так и на бесконечном интервале времени. Реальные сигналы всегда конечны. Если сигнал  $s(t)$  определён на интервале  $[0, T_c]$ , то величина  $T_c$  называется длительностью сигнала. Такие сигналы получили название *финитных* сигналов. При теоретическом анализе сигнал может быть определён как на бесконечном  $[-\infty, \infty]$ , так и на полубесконечном  $[0, \infty]$  интервале времени.

Так как сигнал является материальным носителем информации, он обладает энергетическими характеристиками. К основным энергетическим характеристикам относятся *энергия* сигнала

$$\mathcal{E}_c = \int_0^{T_c} s^2(t) dt ,$$

и *средняя мощность*

$$P_c = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} s^2(t) dt .$$

Если  $s(t)$  представляет собой изменение напряжения во времени, энергия сигнала, выделяемая при нагрузке в 1 Ом, имеет размерность  $[B^2 \cdot c]$ , а средняя мощность в  $[B^2]$ .

В общем случае сигнал характеризуется формой, длительностью, энергией и средней мощностью.

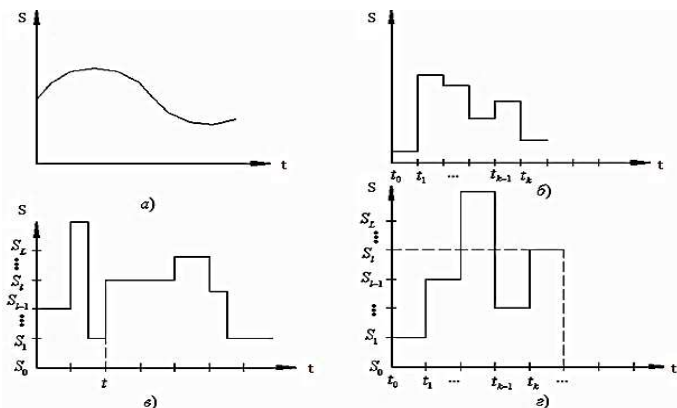
Изменение сигнала во времени может происходить неслучайным (детерминированным) или случайным образом. В соответствии с этим сигналы подразделяются на **детерминированные** и **случайные**.

К *детерминированным* сигналам относятся сигналы, значения которых в любой момент времени  $t$  полностью известны. Детерминированным сигналом, например, является гармоническое колебание с постоянными на интервале  $(0, T_c)$  амплитудой, частотой и начальной фазой. Детерминированные сигналы не переносят информации и являются вспомогательными при различных преобразованиях сигналов и являются удобной моделью при анализе радиотехнических систем.

*Случайные сигналы* – это сигналы, значения которых в любой момент времени точно предсказать невозможно. Математическими моделями случайных сигналов являются *случайные процессы*. Собственно говоря, информация содержится в случайных изменениях физических величин. Моделями случайных процессов описываются и помехи в линии связи.

Сигнал  $s(t)$  представляет собой изменяющуюся во времени величину и с этой точки зрения характеризуется множеством  $\{S\}$  значений и множеством моментов времени  $\{t\}$ , которые она может принимать эти значения. Как множество  $\{S\}$ , так и множество  $\{t\}$  может быть непрерывным (континуальным) или дискретным (счётным). Положим эти два признака в основу классификации сигналов.

На рисунке представлены графики изменения величины  $S$  в зависимости от моментов времени  $t$  в координатах  $(S, t)$ .



Если множества  $\{S\}$  и  $\{t\}$  являются непрерывными множествами, т.е. в любой момент времени  $t$  сигнал может принимать любое значение из множества  $\{S\}$ , то такие сигналы называют аналоговыми (непрерывными) сигналами.

Если множество  $\{S\}$  непрерывно, а множество  $\{t\} = \{t_k\}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  дискретно, т.е. сигнал может принимать любое значение из множества  $\{S\}$ , но в строго фиксированные моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k$ , или  $s_{Д}(t) = s(t_k)$ , то такие сигналы называются дискретными. Здесь черта обозначает, что  $k$  принимает значения от 0 до  $\infty$ . Примером дискретного сигнала может служить отражённый от цели сигнал на входе приёмника радиолокационной станции. Действительно, моменты времени  $t_k$  определяются временем оборота антенны, а значения  $S$  сигнал может принимать любые, т.к. цель может иметь произвольное положение в пространстве.

Если множество значений  $\{S\} = \{S_l\}$ ,  $l = \overline{0, L}$  дискретно, а множество моментов времени  $\{t\}$  непрерывно, т.е. сигнал принимает строго фиксированные значения  $S_l$  в любой произвольный момент времени  $t$ , или  $S_{KB} = s_l(t)$ , то такие сигналы называются квантованными.

Если множества  $\{S\} = \{S_l\}$ ,  $l = \overline{0, L}$  и  $\{t\} = \{t_k\}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  дискретны, то такие сигналы  $s_{Ц}(t) = s_l(t_k)$  называются цифровыми. Своё название такие сигналы получили ввиду того, что значения  $S_l$  сигнала и моменты  $t_k$  времени изменений значений могут быть представлены числами натурального ряда.

Если на интервале времени  $(0, T_C)$  сигнал описывается одной элементарной функцией времени, то такой сигнал называется простым (элементарным) сигналом.

Если же на этом интервале времени сигнал описывается совокупностью простых сигналов, например,

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t),$$

где  $s_i(t)$  имеет длительность  $T_{Ci} = \frac{T_C}{N}$ , то такие сигналы называют составными (или сложными).

На рисунке (б) изображён составной сигнал, образованный совокупностью трёх простых сигналов описываемых гармоническими функциями.

И, наконец, в связи с широким использованием цифровых сигналов в современных РТИС, остановимся на понятии ансамбля сигналов. Ввиду того, что в цифровых РТИС число значений первичных сигналов  $s(t)$  ограничено, для их передачи можно использовать конечное число сигналов  $u(t)$ . Совокупность таких сигналов образует ансамбль сигналов. Важнейшей характеристикой ансамбля сигналов является его объем  $M$ , т.е. число сигналов, входящих в ансамбль. От этого показателя зависит информативность каждого сигнала в отдельности и ансамбля в целом, способность противостоять помехам, время доведения сообщений до получателя, т.е. все то, что определяет эффективность радиотехнической информационной системы.

# Тема 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

---

---

## 1.1. Тригонометрический ряд Фурье. Спектр периодического сигнала

Рассмотрение методов спектрального анализа радиотехнических сигналов необходимо с детерминированных периодических сигналов. Детерминированные сигналы характеризуются тем, что в любой момент заданный момент времени  $t$  его значения можно точно определить. Периодическим детерминированным сигналом является сигнал известной формы, периодически повторяющийся через интервал времени  $T$ , называемый периодом повторения [1]. Математически периодический сигнал описывается выражением

$$s_{\text{п}}(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} s(t - \ell T). \quad (1.1)$$

К периодическим сигналам относятся гармоническое колебание, определенное на бесконечном интервале времени, последовательность импульсов с известной амплитудой, длительностью и периодом повторения и другие.

Спектральный анализ предусматривает выбор системы базисных функций. На практике наибольшее распространение получили тригонометрические функции. Это обусловлено тем, что при преобразовании сигналов такой формы, например линейными радиотехническими цепями, их форма сохраняется, а меняются только амплитуда и фазы колебаний. Кроме этого, формирование таких сигналов осуществляется достаточно простыми техническими средствами.

Сигналы, описываемые тригонометрическими функциями, называются гармоническими сигналами, а спектральный анализ в системе базисных тригонометрических функций – *гармоническим анализом*.

Выберем в качестве базисных функций систему

$$\{\eta_k(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \dots \\ \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin k\omega_1 t, \dots \end{array} \right\}, \quad (1.2)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ .

Нетрудно убедиться, что функции, образующие систему (1.2), являются ортогональными на интервале времени  $(0, T)$  и удовлетворяют условию периодичности (1.1). Можно записать

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (1.3)$$

где  $\omega_k = k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T}$ .

Нормы базисных функций равен

$$\|\eta_0(t)\| = \|1\| = \sqrt{T}; \quad \|\cos \omega_k t\| = \|\sin \omega_k t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

тогда

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad (1.4)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos \omega_k t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \omega_k t dt. \quad (1.5)$$

Выражение (1.3) называется *тригонометрическим рядом Фурье* и представляет собой разложение сигнала  $s(t)$  на составляющие в системе тригонометрических функций.

В радиотехнической практике часто оказывается удобнее иное представление ряда (1.3). Если выделить из (1.3)  $k$ -тую составляющую  $s_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ , то представить можно в виде

$$s_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \omega_k t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \omega_k t \right), \quad (1.6)$$

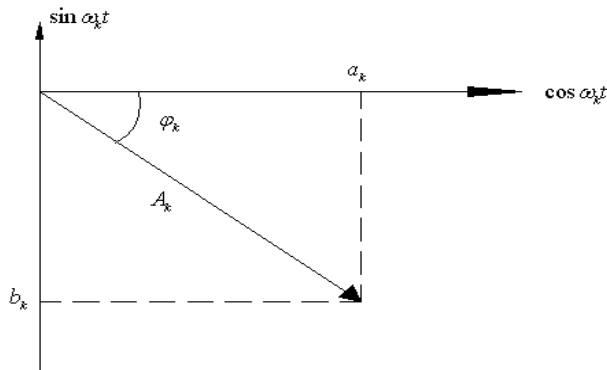


Рис. 1.1. Составляющая  $s_k(t)$  в системе координат  $\{\cos \omega_k t, \sin \omega_k t\}$

С геометрической точки зрения составляющую  $s_k(t)$  можно рассматривать как вектор в системе координат  $\{\cos \omega_k t, \sin \omega_k t\}$  (рис. 1.1). Длина вектора  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ , а  $\varphi_k$ -угол, на который повернут вектор относительно оси  $\cos \omega_k$ . Нетрудно убедиться, что

$$\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k, \quad -\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k.$$

Тогда выражение (1.6) принимает вид

$$s_k(t) = A_k (\cos \varphi_k \cos \omega_k t - \sin \varphi_k \sin \omega_k t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (1.7)$$

где  $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$ .

С учетом (1.7), ряд Фурье (1.3) можно переписать следующим образом

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.8)$$

Составляющая

$$s_n(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.9)$$

называется ***k***-той гармонической составляющей или просто ***k***-той гармоникой.

В соответствии с определением спектра, данным в предыдущем разделе, совокупность  $\frac{a_0}{2}$  и  $A_k$  составляют амплитудный спектр, а совокупность  $\varphi_k$  – фазовый спектр сигнала. Таким образом, амплитудный спектр периодического сигнала содержит постоянную составляющую  $\frac{a_0}{2}$  и бесконечное число амплитуд  $A_k$  соответствующих гармоник. То же самое относится и к фазовому спектру.

При спектральном анализе спектры удобно представлять в виде спектральных диаграмм.

На рисунке 1.2, а изображен периодический сигнал в координатах  $S$  и  $t$ . Проведем еще одну ось, перпендикулярную осям  $S$  и  $t$ , и отложим на этой оси значения  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ . Изобразим гармонические составляющие сигнала на этих частотах, а на оси частот отложим значения  $\frac{a_0}{2}$  и  $A_k$  в виде отрезков прямой и развернув всю систему координат



нат вокруг оси  $S$  на  $90^\circ$  в направлении стрелки, получим диаграмму амплитудного спектра сигнала (рис. 1.2 б). Таким же образом можно построить спектральную диаграмму фазового спектра, примерный вид которой показан на рис. 1.2 в.

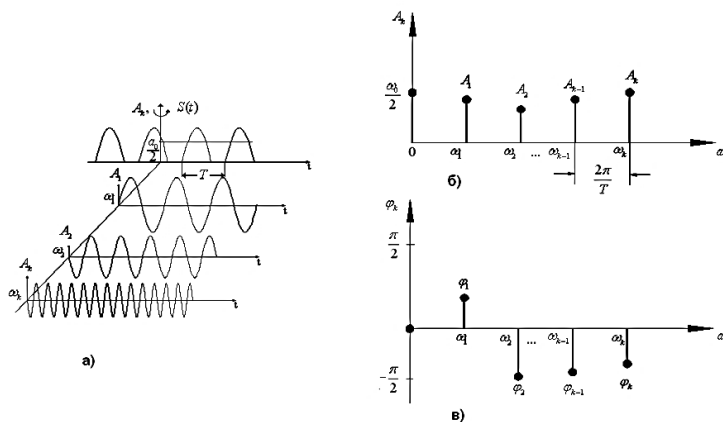


Рис. 1.2. Периодический сигнал в координатах  $S$  и  $t$  (а), диаграмма амплитудного спектра (б), спектральная диаграмма фазового спектра (в)

## 1.2. Амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов

Разложение в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой  $S_0$ , длительностью  $\tau_u$  и периодом следования  $T$ , симметричной относительно нуля, т.е.

$$s(t) = S_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau_u}\right). \quad (1.10)$$

Здесь  $\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}, \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$

Разложение такого сигнала в ряд Фурье даёт

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right], \quad (1.11)$$

где  $q = \frac{T}{\tau_u}$  – скважность.

Для упрощения записи можно ввести обозначение

$$\frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} = \text{sinc} \frac{\omega_k \tau_u}{2} = \text{sinc} \frac{2\pi k \tau_u}{2T} = \text{sinc} \frac{k\pi}{q}. \quad (1.12)$$

Тогда (1.11) можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \frac{k\pi}{q} \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right]. \quad (1.13)$$

На рисунке 1.3 изображена последовательность прямоугольных импульсов. Спектр последовательности как, впрочем, и любого другого периодического сигнала, носит дискретный (линейчатый) характер.

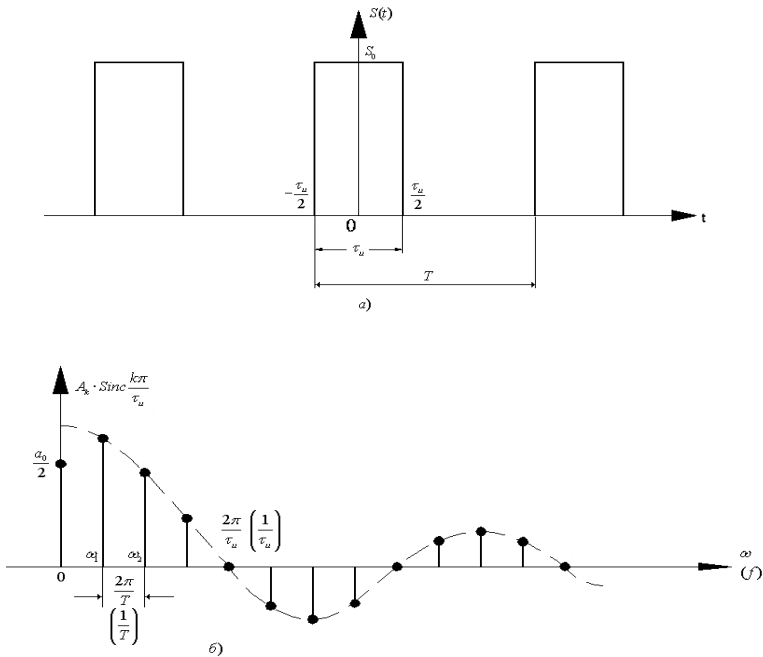


Рис. 1.3а, б. Последовательность прямоугольных импульсов (а), огибающая спектра последовательность прямоугольных импульсов (б)

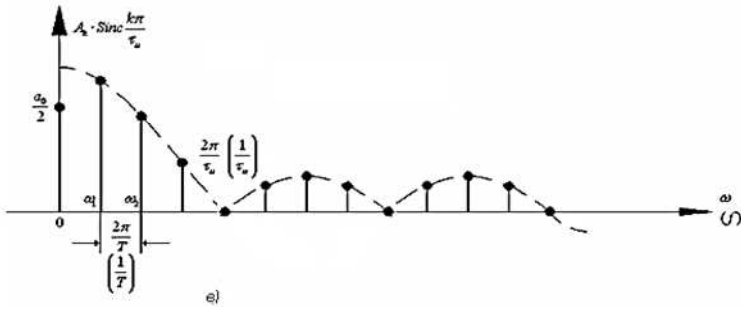


Рис. 1.3в. Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов

Огибающая спектра (рис. 1.3 б) пропорциональна  $\text{sinc} \frac{k\pi}{q}$ . Расстояние по оси частот между двумя соседними составляющими спектра равно  $\frac{2\pi}{T}$ , а между двумя нулевыми значениями (ширина лепестка спектра) –  $\frac{2\pi}{\tau_u}$ . Число гармонических составляющих в пределах одного лепестка, включая правое по рисунку нулевое значение, составляет  $\lfloor q \rfloor$ , где знак  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает округление до ближайшего целого числа, меньшего  $q$  (если скважность – дробное число), или  $q$  (при целочисленном значении скважности). При увеличении периода  $T$  основная частота  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  уменьшается, спектральные составляющие на диаграмме сближаются, амплитуды гармоник также уменьшаются. При этом форма огибающей сохраняется.

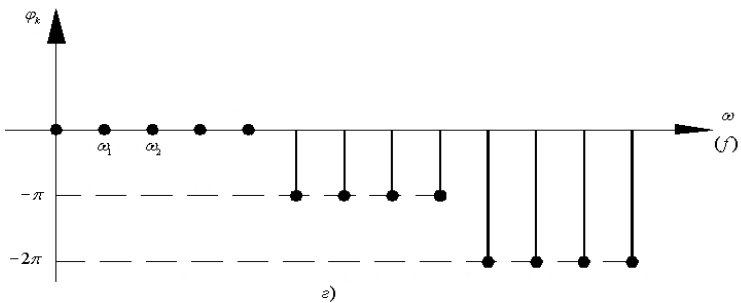


Рис. 1.3г. Фазовый спектр последовательность прямоугольных импульсов

При решении практических задач спектрального анализа вместо угловых частот  $\omega_k$  используют циклические частоты  $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{T}$ , измеряемые в Герцах. Очевидно, расстояние между соседними гармониками на диаграмме составит  $\frac{1}{T}$ , а ширина одного лепестка спектра –  $\frac{1}{T_u}$ . Эти значения представлены на диаграмме в круглых скобках.

В практической радиотехнике в большинстве случаев вместо спектрального представления (рис. 1.3 б) используют спектральные диаграммы амплитудного и фазового спектров. Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 1.3 в.

Очевидно, огибающая амплитудного спектра пропорциональна на  $\left| \text{sinc} \frac{k\pi}{q} \right|$ .

Что же касается фазового спектра (рис. 1.3 г), то полагают, что начальные фазы гармонических составляющих изменяются скачком на величину  $-\pi$  при изменении знака огибающей  $\text{sinc}k\pi/q$ . Начальные фазы гармоник первого лепестка, полагаются равными нулю. Тогда начальные фазы гармоник второго лепестка составят  $\varphi = -\pi$ , третьего лепестка  $\varphi = -2\pi$  и т.д.

Рассмотрим еще одно представление сигнала рядом Фурье. Для этого воспользуемся формулой Эйлера

$$\cos x = \frac{1}{2} [e^{jx} + e^{-jx}].$$

В соответствии с этой формулой  $k$ -ю составляющую (1.9) разложения сигнала в ряд Фурье можно представить следующим образом

$$s_k(t) = \frac{A_k}{2} [e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)}] = \dot{C}_k e^{j\omega_k t} + \dot{C}_{-k} e^{-j\omega_k t}, \quad (1.14)$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k}; \quad \dot{C}_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}. \quad (1.15)$$

Здесь величины  $\dot{C}_k$  и  $\dot{C}_{-k}$  являются комплексными и представляют собой комплексные амплитуды составляющих спектра. Тогда ряд Фурье (1.8) с учетом (1.14) примет следующую форму

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\omega_k t}, \quad (1.16)$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-j\omega_k t} dt, \quad (1.17)$$

Нетрудно убедиться в том, что разложение (1.16) проводится по базисным функциям  $\{e^{j\omega_k t}\}$ ,  $k = (-\infty, \infty)$ , которые также являются ортогональными на интервале  $(0, T)$ , т.е.

$$\int_0^T e^{j\omega_k t} e^{j\omega_l t} dt = \begin{cases} T, & \text{при } k = l, \\ 0, & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Выражение (1.16) представляет собой комплексную форму ряда Фурье, которая распространяется на отрицательные частоты. Величины  $\dot{C}_k$  и  $\dot{C}_{-k} = C_k^*$ , где  $C_k^*$  означает комплексную сопряженную с  $\dot{C}_k$  величину, называются *комплексными амплитудами* спектра. Т.к.  $\dot{C}_k$  является комплексной величиной, из (1.15) следует, что

$$|\dot{C}_k| = \frac{A_k}{2} \text{ и } \arg \dot{C}_k = \varphi_k.$$

Тогда совокупность  $|\dot{C}_k|$  составляет амплитудный, а совокупность  $\varphi_k$  – фазовый спектр сигнала  $S(t)$ .

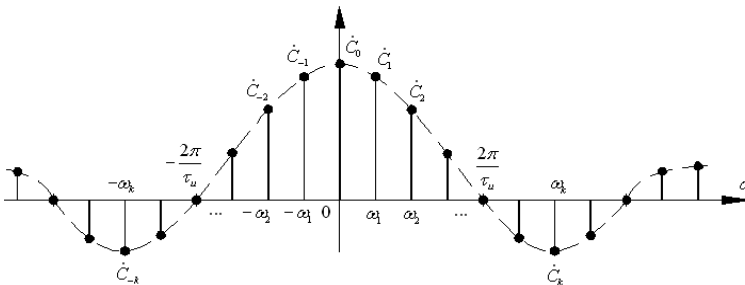


Рис. 1.4. Спектральная диаграмма спектра рассмотренной выше последовательности прямоугольных импульсов, представленного комплексным рядом Фурье

На рисунке 1.4 представлена спектральная диаграмма спектра рассмотренной выше последовательности прямоугольных импульсов, представленного комплексным рядом Фурье

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \frac{S_0}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{k\pi}{q} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Спектр также носит линейчатый характер, но в отличие от ранее рассмотренных спектров определяется как в области положительных, так и в области отрицательных частот. Поскольку  $\dot{C}_k$  является чётной функцией аргумента  $k$ , спектральная диаграмма симметрична относительно нуля.

Исходя из (1.15) можно установить соответствие между  $|\dot{C}_k|$  и коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$  разложения (1.3). Так как

$$|\dot{C}_k| = \frac{A_k}{2} \text{ и } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

то в результате получим

$$|\dot{C}_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (1.18)$$

Выражения (1.5) и (1.18) позволяют найти значения  $|\dot{C}_k|$  при практических расчетах.

Дадим геометрическую интерпретацию комплексной формы ряда Фурье. Выделим  $k$ -тую составляющую спектра сигнала. В комплексной форме  $k$ -я составляющая описывается формулой

$$s_k(t) = \dot{C}_k e^{j\omega_k t} + \dot{C}_{-k} e^{-j\omega_k t}, \quad (1.19)$$

где  $\dot{C}_k$  и  $\dot{C}_{-k}$  определяются выражениями (1.15).

В комплексной плоскости каждое из слагаемых в (1.19) изображается в виде векторов длиной  $|\dot{C}_k| = |\dot{C}_{-k}| = \frac{A_k}{2}$ , повернутых на угол  $\varphi_k$  и  $-\varphi_k$  относительно вещественной оси и вращающихся в противоположных направлениях с частотой  $\omega_k$  (рис. 1.5).

Очевидно, сумма этих векторов дает вектор, расположенный на вещественной оси, длина которого составляет  $A_k$ . Но этот вектор соответствует гармонической составляющей  $s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ .

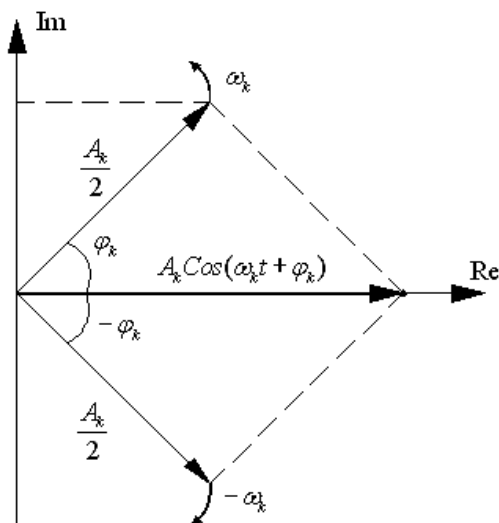


Рис. 1.5. Проекция векторов

Проекции векторов на мнимую ось имеют равную длину, но противоположные направления и в сумме дают ноль. Это значит, что сигналы, представленные в комплексной форме (1.16), в действительности являются вещественными сигналами. Иными словами, комплексная форма ряда Фурье является *математической* абстракцией, весьма удобной при решении целого ряда задач спектрального анализа. Поэтому иногда спектр, определяемый тригонометрическим рядом Фурье, называют *физическим спектром*, а комплексной формой ряда Фурье – *математическим спектром*.

И в заключение рассмотрим вопрос распределения энергии и мощности в спектре периодического сигнала. Для этого воспользуемся равенством Парсеваля. При разложении сигнала в тригонометрический ряд Фурье выражение принимает вид

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k .$$

Энергия постоянной составляющей

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^T \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 dt = \frac{a_0^2 T}{4},$$

а энергия  $k$ -той гармоники

$$\mathcal{E}_k = \int_0^T A_k^2 \cos^2(\omega_k t + \varphi_k) dt = \frac{A_k^2 T}{2}.$$

Тогда энергия сигнала

$$\mathcal{E}_c = \frac{a_0^2 T}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 T}{2}. \quad (1.20)$$

Т.к. средняя мощность сигнала

$$P_c = \frac{\mathcal{E}_c}{T},$$

то с учетом (1.18)

$$P_c = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}. \quad (1.21)$$

При разложении сигнала в комплексный ряд Фурье выражение имеет вид

$$\mathcal{E}_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_k,$$

где  $\mathcal{E}_k = \int_0^T \left( \frac{A_k}{2} \right)^2 (e^{j\omega_k t})^2 dt = \frac{A_k^2 T}{4}$  – энергия  $k$ -той гармоники.

Энергия сигнала в этом случае

$$\mathcal{E}_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2 T}{4},$$

а его средняя мощность

$$P_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2}{4}.$$

Из приведенных выражений следует, что энергия или средняя мощность  $k$ -той спектральной составляющей математического спектра вдвое меньше энергии или мощности соответствующей спектральной



составляющей физического спектра. Это обусловлено тем, что  $\mathcal{E}_k$  физического спектра распределяется поровну между  $\mathcal{E}_k$  и  $\mathcal{E}_{-k}$  математического спектра.

Выражения (1.20) – (1.12) позволяют рассчитать и построить спектральные диаграммы распределения энергий или мощностей, т.е. *энергетические* спектры периодического сигнала.

### 1.3. Гармонический анализ и синтез периодических сигналов

Периодическую функцию  $S(t)$  с периодом  $T$  можно представить рядом Фурье:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \quad (1.23)$$

$$A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}; \quad (1.24)$$

$$\varphi_n = -\arcsin \frac{b_n}{\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}}; \quad (1.25)$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) dt; \quad (1.26)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (1.27)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) \sin(n\omega_1 t) dt; \quad (1.28)$$

Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  зависят от значения начальной точки интервала ( $t_1$ ,  $t_1+T$ ). Обычно выбирают ( $t_1=-T/2$ ) или ( $t_1=0$ ). В дальнейшем будем использовать интервал разложения (0, T). Простейшими периодическими функциями являются «меандр» (рис. 1.6), последовательность пилообразных импульсов (рис. 1.7), последовательность треугольных импульсов (рис. 1.8).

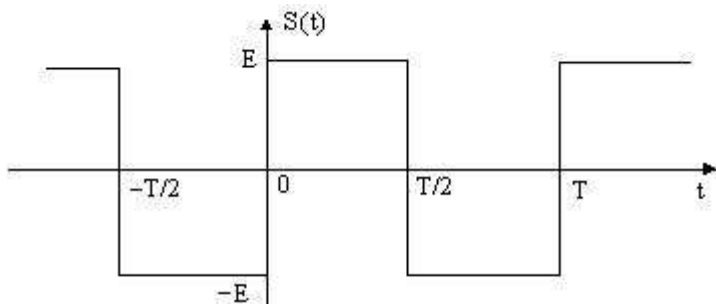


Рис. 1.6. График прямоугольного колебания «меандр»

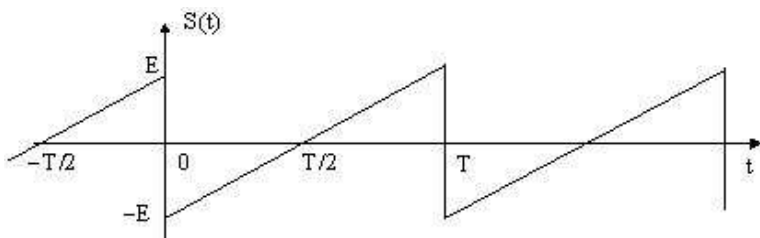


Рис. 1.7а. График пилообразного колебания.  $\varphi = \pi/2$

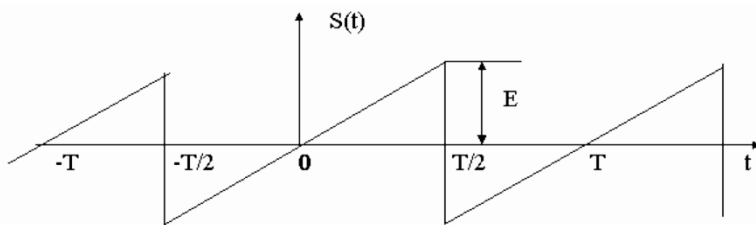


Рис. 1.7б. График пилообразного колебания.  $\varphi = 0$

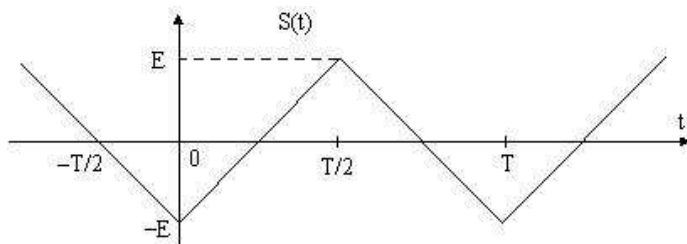


Рис. 1.8а. График последовательности треугольных импульсов.  $\varphi = \pi/2$

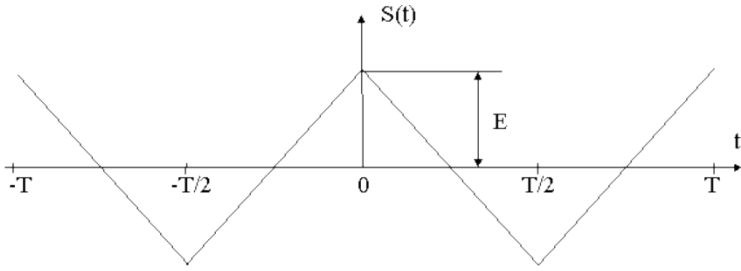


Рис. 1.8 б. График последовательности треугольных импульсов.  $\varphi=0$

Их разложение в ряд Фурье имеет вид: «меандр» (рис. 1.6)

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 0 + \frac{4E}{\pi} \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + \dots \\
 & + \frac{2E}{(2k+1)\pi} \cos\left[(2k+1)\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right] + \dots, \\
 & k=0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

последовательность пилообразных импульсов (рис. 1.7 а)

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 0 + \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{2E}{2\pi} \cos(2\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \\
 & + \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \dots + \frac{2E}{n\pi} \cos(n\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \dots, \\
 & n=1, 2, \dots;
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

последовательность пилообразных импульсов (рис. 1.7 б)

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 0 + \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_1 t) + \frac{2E}{2\pi} \cos(2\omega_1 t) + \\
 & + \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_1 t) + \dots + \frac{2E}{n\pi} \cos(n\omega_1 t) + \dots, n=1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{2.30*}$$

последовательность треугольных импульсов (рис. 1.8 а)

$$\begin{aligned}
 S(t) = & \frac{8E}{\pi^2} \cos(\omega_1 t + \pi) + \frac{8E}{9\pi^2} \cos(3\omega_1 t - \pi) + \dots \\
 & + \frac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos[(2k+1)\omega_1 t - \pi] + \dots, \\
 & k=0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

последовательность треугольных импульсов (рис. 1.8 б)

$$S(t) = \frac{8E}{\pi^2} \cos(\omega t) + \frac{8E}{9\pi^2} \cos(3\omega t) + \dots \quad (1.31^*)$$

$$+ \frac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos[(2k+1)\omega_1] + \dots, k = 0, 1, 2, \dots$$

Относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации периодической функции  $S(t)$  конечным числом членов ряда Фурье  $N$  можно определить по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{P - \sum_{n=0}^N P_n}{P}}, \quad (1.32)$$

для (1.29, 1.30 и 1.31):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt, \quad (1.33)$$

для (1.30\* и 1.31\*):

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt, \quad (1.33^*)$$

$$P_0 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2, \quad (1.34)$$

$$P_n = \frac{1}{2} A_n^2, \quad (1.35)$$

где  $P$  – средняя мощность сигнала;

$P_n$  – средняя мощность  $n$ -й гармоники сигнала.

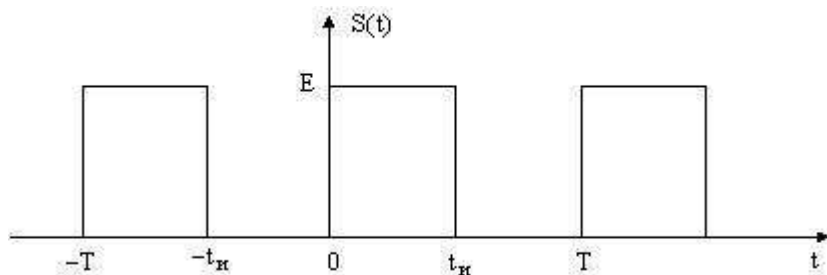


Рис. 1.9. График последовательности видеоимпульсов

Рассмотрим спектр последовательности прямоугольных однополярных импульсов (рис. 1.9).

Важным параметром подобных сигналов является отношение  $q=T/t_u$ , называемое скважностью импульсной последовательности и имеющее в практических приложениях диапазон значений от нескольких единиц до нескольких тысяч. Параметр  $K_3=1/q$  называется коэффициентом заполнения.

По формулам (1.22– 1.28) находим:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E \cdot t_u}{T} = \frac{E}{q} = E \cdot K_3, \quad (1.36)$$

$$a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\omega_1 t_u}{2} = \frac{2E}{q} \frac{\sin(\frac{n\pi}{q})}{\frac{n\pi}{q}}, \quad (1.37)$$

$b_n=0$ , следовательно,  $A_n=|a_n|$ .

Таким образом,

$$S(t) = E \left( \frac{1}{q} + \frac{2}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos n\omega_1 t \right). \quad (1.38)$$

Спектр амплитуд рассматриваемого сигнала имеет лепестковую структуру (рис. 1.10).

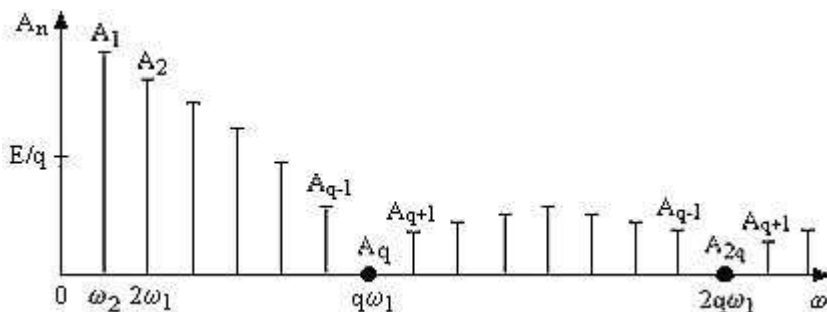


Рис. 1.10. Амплитудный спектр периодической последовательности

Из спектральной диаграммы видно, что амплитуды гармоник с частотами  $Kq\omega_1$ , где  $K = 1, 2, 3, \dots$ , равны нулю. То есть ширина лепестка определяется как произведение скважности на частоту первой гармоники

ки. Количество гармоник в лепестке  $n_1 = q - 1$ . Отсюда ясно, что при  $q \gg 1$  спектр содержит очень большое число гармоник. В этом случае амплитуды соседних гармоник близки по величине и при малых значениях  $n$ :

$$A_n \approx \frac{2E}{q} = a_0.$$

### **Компьютерный практикум: Гармонический анализ периодических сигналов в программном пакете NI Multisim**

**Цель работы:** гармонический анализ периодических сигналов.

#### **Расчетно-практическое задание**

1. Рассчитать и построить спектр амплитуд первых семи гармоник периодического прямоугольного колебания– «меандра» (рис. 1.6) для заданных вариантом  $T$  и  $E$ , табл. 1.1. Результаты занести в табл. 1.2-1.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

2. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых восьми гармоник периодического пилообразного колебания (рис. 1.7) для заданных (преподавателем)  $T$  и  $E$ . Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала четырьмя, пятью, шестью, семью и восемью гармониками.

3. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых семи гармоник периодической последовательности треугольных импульсов (рис. 1.8). Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

4. Рассчитать и построить спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис. 1.9) для заданных (преподавателем)  $E$ ,  $T$  и  $t_u$ . При расчетах ограничиться тремя «лепестками» спектра.

*Таблица 1.1*

#### **Данные для расчета, анализа и синтеза периодических сигналов**

№ варианта	$E, В$	$T, мс$	$t_u, мс$
1	2	3	4
1	5	0,2	0,05
2	6	0,25	0,05
3	7	0,3	0,1
4	8	0,35	0,07

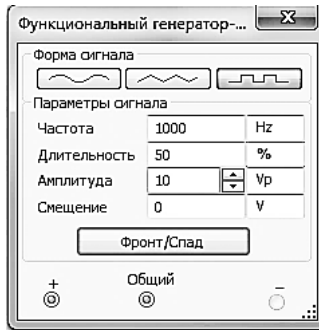
1	2	3	4
5	9	0,4	0,1
6	10	0,45	0,15
7	11	0,5	0,1
8	12	0,6	0,15
9	13	0,65	0,13
10	14	0,75	0,25
11	15	0,8	0,2
12	16	0,9	0,3
13	17	1,0	0,25
14	18	1,2	0,4
15	19	1,2	0,3
16	20	1,4	0,45
17	10	1,5	0,3
18	11	1,6	0,4
19	15	1,8	0,6
20	8	2,0	0,4

### **Выполнение гармонического анализа сигнала «меандр» в пакете NI Multisim**

Перед началом выполнения компьютерного практикума необходимо изучить основную и дополнительную литературу по программному пакету NI Multisim.

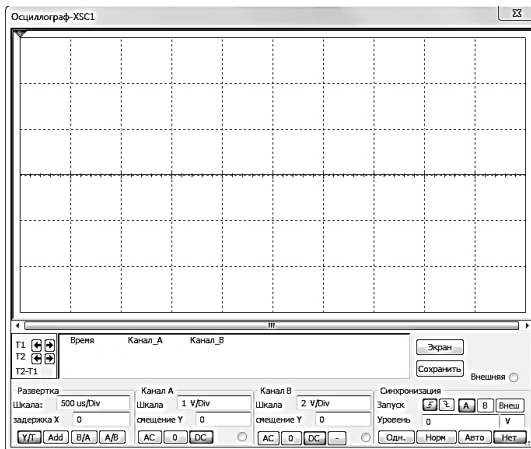
**Функциональный генератор.** Лицевая панель функционального генератора показана на рисунке. Управление генератором осуществляется следующими органами управления [14]:

- выбор формы выходного сигнала: синусоидальной (установлен по умолчанию), треугольной и прямоугольной;
- установка частоты выходного сигнала;
- установка коэффициента заполнения в %: для импульсных сигналов – это отношение длительности импульса к периоду повторения – величина, обратная скважности, для треугольных сигналов – соотношение между длительностями переднего и заднего фронта;



- установка амплитуды выходного сигнала;
- установка смещения (постоянной составляющей) выходного сигнала;
- выходные зажимы; при заземлении клеммы COM (общий) клеммах "-" и "+" получается парафазный сигнал.

**Осциллограф.** Осциллограф имеет два канала (CHANNEL) А и В (в случае двухканального осциллографа; в арсенале приборов Multisim имеется также и 4-х канальный осциллограф, а также виртуальный осциллограф фирмы Agilent) с отдельной регулировкой чувствительности в диапазоне от 10 мкВ/дел (mV/Div) до 5 кВ/дел (kV/Div) и регулировкой смещения по вертикали (YPOS). При этом каждый канал имеет два вывода обозначенные как «+» и «-». Подавая сигнал на один из выводов, другой целесообразно заземлять.



Режим развертки выбирается кнопками Y/T, B/A, A/B. В режиме Y/T (обычный режим, включен по умолчанию) реализуются следующие режимы развертки:

- по вертикали – напряжение сигнала, по горизонтали,
- время; в режиме B/A: по вертикали – сигнал канала В, по горизонтали,
- сигнал канала А; в режиме A/B: по вертикали – сигнал канала А, по горизонтали – сигнал канала В.

Выбор режима по входу осуществляется нажатием кнопок AC, 0, DC. Режим AC предназначен для наблюдения только сигналов пере-



менного тока (его еще называют режимом «закрытого входа», поскольку в этом режиме на входе усилителя включается разделительный конденсатор, не пропускающий постоянную составляющую). В режиме 0 входной зажим замыкается на землю. В режиме DC (включен по умолчанию) можно проводить осциллографические измерения как постоянного, так и переменного тока. Этот режим еще называют режимом «открытого входа», поскольку входной сигнал поступает на вход вертикального усилителя непосредственно. С правой стороны от кнопки DC расположен входной зажим.

**Анализатор спектра.** Описание элементов управления и настройки прибора *Анализатор спектра*:

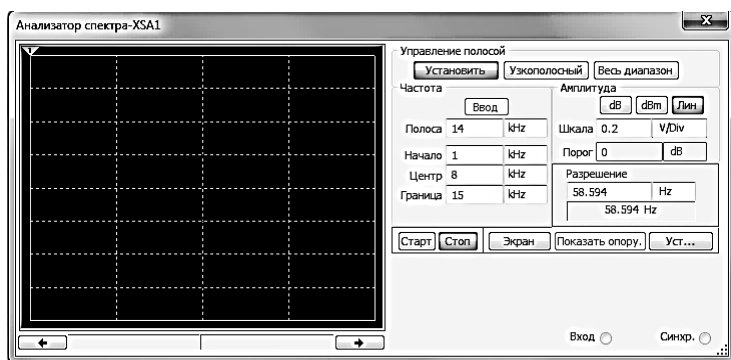
*А. Управление частотой.*

Режим «**Узкополосный**» – спектральный анализ сигнала с максимальным разрешением.

Режим «**Весь диапазон**» – спектральный анализ сигнала в пределах полосы частот, реализуемой программным пакетом.

Режим «**Установить**» – ручная установка границ спектрального анализа.

Кнопка **Ввод** – применение введенных значений.



*Б. Частота.*

Полоса – полоса анализируемого спектра,

Начало – начальная частота анализа,

Центр – частота, отображаемая в центре рабочего окна,

Граница – конечная частота анализа.

*В. Амплитуда.*

Установка единиц отображения амплитуды и цены деления.

*Г. Разрешение.*

Установка минимального шага анализа. Отображение достигнутого шага анализа при моделировании.

Д. *Общие настройки и управление.*

Старт – запуск процесса спектрального анализа сигнала,

Стоп – остановка процесса спектрального анализа сигнала,

Уст... – установки (**рекомендуется установить число точек FFT – 32768**). FFT – Быстрое преобразование Фурье.

#### 4. Анализ «Фурье»

*На примере* анализа прямоугольной периодической последовательности импульсов с параметрами: амплитуда = 10 В, T (период)=1мс,  $t_u$  (длительность)=0,5мс рассмотрим работу необходимых инструментальных средств пакета NI Multisim.

##### Порядок выполнения:

##### 1. Подключение источников и измерительных приборов

Используя команду *Моделирование/Приборы*, расположим источники и измерительные приборы и соединим их в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.11. Источник – **Функциональный генератор (XFG1)**; Измерительные приборы – **Осциллограф (XSC1)** и **Анализатор спектра (XSA1)**.

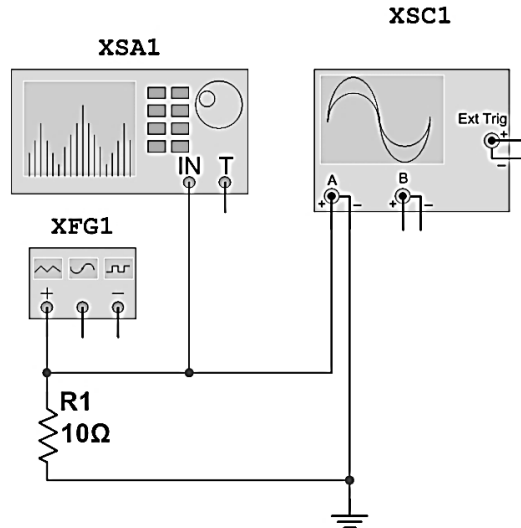


Рис. 1.11. Схема подключения источников и измерительных приборов для изучения прямоугольной периодической последовательности импульсов

##### 2. Установка параметров исследуемой последовательности

Вызовем свойства источника **Функциональный генератор** (двойной щелчок по изображению источника на рабочем поле или из контекстного меню «Свойства») (рис. 1.12). Установим требуемые параметры:

форму («меандр» = прямоугольные импульсы), частоту ( $f=1/T$ ) и амплитуду сигнала.

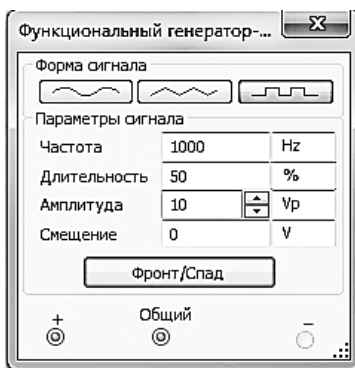
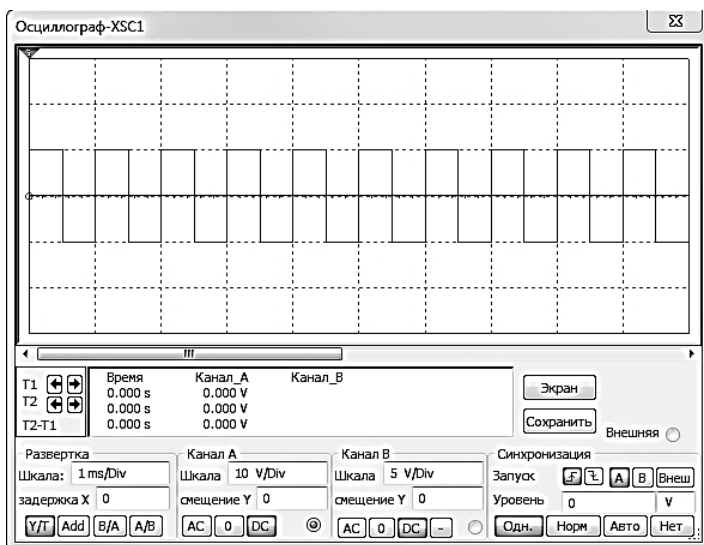


Рис. 1.12. Вид окна «Свойства» функционального генератора XFG

### 3. Анализ исследуемой последовательности

Вызовем свойства прибора **Осциллограф** (двойной щелчок по изображению источника на рабочем поле или из контекстного меню «Свойства»). Установим удобные значения горизонтальной и вертикальной развёрток. Вид окна **Осциллограф** исследуемой прямоугольной периодической последовательности импульсов показан на рис. 1.13.



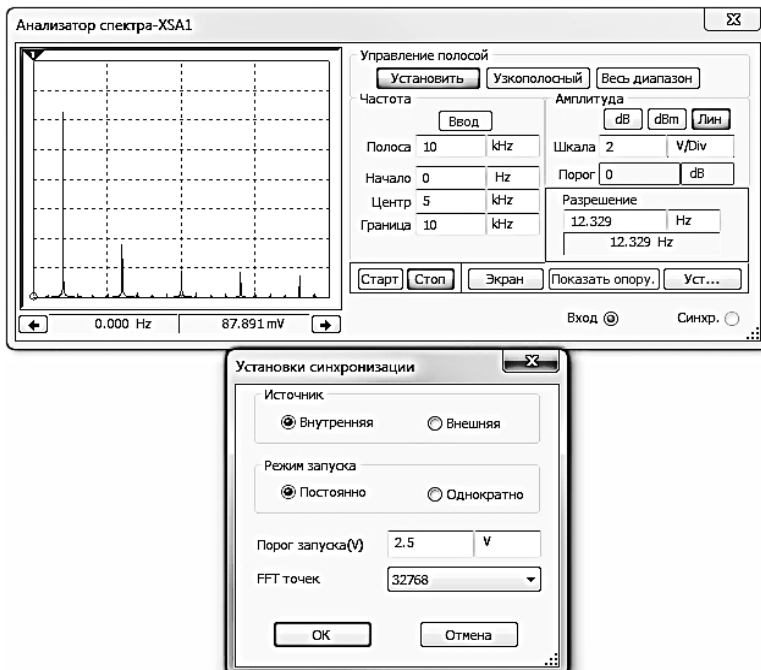


Рис. 1.13. Вид окон Осциллограф и Анализатора спектра

Используя **Анализатор спектра**, произведём анализ частотного спектр периодической последовательности импульсов (рис. 1.13). Используем следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... – установки (установим число точек FFT – 32768).

Выполним Фурье анализ периодической последовательности импульсов, для этого воспользуемся командой **Моделирование/Вид анализа/Фурье....** Во вкладке **Переменные**. окна **Анализ Фурье**. установим переменные для анализа – (V1), выделив переменную в поле *Выходные переменные* и нажав кнопку **Добавить** (рис. 1.14).

Произведём **Анализ Фурье** положительной части «меандра» (амплитуда от 0 до 10В) – запуск по нажатию на кнопку **Моделировать**. Результаты анализа будут представлены программой в табличном и графическом видах (рис. 1.15).

В соответствующих столбцах отображаются:

- Harmonic* – номер гармоники,
- Frequency* – частота гармоники,
- Magnitude* – амплитуду гармоники,
- Phase* – фаза гармоники,

*Norm.Magn.* – нормированное значение амплитуды (относительно значения амплитуды первой гармоники),

*Norm. Phase*–нормированное значение фазы гармоники (относительно значения фазы первой гармоники).

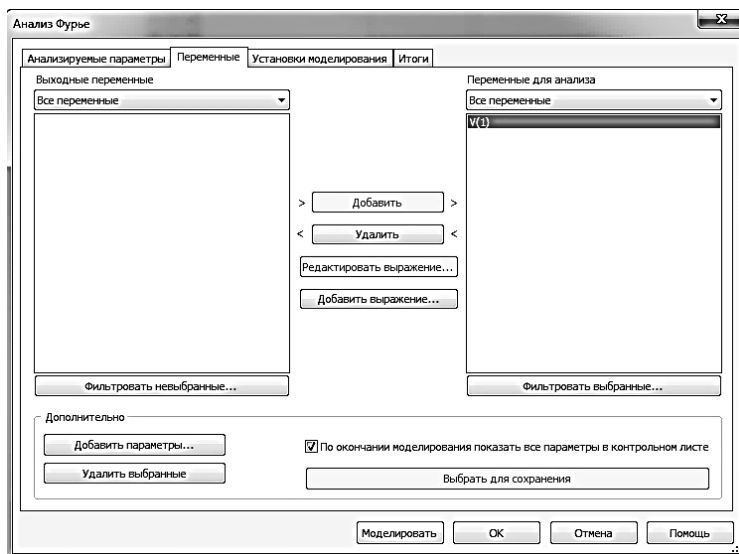
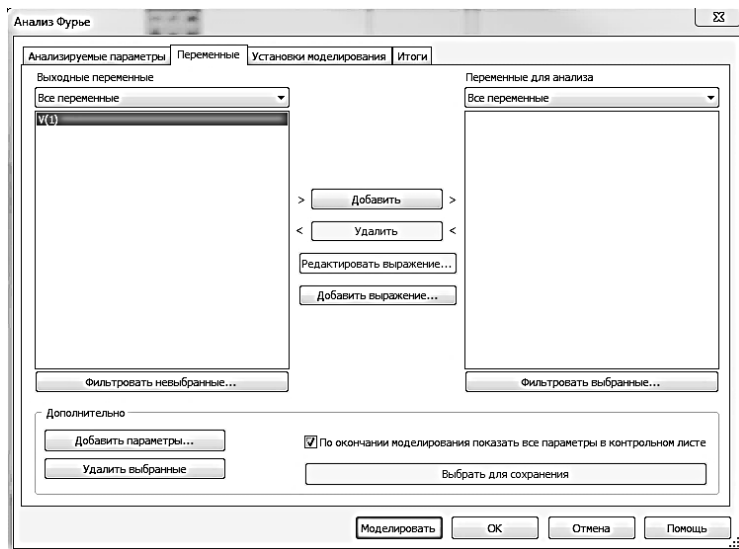


Рис. 1.14. Вид окна «Анализ Фурье»

Harmonic	Frequency	Magnitude	Phase	Norm. Mag	Norm. Phase
1	1000	12.7327	-0.70312	1	0
2	2000	2.04388e-015	171.409	1.60522e-016	172.112
3	3000	4.24909	-2.1094	0.3334	-1.4062
4	4000	1.12624e-015	157.543	8.84525e-017	158.246
5	5000	2.54608	-3.5156	0.200121	-2.8125
6	6000	1.12843e-015	-148.9	8.86245e-017	-148.2
7	7000	1.82115	-4.9219	0.143029	-4.2187

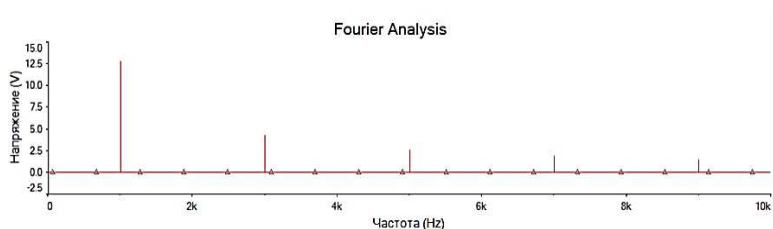


Рис. 1.15. Вид окна результатов анализа Фурье

### Компьютерный практикум

#### Порядок выполнения:

1. Запустить программу NI Multisim.
2. Собрать схему (рис. 1.11) для гармонического анализа последовательности прямоугольных (рис. 1.6), пилообразных (рис. 1.7), треугольных (рис. 1.8) и видеопульсов (рис. 1.9).

3. В соответствии с вариантом (табл. 1.1), установить следующие параметры **Функционального генератора**:

а) режим формы сигнала – **Прямоугольные**;

б) **амплитуду E**;

в) **частоту импульсов**  $f=1/T$ ;

г) длительность **t%** – отношение в %, длительности импульса к длительности периода повторения:

– для прямоугольных, пилообразных и треугольных импульсов  $T=50\%$ ,

– для видеопериодических последовательностей импульсов

$$t_u \% = \frac{t_u}{T} 100\% .$$

4. Проконтролировать сигнал с помощью осциллографа.

5. С помощью курсоров окна анализатора спектра измерить амплитуды гармоник.

6. Выполнить анализ Фурье (см. пример).

7. Сравнить результаты выполнения расчётно-практического задания с получившимися значениями выполнения предыдущего пункта.

8. Повторить пункты 3–7 для треугольной, пилообразной и видео-периодических последовательностей импульсов.

Результаты занести в табл. 1.2–1.3. При анализе пилообразной периодической последовательности для формирования пилообразного сигнала вместо функционального генератора XFG1 необходимо использовать **Импульсный источник напряжения**. Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе: Source, Семейство: SIGNAL\_VOLTAGE\_SOURCE* под именем **PULSE\_VOLTAGE**. Во вкладке *Параметры* необходимо установить следующие значения:

Начальное значение =  $-E$ ,

Амплитуда импульса =  $E$ ,

Задержка =  $0\text{ ms}$ ,

Фронт =  $T$ ,

Спад =  $0\text{ ps}$ ,

Длительность =  $t_c$ ,

Период =  $T$ ,

Анализ амплитуды =  $E$ ,

**Остальные параметры** = «по умолчанию».

Таблица 1.2

### Результаты измерений

№ гармоники	Частота гармоники, Гц	Амплитуда гармоники (расчёт), В	Амплитуда гармоники, ( <b>Magnitude</b> . NI Multisim), В
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

### Результаты измерений

№ гармоники	Частота гармоники, Гц	Фаза гармоники (расчёт), град.	Фаза гармоники , (Norm. Phase. NI Multisim), град
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

9. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

### Контрольные вопросы

1. Дать определение сигнала, периодического сигнала, частотного спектра сигнала.
2. Обосновать возможность представления любого периодического сигнала в виде бесконечного ряда гармонических колебаний.
3. Указать влияние зависимости спектра сигнала от амплитуды, смещения, частоты и длительности прямоугольных импульсов.
4. Изложить методику исследования математических моделей детерминированных сигналов.
5. Назовите особенности амплитудно-частотного спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.
6. Как влияет изменение скважности на спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов?
7. Постройте и сравните спектры периодической последовательности униполярных импульсов и периодической последовательности знакопеременных импульсов.
8. Как изменится спектр периодического сигнала, если период повторения устремить в бесконечность?
9. Назовите особенности амплитудно-частотного спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.
10. Как влияет изменение скважности на спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов?



11. Постройте и сравните спектры периодической последовательности униполярных импульсов и периодической последовательности знакопеременных импульсов.

12. Как изменится спектр периодического сигнала, если период повторения устремить в бесконечность?

13. Как определить число гармонических составляющих в спектре импульсного сигнала?

14. Какая доля общей энергии прямоугольного импульса содержится в пределах основного лепестка спектральной диаграммы?

### **Компьютерный практикум: Синтез сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim**

**Цель работы:** изучение возможности аппроксимации периодических сигналов многочленом Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций, исследование влияния числа ортогональных составляющих на погрешность аппроксимации.

#### **Расчетно-практическое задание**

1. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых семи гармоник периодического прямоугольного колебания – «меандра» (рис. 1.6) для заданных (преподавателем)  $T$  и  $E$ . Результаты занести в табл. 1.2-1.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

2. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых восьми гармоник периодического пилообразного колебания (рис. 1.7) для заданных (преподавателем)  $T$  и  $E$ . Результаты занести в табл. 1.2-1.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала четырьмя, пятью, шестью, семью и восемью гармониками.

3. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых семи гармоник периодической последовательности треугольных импульсов (рис. 1.8). Результаты занести в табл. 1.2–1.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

#### **Выполнение синтеза сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim**

Выполним синтез периодической последовательности прямоугольных импульсов с параметрами  $T$  (период) = 1 мс,  $t_u$  (длительность) = 0,5 мс.

1. По формулам (1.22–1.30) находим амплитуды и фазы первых семи гармоник. Результаты занесём в табл. 1.4.

## Результаты расчётов

№ гармоники	Амплитуда гармоники, В	Фаза гармоники, град
1	12,7259	0
3	4,23153	0
5	2,52751	0
7	1,79119	0

2. Соберём рабочую схему для синтеза сигналов по Фурье (рис. 1.16). Для формирования гармоник используем «Источник переменного напряжения». Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе:Source, Семейство: SIGNAL\_VOLTAGE\_SOURCE* под именем **AC\_VOLTAGE**.

Для формирования периодической последовательности прямоугольных импульсов используем только первую, третью, пятую и седьмую гармоники, которые будут формироваться, соответственно, источниками переменного напряжения V1, V3, V5, V7. В свойствах источников V1, V3, V5, V7, во вкладке *Параметры* установим значения амплитуды и фазы гармоник, согласно расчётам (табл. 1.4)

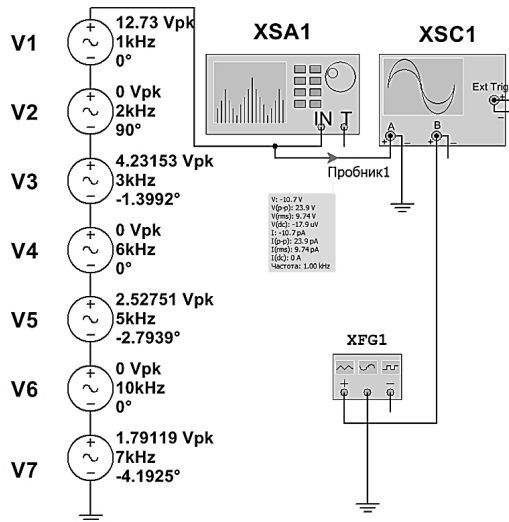


Рис. 1.16. Схема подключения источников и приборов для синтеза сигналов по Фурье

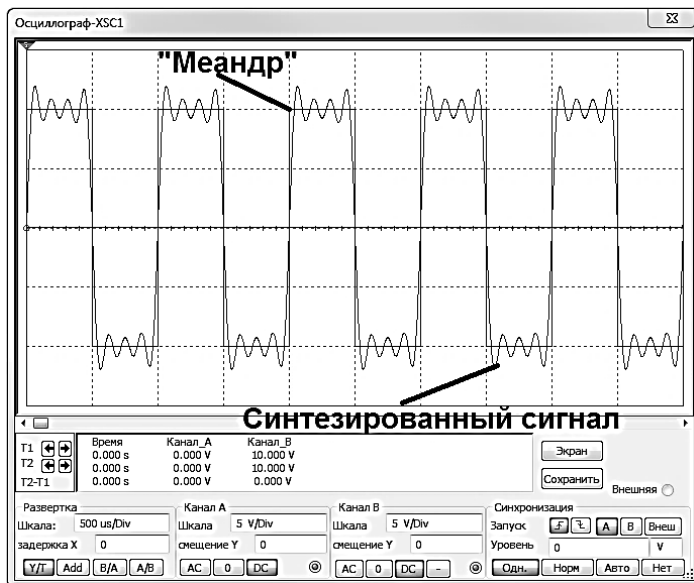


Рис. 1.17. Осциллограммы синтезированного сигнала и сигнала «меандр»

3. После запуска моделирования наблюдаем синтезированный сигнал на осциллографе (рис. 1.17).

4. Подадим на вход **В** осциллографа периодическую последовательность прямоугольных импульсов с параметрами  $T$  (период) = 1 мс,  $t_{\text{ц}}$  (длительность) = 0,5мс и **сравним сигналы** (рис. 1.17).

### **Компьютерный практикум**

#### **Порядок выполнения:**

1. Собрать схему (рис. 1.16).  
 2. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения  $V1-V7$ , согласно проведенным расчётам в пункте **Расчетно-практическое задание** для периодической последовательности прямоугольных импульсов. Синтезировать периодическое пилообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

3. Увеличить число источников переменного напряжения до восьми. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения  $V1-V8$ , согласно проведенным расчётам в пункте **Расчетно-практическое задание** для периодической последовательности пилообразных импульсов. Синтезировать периодическое пи-

лообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

4. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения  $V_1$ – $V_7$ , согласно проведенным расчётам в пункте **Расчетно-практическое задание** для периодической последовательности треугольных импульсов. Синтезировать периодическое пилообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

5. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

### Контрольные вопросы

1. Что такое система базисных тригонометрических функций?
2. Дайте определение амплитудного и фазового спектра периодического сигнала.
3. Какой характер носит спектр последовательности прямоугольных импульсов?
4. Чем отличается спектр одиночного импульса от спектра периодической последовательности импульсов?
5. Как показать, что система функций  $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$  является полной и ортогональной?
6. Почему простое гармоническое колебание  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  играет особо важную роль в радиотехнике?
7. Как определяются коэффициенты ряда Фурье?
8. Запишите прямое и обратное преобразование Фурье.
9. Как изменится форма сигнала, если из спектра периодического пилообразного колебания удалить четные гармоники?
10. Как рассчитывается среднеквадратическая погрешность аппроксимации сигнала конечным числом ортогональных составляющих?
11. Из каких соображений выбирается реальная ширина спектра прямоугольных колебаний, пилообразного периодического колебания, периодической последовательности треугольных импульсов?

## Тема 2. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

---

---

### 2.1. Теорема Котельникова

Передача непрерывных (аналоговых) сигналов по линии связи предполагает передачу бесконечного множества их мгновенных значений на протяжении конечного промежутка времени. При этом спектр финитного, т.е. ограниченного во времени, непрерывного сигнала бесконечен [1]. Однако, на практике различные радиотехнические устройства (фильтры, усилители и другие) имеют ограниченную полосу пропускания, что приводит к ограничению спектра сигнала некоторой граничной частотой  $f_B$  (или  $\omega_B$ ), которая определяется свойствами получателя сообщений. Так, например, общепринятой нормой в системах передачи речевых сигналов является ограничение спектра сигнала в пределах  $(0,3 \div 3,4) \text{ кГц}$ , в системах телевидения –  $(0 \div 6) \text{ МГц}$ . Как преодолеть противоречие между ограничением спектра сигнала и конечным временем его существования? Ответ на этот вопрос даёт теорема, сформулированная и доказанная академиком В.А. Котельниковым и получившая название теоремы Котельникова или теоремы отсчётов.

Теорема Котельникова формулируется следующим образом. Непрерывный сигнал  $s(t)$ , ограниченный по спектру частотой  $f_B$  (или  $\omega_B$ ), полностью определяется совокупностью мгновенных значений (отсчётов)  $s(t_k)$  в моменты времени  $t_k = k\Delta t$ , отстоящие друг от друга на интервал времени  $\Delta t = \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{\omega_B}$ .

Математически теорема Котельникова определяется выражением

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \quad (2.1)$$

или с учётом (2.12)

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot \text{sinc} 2\pi f_B(t - k\Delta t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot \text{sinc} \omega_B(t - k\Delta t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

которое представляет собой разложение сигнала  $s(t)$  в особого рода ряд по системе базисных функций

$$\{\eta_k(t)\} = \left\{ \frac{\sin 2\pi f_B (t - k\Delta t)}{2\pi f_B (t - k\Delta t)} \right\},$$

являющихся ортогональными на интервале времени  $(-\infty; \infty)$  (сравните с разложением сигнала в ряд Фурье).

Доказательство теоремы Котельникова приведено в литературе [1]. Мы же остановимся на вопросах физического толкования и практического применения результатов теоремы.

Выделим одно из слагаемых ряда (2.1)

$$s_k(t) = s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B (t - k\Delta t)}{2\pi f_B (t - k\Delta t)}. \quad (2.3)$$

Это слагаемое представляет собой отклик идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), т.е. фильтра с постоянным коэффициентом передачи в пределах полосы частот от нуля до  $f_B$ , на очень короткий импульс с амплитудой  $s(k\Delta t)$ , (рис. 2.1).

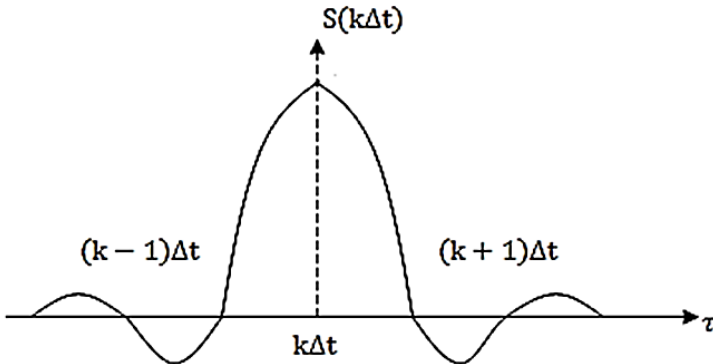


Рис. 2.1. Отклик идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) на короткий импульс с амплитудой  $s(k\Delta t)$

В моменты времени  $t_{k-1} = (k-1)\Delta t$ ,  $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$  и т.д. значения отклика равны нулю. Это определяет механизм восстановления непрерывного сигнала по его отсчётам.

Формирование последовательности отсчётов непрерывного сигнала, которая представляет собой дискретный сигнал, т.к. значение любого отсчёта  $s(k\Delta t)$  сохраняется неизменным в течение интервала време-

ни  $\Delta t$  (см. классификацию сигналов), осуществляется при помощи импульсного модулятора.

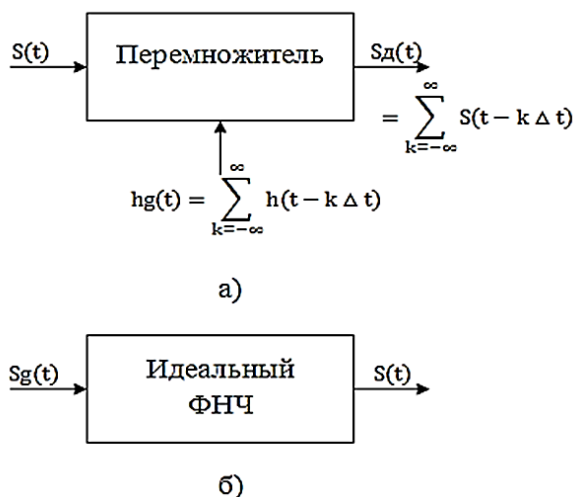


Рис. 2.2. Простейший вариант импульсного модулятора (перемножитель) (а), идеальный ФНЧ (б)

Простейший вариант импульсного модулятора представляет собой перемножитель (рис. 2.2), на один вход которого подаётся непрерывный сигнал  $s(t)$ , а на второй – последовательность

$$h_o(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - \Delta t)$$

коротких единичных импульсов вида, следующих друг за другом с периодом  $\Delta t$  (рис. 2.2 а). Тогда на выходе перемножителя будет иметь место последовательность коротких импульсов

$$s_o(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - k \Delta t),$$

амплитуды которых равны  $s(k \Delta t)$ , т.е. соответствуют мгновенным значениям сигнала  $s(t)$ , отсчитанным в момент времени  $t_k = k \Delta t$ .

Процесс формирования последовательности отсчётов называется дискретизацией непрерывного сигнала.

Восстановление непрерывного сигнала осуществляется путём подачи дискретного сигнала  $s_o(t)$  на идеальный фильтр нижних частот.

Отклик фильтра на каждый отсчёт определяется выражением (2.2). При этом, в момент времени  $t_k = k\Delta t$ , значение отклика определяется только  $k$ -ым отсчётом дискретного сигнала; отклик на остальные отсчёты равны нулю. Суммируясь, эти отклики дают на выходе ФНЧ исходный сигнал  $s(t)$ .

Отметим два важных обстоятельства.

Во-первых, точное восстановление сигнала имеет место только при  $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$ . Введя в рассмотрение частоту дискретизации  $f_o = \frac{1}{\Delta t} = 2f_B$ ,

получим так называемую *частоту Найквиста*, т.е. минимальное значение частоты дискретизации, при котором возможно точное восстановление непрерывного сигнала.

Во-вторых, точное восстановление сигнала возможно при суммировании бесконечного числа откликов, что соответствует сигналу  $s(t)$ , неограниченному во времени. Но в действительности, сигналы являются ограниченными и по спектру и по времени. Однако, при определённых допущениях теорема Котельникова справедлива и для этого случая.

Если сигнал, длительностью  $T_C$  ограничивается радиотехническим устройством с граничной частотой  $f_B$ , то для его представления в дискретной форме требуется конечное число  $N$  отсчетов, где

$$N = \frac{T_C}{\Delta t} = 2T_C \cdot f_B = \frac{\omega_B T_C}{\pi} \quad (2.4)$$

Таким образом, для восстановления сигнала длительностью  $T_C$ , ограниченного по спектру частотой  $f_B$  достаточно передать  $N$  независимых отсчетов, однозначно связанных с его формой.

Но теоретически сигнал, ограниченный по времени имеет бесконечный спектр. А это означает, что при восстановлении сигнала по  $N$  отсчетам будет иметь место ошибка, т.е. восстановленный сигнал  $\hat{s}(t)$  будет отличаться от исходного  $s(t)$ . Казалось бы, теорема Котельникова неприменима к реальным сигналам. Тем не менее, если к точности восстановления сигнала  $s(t)$  по  $N$  отсчетам предъявить определенные требования, например, допустить его восстановление с заданным уровнем ошибки, то утверждения теоремы Котельникова можно с успехом распространить на реальные сигналы, несколько изменив частоту дискретизации по сравнению с пределом Найквиста.



Теперь с учетом того, что реальный сигнал длительностью  $T_C$  представляется  $N$  отсчетами мгновенных значений, выражение (2.1) принимает вид:

$$s(t) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} s(k\Delta t) \operatorname{sinc} 2\pi f_B(t - k\Delta t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} s(k\Delta t) \operatorname{sinc} 2\pi f_B(t - k\Delta t).$$
(2.5)

Величина  $N$  называется *базой* сигнала  $s(t)$ . Понятие базы играет важную роль при представлении непрерывного сигнала конечным числом отсчетов. Соответствующим образом выбранная база определяет информационные показатели сигналов, способность противостоять помехам при передаче по каналам связи, энергетическую скрытность и другие.

Рассмотрим теперь вопрос оценки точности восстановления непрерывного сигнала по совокупности  $N$  отсчетов его мгновенных значений. Как уже неоднократно подчеркивалось выше, ограниченный во времени сигнал имеет бесконечный спектр. Согласно равенству Парсеваля энергия такого сигнала равна

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |(j\omega)|^2 d\omega =$$
(2.6)

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S^2(f) df,$$

где  $S^2(\omega)$  или  $S^2(f)$  – энергетический спектр, представленный как функция либо круговой  $\omega$ , либо циклической  $f$  частоты.

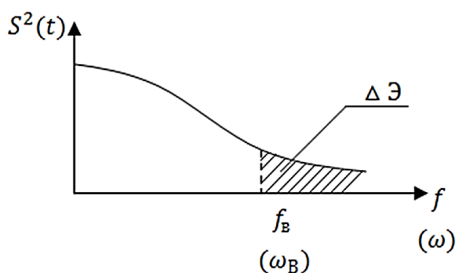


Рис. 3.3. Энергетический спектр сигнала, ограниченного во времени и граничная частота  $f_B$  или  $(\omega_B)$

Энергия за пределами частоты  $f_B$  (или  $\omega_B$ ) составляет величину

$$\Delta\mathcal{E} = 2 \int_{f_B}^{\infty} S^2(f) df = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (2.7)$$

На рис. 3.3 изображен энергетический спектр сигнала, ограниченного во времени и граничная частота  $f_B$  или  $(\omega_B)$ .

Площадь под всей кривой характеризует полную энергию сигнала  $\mathcal{E}_c$ , а площадь заштрихованного участка – ту часть энергии  $\Delta\mathcal{E}$ , которая сосредоточена за пределами  $f_B$ .

Тогда отношение

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \quad (2.8)$$

может служить оценкой точности восстановления сигнала. Задаваясь величиной  $\varepsilon^2$  можно определить частоту  $f_B$ , а следовательно, и частоту дискретизации  $f_0$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть сигнал  $s(t)$  на интервале времени  $(0, T_c)$  описывается экспоненциальной функцией

$$s(t) = \begin{cases} S_0 \cdot e^{-\alpha t}, & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0, & \text{при } t > T_c. \end{cases}$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, найдем спектральную функцию сигнала

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} S_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{\alpha + j\omega}.$$

Модуль спектральной функции

$$|S(j\omega)| = \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

а энергетический спектр

$$|S(j\omega)|^2 = S^2(\omega) = \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Воспользовавшись выражением (2.5), найдем энергию сигнала

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{S_0^2}{2\alpha}.$$

В соответствии с (2.6), вычислим  $\Delta\mathcal{E}$ :

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\infty} \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

При расчете  $\mathcal{E}_C$  и  $\Delta\mathcal{E}$  использован табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Найдем величину среднеквадратичной ошибки восстановления

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_C} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Представим

$$1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{\pi} (\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha},$$

откуда следует

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon^2 \pi}{2} = \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Полагая, что для малых значений  $x$

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x},$$

получим

$$\frac{2}{\varepsilon^2 \pi} = \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Теперь можно найти

$$\omega_B \approx \frac{2\alpha}{\pi \varepsilon^2},$$

или переходя к циклическим частотам

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi^2 \varepsilon^2} \approx 0,1 \frac{\alpha}{\varepsilon^2}.$$

### Частота дискретизации

$$f_0 = 2f_B = 0,2 \frac{\alpha}{\varepsilon^2}.$$

Таким образом, задаваясь величиной  $\varepsilon^2$ , можно определить частоту дискретизации непрерывного сигнала. Очевидно, число отсчетов при дискретизации рассматриваемого сигнала будет равно

$$N = 2f_B T_C = 0,4 \frac{\alpha \cdot T_C}{\varepsilon^2}.$$

Из приведенного примера следует, что чем меньшую ошибку восстановления требуется обеспечить, тем выше должна быть частота дискретизации.

Теорема Котельникова устанавливает однозначное соответствие между аналоговым сигналом и отсчетами его мгновенных значений во временной области. Оказывается, можно сформулировать теорему отсчетов и в частотной области. При этом примем во внимание, что комплексный спектр одиночного сигнала длительностью  $T_C$  является сплошным. Тогда имеет место следующее утверждение. *Спектральная функция  $S(j\omega)$  сигнала  $s(t)$ , ограниченного во времени величиной  $T_C$ , полностью определяется совокупностью отсчетов  $S(j\omega_k) = S(jk\Delta\omega)$ , отстоящих друг от друга на частотный интервал*

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_C}, \text{ т.е.}$$

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Delta\omega) \operatorname{sinc} \frac{T_C}{2} (\omega - k\Delta\omega). \quad (2.9)$$

Теорема отсчетов в частотной области основывается на свойстве симметрий преобразований Фурье относительно переменных  $\omega$  (или  $f$ ) и  $t$ . Суть этого свойства состоит в том, что преобразование Фурье периодического сигнала с периодом  $T$  приводит к линейчатой (дискретной) спектральной функции, где отдельные спектральные составляющие (см. подраздел 2.1) отстоят друг от друга по оси частот на величину

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (или } \Delta f = \frac{1}{T} \text{), и, наоборот, преобразование Фурье периоди-$$

ческой спектральной функции с периодом  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  приводит к дискретной временной функции с периодом  $T$ .

Исходя из этого свойства, если в (2.2) заменить  $s(t)$  на  $S(j\omega)$ ;  $\Delta t$  на  $\Delta\omega$ , а  $\omega_B$  на  $\frac{T_c}{2}$ , то в результате получим выражение (2.9). Как и в случае разложения сигнала  $s(t)$  в ряд Котельникова, разложение его спектра ограничивается  $N$  отсчетами. Тогда выражение (2.5) в частотной области принимает вид

$$\hat{S}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Delta\omega) \sin c \frac{T_c}{2}(\omega - k\Delta\omega). \quad (2.10)$$

Казалось бы, для восстановления спектральной функции  $S(j\omega)$  по совокупности отсчетов  $S(jk\Delta\omega)$ , необходимо знать  $N$  отсчетов модуля и  $N$  отсчетов аргумента комплексных величин  $S(jk\Delta\omega)$ . Однако, если учесть, что модуль спектра  $S(j\omega)$ , т.е. амплитудный спектр является четной функцией, а аргумент  $S(j\omega)$ , т.е. фазовый спектр – нечетной функцией, то число независимых отсчетов сокращается вдвое и составляет  $N = 2f_B T_c = \frac{\omega_B T_c}{\pi}$ , т.е. равно базе сигнала.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что теорема Котельникова устанавливает принципиальную возможность представления непрерывного сигнала последовательностью его мгновенных значений. Такую операцию иногда называют импульсным преобразованием непрерывного сигнала. Такое преобразование лежит в основе импульсных методов передачи сообщений в радиотехнических системах. Более того, дискретизация непрерывных сигналов в соответствии с теоремой Котельникова является промежуточной операцией при формировании цифровых сигналов, которые в настоящее время нашли самое широкое распространение как в радиотехнических системах передачи сообщений, так и радиоэлектронных системах обработки, отображения и регистрации информации и во многих других областях.

## 2.2. Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование сигналов

Представление непрерывного сигнала в виде последовательности дискретных отсчетов предполагает, что любой отсчёт  $s(k\Delta t)$  может принимать любое значение из непрерывного множества значений  $\{S\}$ . Вместе с тем цифровые технологии в радиотехнике требуют преобразований совокупности значений отсчетов в *цифровую последовательность*, т.е. в *последовательность чисел*. Процесс преобразования ана-

логового (непрерывного) сигнала в такую последовательность называется аналогово-цифровым преобразованием (АЦП).

Итак, на первом этапе аналогово-цифрового преобразования осуществляется дискретизация непрерывного сигнала, т.е. преобразование  $s(t)$  в  $s_o(t)$  в соответствии с теоремой Котельникова, которая была рассмотрена выше. В результате дискретизации непрерывный (аналоговый) сигнал преобразуется в последовательность отсчётов  $s(k\Delta t)$ .

На втором этапе последовательность отсчётов подвергается процедуре *квантования* по уровню. Квантование по уровню значений отсчётов  $s(k\Delta t)$  в простейшем случае представляет собой *округление* этих значений до ближайшего целого числа. Процедуру квантования осуществляет устройство с амплитудной характеристикой ступенчатого вида, которое называется *квантователем*. Амплитудная характеристика квантователя изображена на рис. 2.4.

При реализации квантователя диапазон изменения уровня дискретного сигнала  $s_o(t)$  разбивается на  $L+1$  уровней (включая нулевой), каждый из которых отличается от соседних на величину  $\Delta S_{\text{кв}}$ , называемую *шагом квантования*.

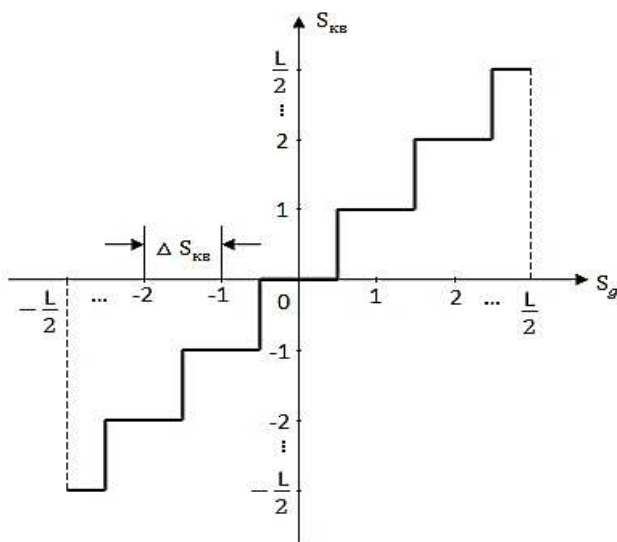


Рис. 2.4. Амплитудная характеристика квантователя

Таким образом, максимальное и минимальное значения квантованного сигнала соответственно равны

$$S_{\text{кв max}} = \frac{L}{2} \Delta S_{\text{кв}}, \quad S_{\text{кв min}} = -\frac{L}{2} \Delta S_{\text{кв}}.$$

В процессе квантования значение  $s(k\Delta t)$  в момент времени  $t_k = k\Delta t$  сравнивается со значением  $l \cdot \Delta S_{\text{кв}}$ , где  $-\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2}$ . Квантованный сигнал принимает значение

$$s_{\text{кв}}(t) = l \cdot \Delta S_{\text{кв}}, \quad (2.11)$$

если

$$\left(l - \frac{1}{2}\right) \Delta S_{\text{кв}} \leq s(k\Delta t) \leq \left(l + \frac{1}{2}\right) \Delta S_{\text{кв}}. \quad (2.12)$$

Отметим, что значение  $s_{\text{кв}}(k\Delta t)$  запоминается до момента следующего отсчёта дискретного сигнала.

Процедура квантования показана на рис. 2.5.

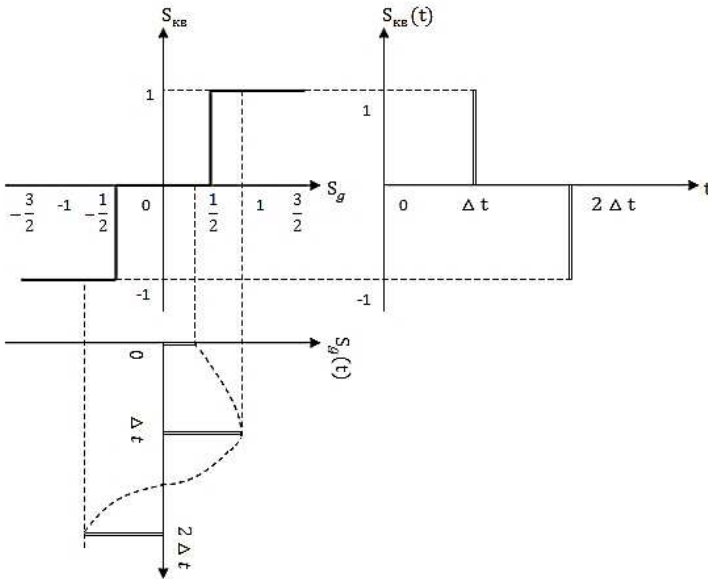


Рис. 2.5. Фрагмент амплитудной характеристики квантователя

На этом рисунке изображены фрагмент амплитудной характеристики квантователя, дискретный сигнал  $s_o(t)$ , временная диаграмма которого повернута на  $90^\circ$  для удобства пояснения процедуры квантования, и квантованный сигнал  $s_{кв}(t)$ .

Поясним процедуру квантования. Рассмотрим отсчёт  $s(0)$ . Поскольку значение этого отсчёта находится в интервале  $\left(-\frac{1}{2}\Delta S_{кв}, \frac{1}{2}\Delta S_{кв}\right)$ , в соответствии с (2.11) значение квантованного сигнала будет равно  $s_{кв}(0) = 0$ , т.к. условие (2.12) выполняется при  $l = 0$ . Значение отсчёта  $s(\Delta t)$ , как это следует из рисунка, находится в пределах  $\left(\frac{1}{2}\Delta S_{кв}, \frac{3}{2}\Delta S_{кв}\right)$ , т.е. условие (2.12) выполняется при  $l = 1$ , поэтому значение квантованного сигнала  $s_{кв}(\Delta t) = 1$ . И, наконец, значение отсчёта  $s(2\Delta t)$  находится в интервале  $\left(-\frac{1}{2}\Delta S_{кв}, -\frac{3}{2}\Delta S_{кв}\right)$ , а значение квантованного сигнала  $s_{кв}(2\Delta t) = -1$ .

Ввиду того, что при квантовании осуществляется фактически округление значений  $s_o(t)$ , квантованный сигнал будет отличаться от дискретного. При этом искажения, вносимые квантователем

$$\varepsilon_{кв}(t) = s_{кв}(t) - s_o(t), \quad (2.13)$$

*принципиально неустранимы*. Поэтому при преобразовании непрерывного сигнала в цифровой необходимо оценивать степень искажений, вносимых квантователем.

Искажения, вносимые квантователем, целесообразно оценивать величиной среднеквадратичной ошибки. При исследовании процедур квантования было установлено, что величина среднеквадратичной ошибки

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\Delta S_{кв}}{12}.$$

Таким образом, ошибка квантования тем меньше, чем меньше шаг квантования  $\Delta S_{кв}$ .

Физически  $\varepsilon_{кв}(t)$  при преобразовании реальных сигналов проявляется в виде шума. Поэтому искажения  $\varepsilon_{кв}(t)$  получили название *шума квантования*.



Сигнал на выходе квантователя уже представляет собой цифровой сигнал, однако, представленный в  $L$ -ичной системе счисления. Напомним, что любое число  $A$  может быть представлено в системе счисления с основанием  $L$  следующим образом:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^i = \alpha_{n-1} L^{n-1} + \alpha_{n-2} L^{n-2} + \dots + \alpha_1 L^1 + \alpha_0 L^0,$$

где  $\alpha_i$  принимает значение из совокупности значений от 0 до  $L-1$ ;

$n$  – значность числа (количество разрядов, которым представлено число).

Нетрудно убедиться в том, что любое значение  $s_{кв}(t)$  на промежутке времени  $\Delta t$  от момента  $t_k = k\Delta t$  до момента  $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$  (вспомним замечание о том, что значение  $s_{кв}(t)$  запоминается) равно

$$s_{кв}(k\Delta t) = s_{кв}(k\Delta t) \cdot L^0.$$

Иными словами, квантованный сигнал  $s_{кв}(k\Delta t)$  представлен одно-разрядным числом в  $L$ -ичной системе счисления. Так как  $L$  – число уровней квантования, которое выбирается довольно большим, осуществлять передачу и обработку такого сигнала средствами вычислительной техники, которые оперируют в подавляющем большинстве случаев с числами в двоичной системе счисления, неудобно. Поэтому квантованный сигнал как число, необходимо перевести из  $L$ -ичной системы в некоторую другую, более удобную с точки зрения дальнейшей передачи и обработки, систему счисления. Эта операция называется *кодированием*.

Перевод числа из одной системы счисления в другую сопровождается изменением разрядности числа. Соотношение разрядности числа, представленного в системах с основаниями  $L_1$  и  $L_2$ , определяются формулой

$$n_1 \log_2 L_1 = n_2 \log_2 L_2.$$

Поэтому при переводе числа из системы с основанием  $L_1$  в систему с основанием  $L_2$  число разрядов будет равно

$$n_2 = n_1 \left\lceil \frac{\log_2 L_1}{\log_2 L_2} \right\rceil, \quad (2.14)$$

где знак  $\lceil \cdot \rceil$  означает округление до ближайшего верхнего целого числа.

Практикой установлено, что для передачи речевого сигнала в цифровой форме необходимо 256 уровней квантования. Эта величина при-

нята в качестве международного стандарта. Значит, при квантовании речевого сигнала значение  $s_{кв}(k\Delta t)$  будет представлено одним разрядом в 256-ричной системе счисления. Для дальнейшей передачи и обработки эти числа обычно переводят в двоичную систему счисления. При этом количество разрядов числа  $s_{кв}(k\Delta t)$ , в соответствии с (2.14), составит

$$n = 1 \cdot \frac{\log_2 256}{\log_2 2} = 8,$$

а значение каждого разряда может быть или нулем, или единицей.

Таким образом, в результате кодирования квантованный сигнал  $s_{кв}(k\Delta t)$  принимает форму двоичной последовательности, называемой *кодовой комбинацией* или *кодovým словом*.

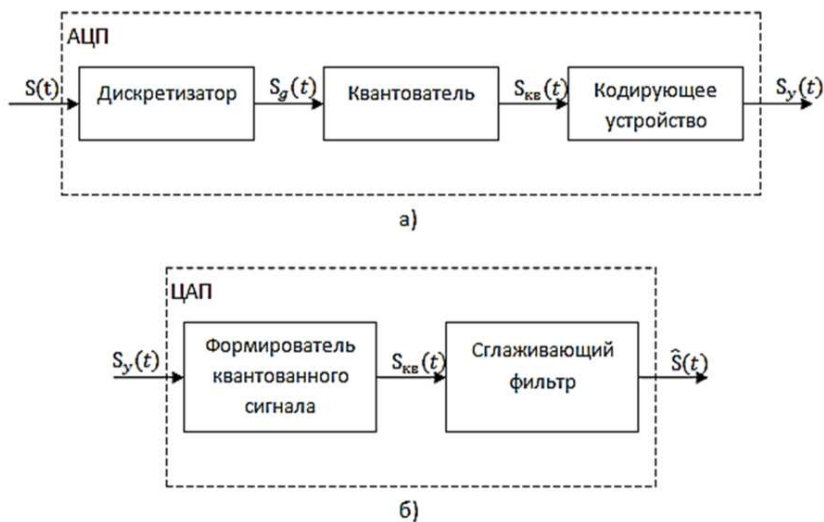


Рис. 2.6. Основные элементы и сигналы на их входах АЦП (а), ЦАП (б)

Длительность кодовой комбинации цифрового двоичного сигнала, очевидно, должна быть равна  $T_{kk} = \Delta t$ , т.е. интервалу дискретизации. Отсюда длительность элемента (разряда) кодовой комбинации

$$\tau_p = \frac{T_{kk}}{n} = \frac{\Delta t}{n}.$$

Выше было отмечено, что для уменьшения ошибки квантования необходимо уменьшать величину шага квантования  $\Delta S_{кв}$ . Однако при этом увеличивается число уровней, что в свою очередь приводит к увеличению разрядности кодовой комбинации цифрового сигнала, уменьшению длительности разряда и, следовательно, расширению спектра цифрового сигнала. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании систем передачи цифровых сигналов по каналам связи.

На практике операции дискретизации, квантования и кодирования осуществляются в одном устройстве, называемом *аналого-цифровым преобразователем* (АЦП). Структурная схема АЦП представлена на рис. 2.6 а. На схеме показаны основные элементы АЦП и сигналы на их входах.

Операция обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый выполняется *цифро-аналоговым преобразователем* (ЦАП), схема которого представлена на рис. 2.6 б, и предусматривает ряд этапов.

В первую очередь цифровой двоичный сигнал подвергается поразрядному взвешенному (с «весом»  $2^i$ ) суммированию, в результате чего в моменты времени  $t_k = k\Delta t$  формируется квантованный сигнал  $s_{кв}(k\Delta t)$ . После этого последовательность значений квантованного сигнала поступает на сглаживающий фильтр с амплитудно-частотной характеристикой

$$K(f) = K(\omega) = K_0 = const$$

в пределах полосы пропускания  $(0, \omega_B)$  или  $(0, f_B)$ . Как известно из предыдущего материала, при поступлении на вход фильтра сигнала в виде короткого импульса амплитудой  $s_{кв}(k\Delta t)$ , сигнал на выходе будет иметь вид

$$s_{\phi}(t) = s_{кв}(k\Delta t) \cdot sinc 2\pi f_B (t - k\Delta t).$$

Сложение откликов фильтра дает сигнал  $\hat{s}(t)$ . Следует подчеркнуть, что восстановленный сигнал  $\hat{s}(t)$  будет отличаться от исходного  $s(t)$  ввиду наличия ошибки квантования.

### ***Компьютерный практикум: Изучение дискретных и цифровых сигналов в программном пакете NI Multisim***

**Цель работы:** изучить характеристики дискретных и цифровых сигналов.

### Порядок выполнения:

1. В соответствии с данными варианта собрать рабочую схему для изучения дискретных сигналов (рис. 2.7).

2. Получить осциллограммы на экране осциллографа **XSC1** сигнала сообщения, сформированного источником переменного напряжения **V1**, и сигнала на выходе 8-битного ЦАП преобразователя **U3** (см. пример на рис. 2.8).

3. Используя маркеры, измерить шаг квантования  $\Delta u$  и дискретизации  $\Delta T_D$  по осциллограмме на выходе ЦАП (дискретный сигнал). Сравнить с расчетными значениями:

$$\Delta T_D = 1/f_D; \Delta u = V1/256$$

4. В соответствии с данными варианта, собрать рабочую схему для изучения цифровых сигналов (рис. 2.9).

5. Рассчитать десятичный цифровой код для 8-битного АЦП для значений, приведенных в табл. 2.2. Преобразовать десятичный код в двоичный. Результаты занести в табл. 2.2.

$$D(10)_{\text{расч}} = 2^8 \cdot u_{\text{вх}} / 2 \cdot V2.$$

6. Последовательно установить значения напряжения источника **V1** в соответствии с табл. 2.1. После установки каждого значения следует запустить схему на моделирование. Полученные данные занести в табл. 2.2.

Таблица 2.1

### Данные вариантов

№ варианта	Частота сигнала $f_C$ , кГц	Частота дискретизации $f_D$ , кГц	Напряжения источников $V1/V2/V3$ , В
1	2	3	4
1	4	32	6/10/10
2	4	32	7/10/10
3	5	32	6/10/10
4	5	32	7/10/10
5	6	32	6/10/10
6	6	32	7/10/10
7	4	44.1	6/10/10
8	4	44.1	7/10/10
9	5	44.1	6/10/10
10	5	44.1	7/10/10

1	2	3	4
11	6	44.1	6/10/10
12	6	44.1	7/10/10
13	7	44.1	6/10/10
14	7	44.1	7/10/10
15	4	48	6/10/10
16	4	48	7/10/10
17	5	48	6/10/10
18	5	48	7/10/10
19	6	48	6/10/10
20	6	48	7/9/9

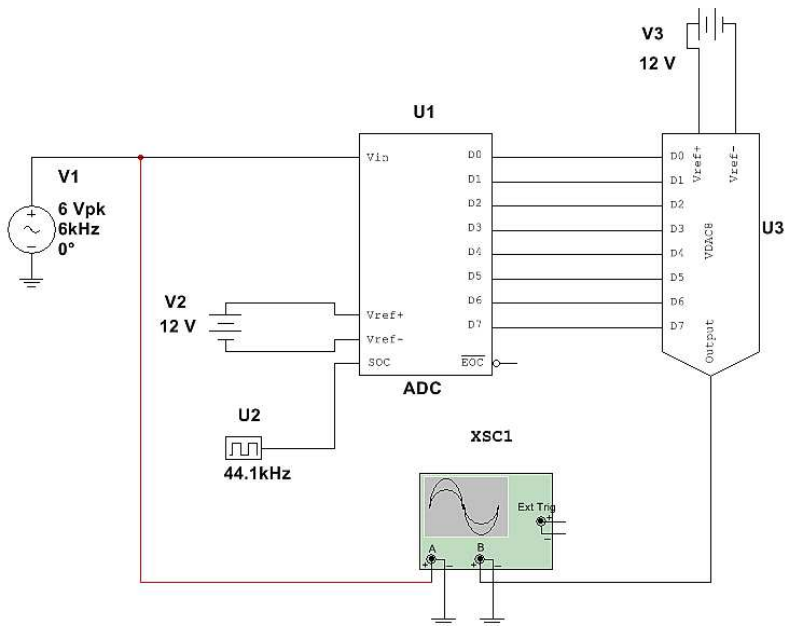


Рис. 2.7. Рабочая схема для изучения дискретных сигналов

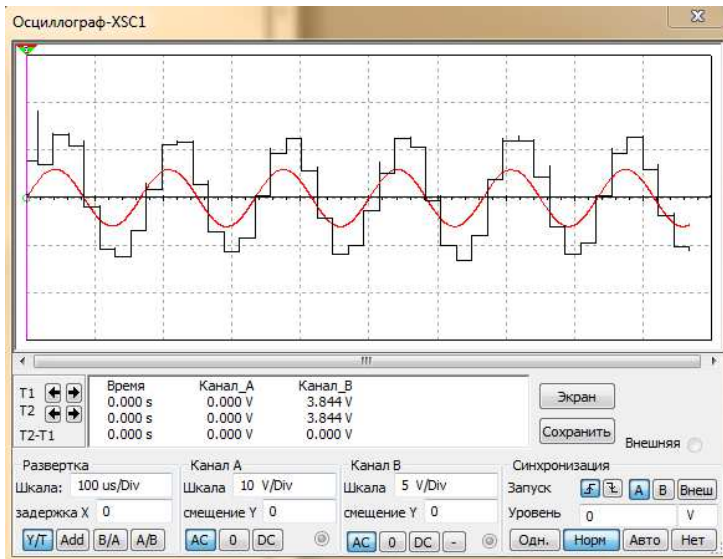


Рис. 2.8. Осциллограммы сигнала сообщения и дискретизированного сигнала

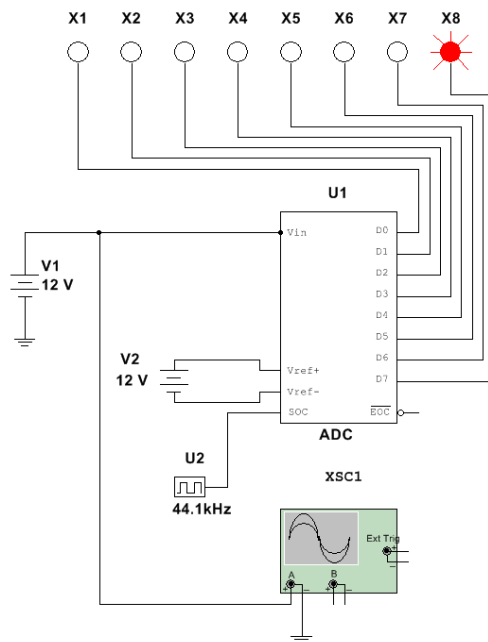


Рис. 2.9. Рабочая схема для изучения цифровых сигналов

## Результаты расчётов и измерений

$u_{вх}$ , В	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Код (расчёт)											
Код (измерения)											

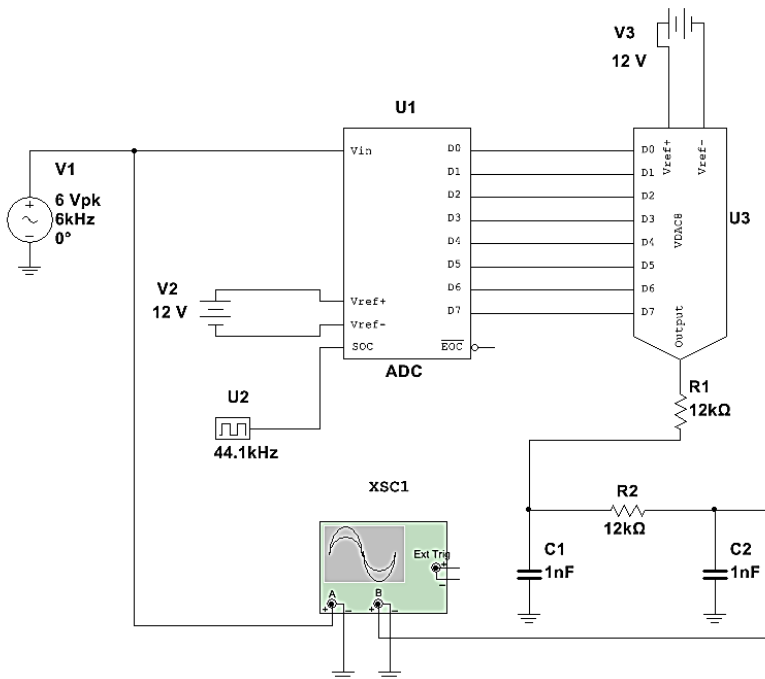


Рис. 2.10. Рабочая схема проверки выполнения теоремы Котельникова

7. В соответствии с данными варианта собрать рабочую схему для изучения выполнения теоремы Котельникова (рис. 2.10).

8. Получить осциллограммы на выходе фильтра нижних частот (ФНЧ) R1C1R2C2 для частот дискретизации 1 кГц, 6 кГц, 10 кГц,  $0.5f_d$ ,  $f_d$ ,  $1.5f_d$ .

9. Сравнить формы сигналов сообщения (канал А осциллографа) с сигналом выходе ФНЧ. Сделать выводы о выполнении/невыполнении теоремы Котельникова.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Котельникова для сигналов с ограниченным спектром.
2. Какой вид имеет спектр дискретного выборочного сигнала при  $f_{\text{выб}} > 2f_m$ , при  $f_{\text{выб}} = 2f_m$ , при  $f_{\text{выб}} < 2f_m$ ?
3. Разложите ряд Котельникова по ортогональным функциям отсчета. Чему равны коэффициенты этого ряда?
4. Для чего при восстановлении сигнала по дискретным выборкам требуется идеальный ФНЧ?
5. Какой вид имеют амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики идеального ФНЧ?
6. Объясните погрешности синтеза реальных сигналов по дискретным отсчетам.
7. Запишите математически теорему В.А. Котельникова.
8. Что такое частота Найквиста? Какова она для речевого сигнала?
9. Как определяется база сигнала?
10. При каких условиях замена непрерывного сигнала дискретным может стать неадекватной?
11. Как величина среднеквадратичной ошибки связана с частотой дискретизации непрерывного сигнала?
12. Каким образом совокупность отсчетов сигнала можно преобразовать в цифровую последовательность?
13. В чем состоит процедура квантования дискретного сигнала по уровню?
14. Из каких соображений выбирается шаг квантования сигнала? Что такое шум квантования?
15. Что понимается под операцией кодирования в устройстве аналогово-цифрового преобразователя (АЦП)?
16. Приведите схему АЦП и покажите сигналы на входах всех его элементов.
17. Как выполняется операция обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый в системе ЦАП?



## Тема 3. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

---

### 3.1. Классификация видов модуляции

Рассмотренные выше методы анализа первичных сигналов позволяют определить их спектральные и энергетические характеристики [1]. Первичные сигналы являются основными носителями информации. Вместе с тем их спектральные характеристики не соответствуют частотным характеристикам каналов передачи радиотехнических информационных систем. Как правило, энергия первичных сигналов сосредоточена в области низких частот. Так, например, при передаче речи или музыки энергия первичного сигнала сосредоточена примерно в диапазоне частот от 20 Гц до 15 кГц. В то же время диапазон дециметровых волн, который широко используются для передачи информационных и музыкальных программ, занимает частоты от 300 до 3000 мегагерц. Возникает задача переноса спектров первичных сигналов в соответствующие диапазоны радиочастот для передачи их по радиоканалам. Эта задача решается посредством операции модуляции.

**Модуляцией** называется процедура преобразования низкочастотных первичных сигналов в сигналы радиочастотного диапазона.

В процедуре модуляции участвуют первичный сигнал  $s(t)$  (и некоторое вспомогательное колебание  $u_{\text{нес}}(t)$ , называемое *несущим колебанием* или просто несущей. В общем виде процедуру модуляции можно представить следующим образом

$$u(t) = W_{\text{мод}}[s(t), u_{\text{нес}}(t)],$$

где  $W_{\text{мод}}$  – правило преобразования (оператор) первичного сигнала  $s(t)$  в модулированное колебание  $u(t)$ .

Это правило указывает, какой параметр (или несколько параметров) несущего колебания изменяются по закону изменения  $s(t)$ . Поскольку  $s(t)$  управляет изменением параметров  $u_{\text{нес}}(t)$ , то, как было отмечено в первом разделе, сигнал  $s(t)$ , является управляющим (модулирующим), а  $u(t)$  – модулированными сигналами. Очевидно,  $W_{\text{мод}}$  соответствует оператору  $W_{\text{прд}}$  обобщенной структурной схемы РТИС.

Вышеприведенное выражение позволяет провести классификацию видов модуляции, которая представлена на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Классификация видов модуляции

В качестве классификационных признаков выберем вид (форму) управляющего сигнала  $s(t)$  форму несущего колебания  $u_{нес}(t)$  и вид управляемого параметра несущего колебания.

В первом разделе была проведена классификация первичных сигналов. В радиотехнических информационных системах наиболее широкое распространение в качестве первичных (управляющих) сигналов получили непрерывные и цифровые сигналы. В соответствии с этим по виду управляющего сигнала можно выделить *непрерывную* и *дискретную* модуляцию.

В качестве несущего колебания в практической радиотехнике используются гармонические колебания и импульсные последовательности. В соответствии с формой несущего колебания различают *модуляцию гармонической несущей* и *импульсную модуляцию*.

И, наконец, по виду управляемого параметра несущего колебания в случае гармонической несущей различают *амплитудную, частотную и фазовую модуляцию*. Очевидно, в этом случае в качестве управляемого параметра выступают, соответственно, амплитуда, частота или начальная фаза гармонического колебания. Если в качестве несущего колебания используется импульсная последовательность, то аналогом частотной модуляции является *широтная импульсная модуляция*, где управляемым параметром выступает длительность импульса, а аналогом фазовой модуляции – *временная импульсная модуляция*, где управляемым параметром выступает положение импульса на временной оси.

В современных радиотехнических системах наиболее широко в качестве несущего колебания используется гармоническое колебание. Учитывая это обстоятельство в дальнейшем, основное внимание будет уделено сигналам с непрерывной и дискретной модуляцией гармонической несущей.

### 3.2. Сигналы с непрерывной амплитудной модуляцией

Рассмотрение модулированных сигналов начнем с сигналов, у которых в качестве изменяемого параметра выступает *амплитуда* несущего колебания. Модулированный сигнал в этом случае *является амплитудно-модулированным или сигналом с амплитудной модуляцией (АМ-сигналом)*.

Как уже было отмечено выше, основное внимание будет уделено сигналам, несущее колебание которых представляет собой гармоническое колебание вида

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos \omega_0 t, \quad (3.1)$$

где  $U_m$  – амплитуда несущего колебания,  $\omega_0$  – частота несущего колебания.

Здесь и далее полагается, что начальные фазы гармонических колебаний равны нулю.

В качестве модулирующих сигналов сначала рассмотрим непрерывные сигналы  $s(t)$ . Тогда модулированные сигналы будут являться сигналами с *непрерывной амплитудной модуляцией*. Такой сигнал описывается выражением

$$u_{\text{АМ}} = U(t) \cos \omega_0 t = U_m [1 + k_{\text{АМ}} s(t)] \cos \omega_0 t, \quad (3.2)$$

где  $U(t) = U_m [1 + k_{\text{АМ}} s(t)]$  – огибающая АМ-сигнала,

$k_{\text{АМ}}$  – коэффициент амплитудной модуляции.

Из выражения (3.2) следует, что АМ-сигнал представляет собой произведение огибающей  $U(t)$  на гармоническую функцию  $\cos \omega_0 t$ . Коэффициент амплитудной модуляции  $k_{\text{АМ}}$  *характеризует глубину модуляции* и в общем случае описывается выражением

$$k_{\text{АМ}} = \frac{U_{\text{АМ max}} - U_{\text{АМ min}}}{U_{\text{АМ max}} + U_{\text{АМ min}}}. \quad (3.3)$$

Очевидно, при  $k_{\text{АМ}} = 0$  сигнал представляет собой просто несущее колебание.

Для более детального анализа характеристик АМ-сигналов рассмотрим простейший АМ-сигнал, в котором в качестве модулирующего сигнала  $s(t)$  выступает гармоническое колебание

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t, \quad (3.4)$$

где  $S_0, \Omega$  – соответственно, амплитуда и частота модулирующего (управляющего) сигнала, причем  $\omega_0 \gg \Omega$ . В этом случае сигнал описывается выражением

$$\begin{aligned}
 u_{AM}(t) &= U_m \left[ 1 + \frac{S_0}{U_0} \cos \Omega t \right] \cos \omega_0 t = \\
 &= U_m [1 + k_{AM} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

и называется сигналом однотоновой амплитудной модуляции.

На рисунке 3.2 изображены модулирующий сигнал  $s(t)$ , колебание несущей частоты  $u_{нec}(t)$  и сигнал  $u_{AM}(t)$ .

Для такого сигнала коэффициент глубины амплитудной модуляции равен

$$k_{AM} = \frac{S_0}{U_m}.$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\cos \alpha \cos \beta = 0.5 [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

после преобразований получим

$$\begin{aligned}
 u_{AM}(t) &= U_m \cos \omega_0 t + 0.5 k_{AM} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\
 &+ 0.5 k_{AM} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t.
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

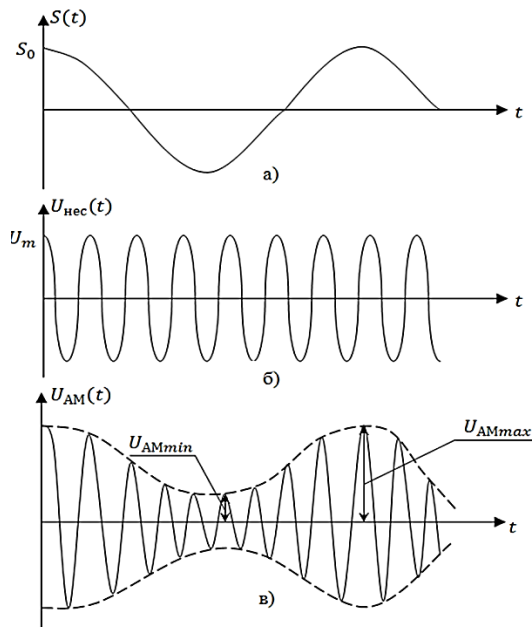


Рис. 3.2. Осциллограммы модулирующего сигнала  $s(t)$  (а), колебания несущей частоты  $u_{нec}(t)$  (б) и сигнала  $u_{AM}(t)$  (в)

Выражение (3.6) устанавливает спектральный состав однотонового АМ-сигнала. Первое слагаемое представляет собой немодулированное колебание (несущее колебание). Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим, появившимся в результате модуляции амплитуды несущего колебания; частоты этих колебаний  $\omega_H = \omega_0 - \Omega$  и  $\omega_B = \omega_0 + \Omega$  называются нижней и верхней боковыми частотами, а сами составляющие – нижней и верхней боковыми составляющими.

Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют величину

$$U_H = U_B = 0.5k_{AM}U_m, \quad (3.7)$$

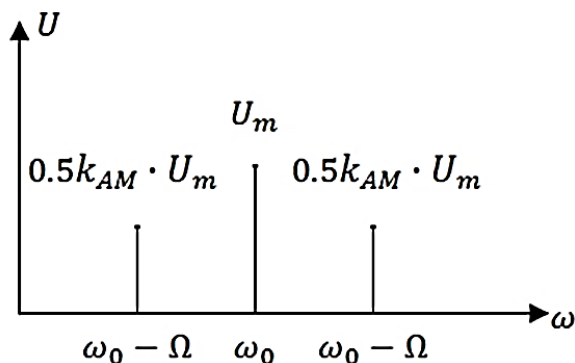


Рис. 3.3. Амплитудный спектр однотонового АМ-сигнала

На рисунке 3.3 изображен амплитудный спектр однотонового АМ-сигнала. Из этого рисунка следует, что амплитуды боковых составляющих располагаются симметрично относительно амплитуды и начальной фазы несущего колебания. Очевидно, ширина спектра однотонового АМ-сигнала равна удвоенной частоте управляющего сигнала

$$\Delta\omega_{AM} = \omega_B - \omega_H = \omega_0 + \Omega - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega.$$

В общем случае, когда управляющий сигнал характеризуется произвольным спектром, сосредоточенным в полосе частот от  $\Omega_H$  до  $\Omega_B$ , спектральный характер АМ-сигнала принципиально не отличается от однотонового.

На рисунке 3.4 изображены спектры управляющего сигнала и сигнала с амплитудной модуляцией. В отличие от однотонового АМ-сигнала в спектре произвольного АМ-сигнала фигурируют нижняя и верхняя боковые полосы. При этом верхняя боковая полоса является копией спектра управляющего сигнала, сдвинутой по оси частот на ве-

личину  $\omega_n$ , а нижняя боковая полоса представляет собой зеркальное отображение верхней. Очевидно, ширина спектра произвольного АМ-сигнала

$$\Delta\omega_{AM} = \omega_0 + \Omega_B - (\omega_0 - \Omega_B) = 2\Omega_B, \quad (3.8)$$

т.е. равна удвоенной верхней граничной частоте управляющего сигнала.

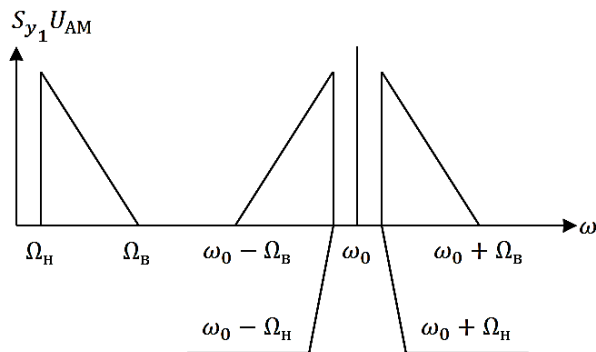


Рис. 3.4. Спектры управляющего сигнала и сигнала с амплитудной модуляцией

Средняя мощность однотонального АМ-сигнала за период  $T$  управляющего сигнала определяется выражением:

$$P_{AM} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{AM}^2(t) dt. \quad (3.9)$$

Так как  $\omega_0 \gg \Omega$ , а  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , положим  $\omega_0 = \frac{2\pi n}{T} = n\Omega$ , где  $n \gg 1$ .

Подставляя выражение (3.6) в (3.9), после несложных, но достаточно громоздких преобразований с учетом того, что  $\omega_0 = n\Omega$  и с использованием тригонометрических соотношений

$$\cos^2 \alpha = 0.5[1 + \cos 2\alpha] \text{ и } \cos \alpha \cos \beta = 0.5[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

получим

$$P_{AM} = 0.5U_m^2 + 0.25k_{AM}^2 U_m^2. \quad (3.10)$$

Здесь первое слагаемое характеризует среднюю мощность несущего колебания, а второе – суммарную среднюю мощность боковых составляющих, т.е.

$$P_{AM} = P_{нес} + P_n + P_B.$$

Так как суммарная средняя мощность боковых составляющих делится поровну между нижней и верхней, что вытекает из (3.7), то отсюда следует

$$P_H = P_B = 0.125k_{AM}^2 U_m^2. \quad (3.11)$$

Таким образом, на передачу несущего колебания в АМ-сигнале тратится более половины мощности (с учетом того, что  $k_{AM} \leq 1$ ), чем на передачу боковых составляющих. Так как информация заложена именно в боковых составляющих, передача составляющей несущего колебания нецелесообразна с энергетической точки зрения. Поиск более эффективных методов использования принципа амплитудной модуляции приводит к сигналам балансной и однополосной амплитудной модуляции.

### 3.3. Сигналы балансной и однополосной амплитудной модуляции

Сигналы балансной амплитудной модуляции (БАМ) характеризуются отсутствием в спектре составляющей несущего колебания. Перейдем сразу к рассмотрению сигналов однотональной балансной модуляции, когда в качестве управляющего колебания выступает гармонический сигнал вида (3.4). Исключение из (3.6) составляющей несущего колебания

$$U_{нес}(t) = U_m \cos \omega_0 t,$$

приводит к результату

$$u_{БАМ}(t) = 0.5k_{AM}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0.5k_{AM}U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (3.12)$$

Рассчитаем среднюю мощность сигнала балансной модуляции. Подстановка (3.12) в (3.9) после преобразований дает выражение

$$P_{БАМ} = 0.25k_{AM}^2 U_m^2.$$

Очевидно, что энергетический выигрыш при использовании сигнала балансной модуляции по сравнению с классической амплитудной модуляцией будет равен

$$\eta_{БАМ} = \frac{P_{AM}}{P_{БАМ}} = \frac{0.5U_m^2 + 0.25k_{AM}^2 U_m^2}{0.25k_{AM}^2 U_m^2} = \frac{2 + k_{AM}^2}{k_{AM}^2}.$$

При  $k_{AM} = 1$  этот выигрыш составляет величину  $\eta = 3$ .

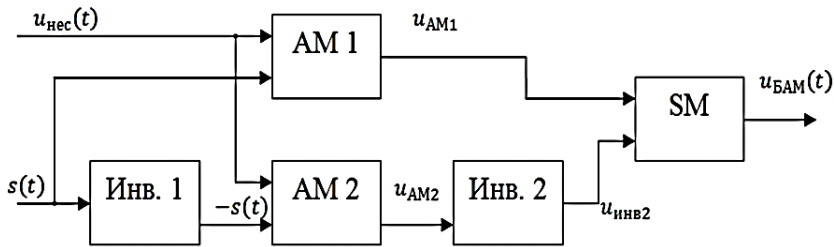


Рис. 3.5. Вариант структурной схемы формирователя сигналов балансной амплитудной модуляции

На рисунке 3.5 представлен один из вариантов структурной схемы формирователя сигналов балансной амплитудной модуляции. Формирователь содержит:

- Инв1, Инв2 – инверторы сигналов (устройства, изменяющие полярность напряжений на противоположную);
- AM1, AM2 – амплитудные модуляторы;
- SM – сумматор.

Колебание несущей частоты  $u_{нec}(t)$  поступает на входы модуляторов AM1 и AM2 непосредственно. Что касается управляющего сигнала  $s(t)$ , то на второй вход AM1 он поступает непосредственно, а на второй вход AM2 – через инвертор Инв1. В результате на выходах модуляторов формируются колебания вида:

$$u_{AM1}(t) = U_m [1 + k_{AM} s(t)] \cos \omega_0 t,$$

$$u_{AM2}(t) = U_m [1 - k_{AM} s(t)] \cos \omega_0 t.$$

На входы сумматора поступают, соответственно, колебания  $u_{AM1}(t)$  и  $u_{Инв2}(t)$ . Результирующий сигнал на выходе сумматора составит

$$u_{SM}(t) = u_{БАМ}(t) = 2U_0 k_{AM} s(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.13)$$

В случае однотоновой амплитудной модуляции выражение (3.13) принимает вид

$$u_{БАМ}(t) = 2k_{AM} U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t. \quad (3.14)$$

Используя формулу произведения косинусов, после преобразований получим

$$u_{БАМ}(t) = k_{AM} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + k_{AM} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad (3.15)$$

что с точностью до постоянного множителя совпадает с (3.12). Очевидно, ширина спектра сигналов БАМ равна ширине спектра сигналов АМ.



Балансная амплитудная модуляция позволяет исключить передачу несущего колебания, что приводит к энергетическому выигрышу. Вместе с тем обе боковые полосы (боковые составляющие в случае однонаправленной АМ) несут одну и ту же информацию. Напрашивается вывод о целесообразности формирования и передачи сигналов с подавленной одной из боковых полос. В этом случае мы приходим к однополосной амплитудной модуляции (ОАМ).

Если из спектра сигнала БАМ исключить одну из боковых составляющих (скажем, верхнюю боковую составляющую), то в случае гармонического управляющего сигнала получим

$$u_{OAM}(t) = 0.5k_{AM}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (3.16)$$

Так как средняя мощность сигнала БАМ делится поровну между боковыми составляющими, то очевидно, что средняя мощность сигнала ОАМ составит

$$P_{OAM} = 0.5P_{BAM} = 0.125k_{AM}^2 U_m^2.$$

Энергетический выигрыш по сравнению с амплитудной модуляцией составит

$$\eta_{OAM} = \frac{P_{AM}}{P_{OAM}} = \frac{0.5U_m^2 + 0.125k_{AM}^2 U_m^2}{0.125k_{AM}^2 U_m^2} = \frac{4 + 2k_{AM}^2}{k_{AM}^2},$$

а при  $k_{AM}=1$  он будет равен.

Формирование однополосного АМ-сигнала может быть осуществлено на базе формирователей сигналов балансной модуляции. Структурная схема формирователя однополосного АМ-сигнала представлена на рис. 3.6.

В состав формирователя сигнала однополосной амплитудной модуляции входят:

- ФВ1, ФВ2 – фазовращатели на угол  $\pi/2$ ;
- БАМ1, БАМ2 – формирователи сигналов балансной модуляции;
- СМ – сумматор.

На входы БАМ1 поступают сигналы:

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t$$

$$\text{и } u_{нес}(t) = U_m \cos \omega_0 t.$$

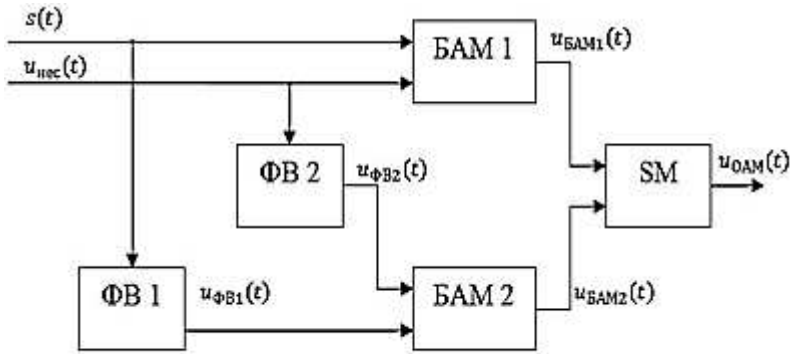


Рис. 3.6. Схема формирования однополосного АМ-сигнала

Тогда на его выходе в соответствии с (3.15) формируется сигнал

$$u_{\text{БАМ1}}(t) = k_{\text{АМ}} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + k_{\text{АМ}} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (3.17)$$

На входы БАМ2 поступают сигналы

$$u_{\text{ФВ1}}(t) = S_0 \sin \Omega t$$

и  $u_{\text{ФВ2}} = U_m \sin \omega_0 t$ .

С выхода БАМ 2 снимается колебание, описываемое в соответствии с (3.14), с заменой косинусов на синусы

$$u_{\text{БАМ2}}(t) = 2k_{\text{АМ}} U_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t.$$

С учетом известного тригонометрического соотношения

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

выходной сигнал БАМ2 преобразуется к виду

$$u_{\text{БАМ2}}(t) = k_{\text{АМ}} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t - k_{\text{АМ}} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (3.18)$$

Сложение сигналов (3.17) и (3.18) в сумматоре SM дает

$$u_{\text{SM}}(t) = u_{\text{ОАМ}}(t) = 2k_{\text{АМ}} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (3.19)$$

что с точностью до постоянного множителя совпадает с (3.16). Что касается спектральных характеристик, то ширина спектра сигналов ОАМ вдвое меньше спектра АМ или БАМ сигналов.

Таким образом, при одинаковых  $U_m$  и  $k_{\text{АМ}}$  однополосная АМ обещивает существенный энергетический выигрыш по сравнению с клас-

сической АМ и балансной модуляцией. Вместе с тем, реализация сигналов балансной амплитудной и однополосной амплитудной модуляции сопряжена с некоторыми трудностями, касающимися необходимости восстановления несущего колебания при обработке сигналов на приемной стороне. Эта задача решается устройствами синхронизации передающей и приемной сторон, что в общем плане приводит к усложнению аппаратуры.

### 3.4. Сигналы с непрерывной угловой модуляцией. Обобщенное представление сигналов с угловой модуляцией

В предыдущем разделе была рассмотрена процедура модуляции, когда информационным параметром, изменяемым в соответствии с законом управляющего (модулирующего) сигнала являлась амплитуда несущего колебания. Кроме амплитуды несущее колебание характеризуется также частотой  $\omega_0$  и начальной фазой  $\varphi_0$

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = U_m \cos \phi(t), \quad (3.20)$$

где  $\phi(t)$  – полная фаза несущего колебания, которая определяет текущее значение фазового угла.

Изменение либо  $\omega_0$ , либо  $\varphi_0$  в соответствии с управляющим сигналом  $s(t)$  соответствует *угловой модуляции*. Таким образом, понятие угловой модуляции включает в себя как *частотную* (ЧМ), так и *фазовую* (ФМ) модуляцию.

При *частотной модуляции* в соответствии с управляющим сигналом изменяется мгновенная частота несущего колебания в пределах от нижней  $\omega_H$  до  $\omega_B$  граничных частот

$$\omega(t) = \omega_0 + (\omega_B - \omega_H)s(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t). \quad (3.21)$$

Наибольшее значение частотного отклонения  $\Delta\omega_{\text{max}}$  от  $\omega_0$  называется *девиацией* частоты  $\Delta\omega_D$

$$\Delta\omega_D = \Delta\omega_{\text{max}}.$$

Если граничные частоты расположены симметрично относительно  $\omega_0$ , то девиация частоты

$$\Delta\omega_D = \omega_B - \omega_H. \quad (3.22)$$

Именно такой случай частотной модуляции будет рассматриваться в дальнейшем.

Закон изменения полной фазы определяется как интеграл от мгновенной частоты. Тогда, с учетом (3.21) и (3.22), можно записать

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t_1) dt_1 = \omega_0 t + \Delta \omega_D \int_0^t s(t_1) dt_1 + \phi_0. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.20), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с частотной модуляцией

$$u_{чМ}(t) = U_m \cos \left[ \omega_0 t + \Delta \omega_D \int_0^t s(t_1) dt_1 + \phi_0 \right]. \quad (3.24)$$

Слагаемое  $\Delta \omega_D \int_0^t s(t_1) dt_1$  представляет собой составляющую полной фазы, обусловленную наличием частотной модуляции. Нетрудно убедиться в том, что *полная фаза* сигнала с частотной модуляцией изменяется по *закону интеграла* от  $s(t)$ .

При *фазовой модуляции*, в соответствии с модулирующим сигналом  $s(t)$ , изменяется начальная фаза несущего колебания в пределах от нижнего  $\phi_H$  до верхнего  $\phi_B$  граничных значений фазы

$$\phi(t) = \phi_0 + \Delta \phi s(t). \quad (3.25)$$

Наибольшее отклонение фазового сдвига  $\Delta \phi_{\max}$  от  $\phi_0$  называется *девиацией фазы*  $\Delta \phi_D$ . Если  $\phi_H$  и  $\phi_B$  расположены симметрично относительно  $\phi_0$ , то  $\Delta \phi_D = \phi_B - \phi_H$ . В этом случае полная фаза сигнала с фазовой модуляцией

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0 + \Delta \phi_D s(t). \quad (3.26)$$

Тогда, подставляя (3.26) в (3.20), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с фазовой модуляцией

$$u_{фМ}(t) = U_m \cos \left[ \omega_0 t + \phi_0 + \Delta \phi_D s(t) \right]. \quad (3.27)$$

Рассмотрим, как изменяется мгновенная частота сигнала при фазовой модуляции. Известно, что мгновенная частота и текущая полная фаза связаны соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Подставляя в это выражение формулу (3.26) и проведя операцию дифференцирования, получим

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\varphi_{\text{Д}} \frac{dS(t)}{dt} = \omega_0 + \omega_{\text{ФМ}}(t), \quad (3.28)$$

где  $\omega_{\text{ФМ}}(t) = \Delta\varphi_{\text{Д}} \frac{dS(t)}{dt}$  – составляющая частоты, обусловленная наличием фазовой модуляции несущего колебания (3.20).

Таким образом, изменение начальной фазы несущего колебания приводит к изменению мгновенных значений частоты по закону производной от  $s(t)$  по времени.

Практическая реализация устройств формирования сигналов угловой модуляции может осуществляться одним из двух методов: прямым или косвенным. При прямом методе в соответствии с законом изменения управляющего сигнала  $s(t)$  изменяются параметры колебательного контура генератора несущего колебания. Выходной сигнал при этом оказывается промодулированным по частоте. Для получения сигнала фазовой модуляции на входе частотного модулятора включается дифференцирующая цепь.

Сигналы фазовой модуляции при прямом методе формируются путём изменения параметров колебательного контура усилителя, подключённого к выходу генератора несущего колебания. Для преобразования сигналов фазовой модуляции в сигнал частотной модуляции управляющее колебание подаётся на вход фазового модулятора через интегрирующую цепь.

Косвенные методы не предполагают непосредственного воздействия управляющего сигнала на параметры колебательного контура. Один из косвенных методов базируется на преобразовании амплитудно-модулированных сигналов в сигналы фазовой модуляции, а те, в свою очередь, – в сигналы частотной модуляции.

### Сигналы с частотной модуляцией

Анализ характеристик сигналов с угловой модуляцией мы начнём с рассмотрения однотональной частотной модуляции. Управляющий сигнал в этом случае представляет собой колебание единичной амплитуды (к этому виду всегда можно привести  $s(t)$ )

$$s(t) = \cos \Omega t, \quad (3.29)$$

а модулируемым параметром несущего колебания является мгновенная частота. Тогда, подставляя (3.29) в (3.24), получим:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega_{\text{Д}} \int_0^t \cos \Omega t_1 + \varphi_0 \right].$$

Выполнив операцию интегрирования, приходим к следующему выражению сигнала однотоновой частотной модуляции

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ЧМ}}(t) &= U_m \left[ \cos \omega_0 t + \frac{\Delta \omega_{\text{Д}}}{\Omega} \sin \Omega t \right] = \\
 &= U_m \cos [\omega_0 t + K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t]
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Отношение

$$K_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta \omega_{\text{Д}}}{\Omega} = \frac{\Delta f_{\text{Д}}}{F}$$

называется индексом частотной модуляции и имеет физический смысл части девиации частоты  $\Delta \omega_{\text{Д}}$ , приходящуюся на единицу частоты модулирующего сигнала. В выражении (3.30) начальная фаза  $\varphi_0$  не учитывается как не имеющая принципиального значения.

Временная диаграмма сигнала при однотоновой ЧМ представлена на рис. 3.7

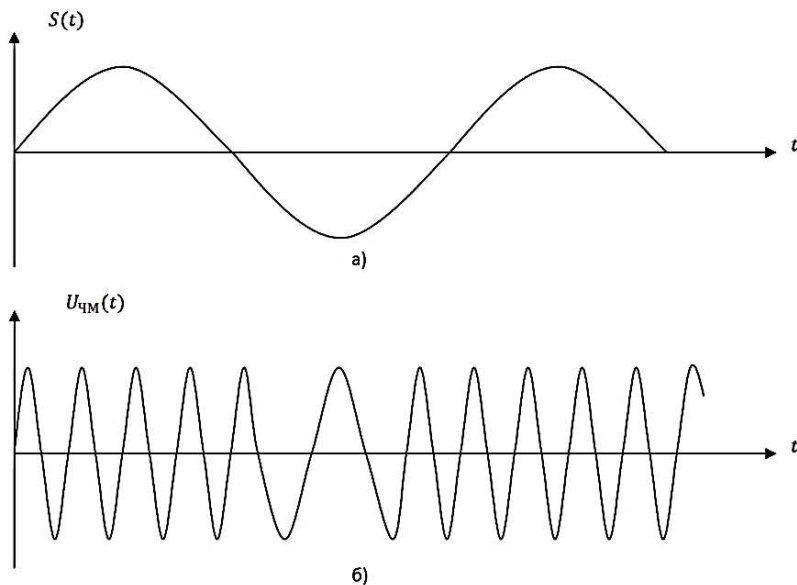


Рис. 3.7. Осциллограммы модулирующего колебания (а), при однотоновой ЧМ (б)

Рассмотрение спектральных характеристик ЧМ-сигнала начнём с частного случая малого индекса частотной модуляции  $K_{\text{ЧМ}} \ll 1$ . Воспользуемся соотношением

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

представим (3.30) в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) = & U_m \cos(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - \\ & - U_m \sin(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (3.31)$$

Поскольку  $K_{\text{ЧМ}} \ll 1$ , то можно воспользоваться приближёнными представлениями

$$\sin \alpha \approx \alpha; \cos \alpha \approx 1 \text{ при } \alpha \ll 1.$$

Тогда

$$\cos(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx 1, \sin(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t$$

и выражение (3.31) приобретает вид

$$U_{\text{ЧМ}}(t) \approx U_m \cos \omega_0 t - K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \cdot \sin \omega_0 t.$$

Воспользуемся тригонометрическим соотношением

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 0.5[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

и полагая  $\alpha = \omega_0 t$  и  $\beta = \Omega t$ , получим:

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) = & U_m \cos \omega_0 t - 0.5 K_{\text{ЧМ}} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ & + 0.5 K_{\text{ЧМ}} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t \end{aligned} \quad (3.32)$$

или

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) = & U_m \cos \omega_0 t + 0.5 K_{\text{ЧМ}} U_m \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \pi] + \\ & + 0.5 K_{\text{ЧМ}} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t \end{aligned} \quad (3.33)$$

Это выражение напоминает выражение (3.6) для однотонового АМ – сигнала. Отличие состоит в том, что, если в однотоновом АМ сигнале начальные фазы боковых составляющих одинаковы, то в однотоновом ЧМ сигнале при малых индексах частотной модуляции они отличаются на угол  $\pi$ , т.е. находятся в противофазе.

Спектральная диаграмма такого сигнала показана на рис. 3.8.

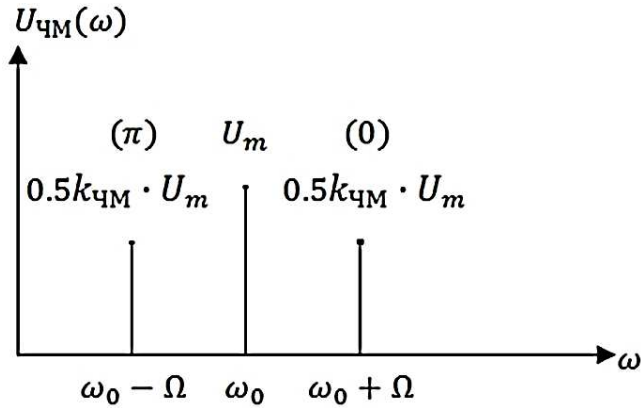


Рис. 3.8. Спектральная диаграмма однотонального ЧМ-сигнала

В скобках указаны значения начальной фазы боковых составляющих. Очевидно, ширина спектра ЧМ-сигнала при малых индексах частотной модуляции равна

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = 2\Omega.$$

Сигналы с частотной модуляцией с малым в практической радиотехнике применяются достаточно редко.

В реальных радиотехнических системах индекс частотной модуляции существенно превышает единицу.

В современных аналоговых системах мобильной связи, использующих для передачи речевых сообщений сигналы частотной модуляции при верхней частоте речевого сигнала  $\Omega_B = 3.4$  кГц и девиации частоты  $\Delta f_d = 9.5 \div 12$  кГц, индекс, как нетрудно убедиться, достигает значения  $\sim 3-4$ . В системах же радиовещания метрового диапазона индекс частотной модуляции может превышать значения, равного 10. Поэтому рассмотрим спектральные характеристики ЧМ-сигналов при произвольных значениях величины  $K_{\text{ЧМ}}$ .

Возвратимся к выражению (3.32). Известны следующие виды разложения

$$\cos[\alpha \cdot \sin \Omega t] = I_0(\alpha) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \cos 2i\Omega t \quad (3.34)$$

$$\sin[\alpha \cdot \sin \Omega t] = 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \sin(2i-1)\Omega t, \quad (3.35)$$

где  $I_i(\alpha)$  – функция Бесселя первого рода  $i$ -го порядка.



Подставляя эти выражения в (3.32) получим

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i A_i \cos(\omega_0 - i\Omega)t + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(\omega_0 + i\Omega)t \quad (3.36)$$

где  $A_i = U_m \cdot I_i(K_{\text{ЧМ}})$ .

Полученное выражение представляет собой разложение однонального ЧМ-сигнала на гармонические составляющие, т.е. амплитудный спектр. Первое слагаемое этого выражения является спектральной составляющей колебания несущей частоты с амплитудой  $A_0 = U_m \cdot I_0(K_{\text{ЧМ}})$ . Первая сумма выражения (3.36) характеризует боковые составляющие с амплитудами  $A_i$  и частотами  $\omega_0 - i\Omega$ , т.е. нижнюю боковую полосу, а вторая сумма – боковые составляющие с амплитудами  $A_i$  и частотами  $\omega_0 + i\Omega$ , т.е. верхнюю боковую полосу спектра.

Спектральная диаграмма ЧМ-сигнала при произвольном  $K_{\text{ЧМ}}$  представлена на рис. 3.9.

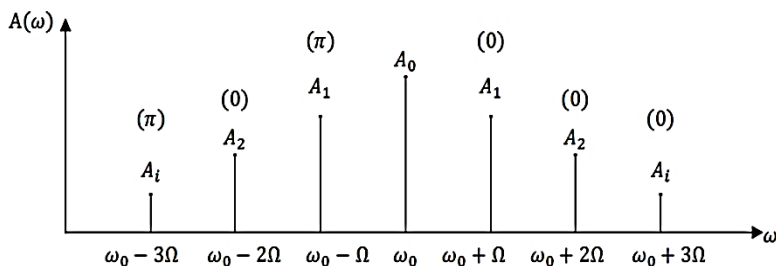


Рис. 3.9. Спектральная диаграмма ЧМ – сигнала при произвольном  $K_{\text{ЧМ}}$

Проанализируем характер амплитудного спектра ЧМ – сигнала. В первую очередь отметим, что спектр является симметричным относительно частоты несущего колебания и теоретически является бесконечным.

Составляющие боковых полос расположены на расстоянии  $\Omega$  друг от друга, а их амплитуды  $A_i = U_m \cdot I_i(K_{\text{ЧМ}})$  зависят от индекса частотной модуляции. И, наконец, у спектральных составляющих нижней и верхней боковых частот с чётными индексами начальные фазы совпа-

дают, а у спектральных составляющих с нечётными индексами отличаются на угол  $\pi$ .

В таблице 3.1 приведены значения функции Бесселя для различных  $i$  и  $\alpha = K_{\text{ЧМ}}$ . Обратим внимание на составляющую несущего колебания  $\omega_0$ . Амплитуда этой составляющей равна  $A_0 = U_m \cdot I_0(K_{\text{ЧМ}})$ . Из табл. 3.1 следует, что при  $K_{\text{ЧМ}} \approx 2.4$  амплитуда  $A_0 \approx 0$ , т.е. спектральная составляющая несущего колебания в спектре ЧМ-сигнала отсутствует. Но это не означает отсутствия несущего колебания в ЧМ-сигнале (3.30). Просто энергия несущего колебания перераспределяется между составляющими боковых полос.

Таблица 3.1

### Значения функции Бесселя

$K_{\text{ЧМ}}$	$I_0(K_{\text{ЧМ}})$	$I_1(K_{\text{ЧМ}})$	$I_2(K_{\text{ЧМ}})$	$I_3(K_{\text{ЧМ}})$	$I_4(K_{\text{ЧМ}})$	$I_5(K_{\text{ЧМ}})$	$I_6(K_{\text{ЧМ}})$	$I_7(K_{\text{ЧМ}})$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0.765	0.440	0.115	0.019	0.002	0	0	0
2	0.224	0.577	0.353	0.129	0.034	0.007	0.001	0
3	-0.26	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011	0.002
4	-0.397	-0.066	0.364	0.43	0.281	0.132	0.041	0.015
5	-0.178	-0.328	0.047	0.365	0.391	0.261	0.131	0.053
6	0.151	-0.277	-0.243	0.115	0.358	0.362	0.246	0.129

Как уже подчёркивалось, выше спектр ЧМ-сигнала теоретически является бесконечным. На практике же полоса пропускания радиотехнических устройств всегда ограничена. Оценим практическую ширину спектра, при котором воспроизведение ЧМ-сигнала можно считать неискажённым.

Средняя мощность ЧМ-сигнала определяется как сумма средних мощностей спектральных составляющих

$$P_{\text{ЧМ}} = P_{\text{нес}} + \sum_{i=1}^n P_{\text{Н.Б.}i} + \sum_{i=1}^n P_{\text{В.Б.}i}.$$

Проведённые расчёты показали, что около 99% энергии ЧМ-сигнала сосредоточено в частотных составляющих с номерами  $i \leq K_{\text{ЧМ}} + 1$ . А это означает, что частотными составляющими с номерами  $i > K_{\text{ЧМ}} + 1$  можно пренебречь. Тогда практическая ширина спектра при однотоновой ЧМ с учётом его симметрии относительно  $\omega_0$

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = \omega_0 + (K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega -$$

$$-[\omega_0 - (K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega] = 2(K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega,$$

а при больших значения  $K_{\text{ЧМ}} \gg 1$

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = 2K_{\text{ЧМ}} \cdot \Omega = 2\Delta\omega_{\text{Д}}, \quad (3.37)$$

Т.е. равна удвоенной девиации частоты. Таким образом, ширина спектра ЧМ-сигнала приблизительно в раз больше ширины спектра АМ-сигнала. Вместе с тем для передачи информации используется вся энергия сигнала. В этом состоит преимущества сигналов частотной модуляции над сигналами амплитудной модуляции.

### **Компьютерный практикум. Изучение характеристик модулированных колебаний в программном пакете NI Multisim**

**Цель работы:** изучение основных характеристик амплитудно- и частотно-модулированных сигналов.

#### **Расчетно-практическое задание**

1. Задано аналитическое выражение АМК

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_m [1 + k_{\text{АМ}} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t,$$

где  $\Omega = 2\pi F, \omega_0 = 2\pi f$ .

Таблица 3.2

#### **Параметры АМ и ЧМ сигналов**

№ варианта	$U_m$ , В	$f$ , кГц	$F$ , кГц	$k_{\text{АМ}}$	$K_{\text{ЧМ}}$
1	2	3	4	5	6
1	5	55	0,5	0,4	5
2	10	50	0,8	0,5	4
3	7	60	1,0	0,6	4
4	12	70	1,2	0,7	5
5	15	80	1,5	0,8	3
6	18	90	2	0,3	4
7	14	55	2,3	0,45	3
8	8	65	2,4	0,9	4

1	2	3	4	5	6
9	20	85	2,5	0,55	5
10	25	75	1,8	0,65	4
11	6	95	1,6	0,75	5
12	9	65	1,3	0,85	3
13	11	55	1,6	0,35	4
14	13	65	1,3	0,95	4
15	16	52	0,7	0,25	3
16	22	75	1,3	0,5	4
17	24	85	0,9	0,4	4
18	21	62	1,1	0,75	3
19	15	54	1,3	0,2	4
20	19	80	2,8	0,45	3

Для указанных в табл. 3.2 вариантов рассчитать амплитуды гармоник и построить график спектра амплитуд. Определить распределение мощности по спектральным составляющим.

2. Задано аналитическое выражение ЧМК

$$u_{\text{ЧМК}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + K_{\text{ЧМК}} \sin \Omega t],$$

где  $\Omega = 2\pi F$ ,  $\omega_0 = 2\pi f$ .

Для указанных в табл. 3.2 вариантов определить практическую ширину спектра, рассчитать амплитуды гармоник и построить график спектра амплитуд в пределах практической ширины спектра. Определить распределение мощности по спектральным составляющим. Значения функций Бесселя 1-го рода приведены в табл. 3.1.

### **Компьютерный практикум**

#### **Порядок выполнения:**

1. Запустить программу компьютерного моделирования NI Multisim.

2. Собрать рабочую схему для исследования однотонового АМ-сигнала (рис.3.10). Для формирования АМ-колебания использовать источник АМ колебаний – **AM\_VOLTAGE**. Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Source, Семейство: SIGNAL\_VOLTAGE\_SOURCE* под именем **AM\_VOLTAGE**. Установить параметры источника АМ-колебаний в

соответствии с вариантом задания, табл. 3.2. (**Свойства** источника АМ колебаний, вкладка **Параметры**). Пример установки параметров источника АМ-сигнала показан на рис. 3.11.

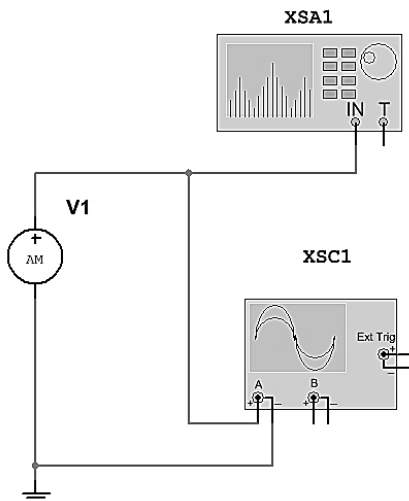


Рис. 3.10. Рабочая схема для исследования двухполосного однотонального АМ-колебания

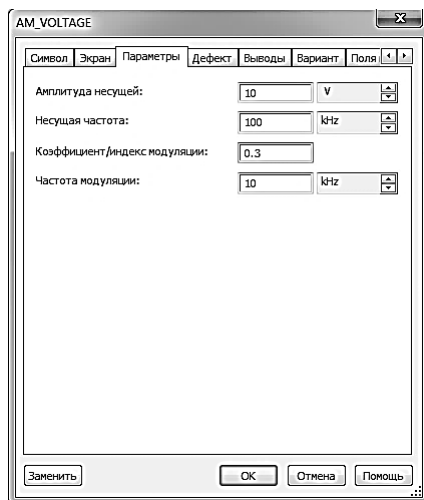


Рис. 3.11. Пример установки параметров источника АМ-колебаний. Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Коэффициент модуляции  $k_{AM}=0.3$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц

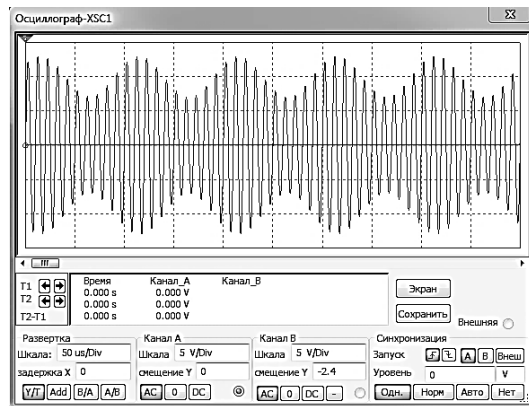


Рис. 3.12. Осциллограмма двухполосного однотонового АМ-колебания. Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Коэффициент модуляции  $k_{AM}=0.3$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц

3. По осциллограмме АМ-сигнала определить  $k_{AM}$  по формуле (3.3) (рис. 3.2).

4. Используя **Анализатор спектра**, измерить уровень гармоник двухполосного однотонового АМ-сигнала, указанного в расчётно-практическом задании. Сравнить расчётные и измеренные значения амплитуд, результаты оформить в виде таблицы.

Использовать следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... – установки (**установить число точек FFT – 32768**).

В качестве примера (рис.3.13), показан вид окна **Анализатора спектра** для двухполосного однотонового АМ-колебания с параметрами: Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Коэффициент модуляции  $k_{AM}=0.3$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц.

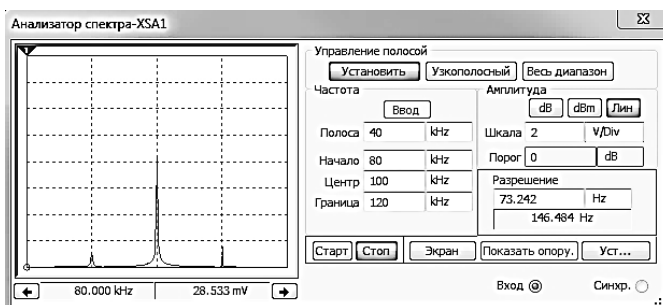


Рис. 3.13. Вид окна **Анализатор спектра** при анализе двухполосного однотонового АМ колебания. Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Коэффициент модуляции  $k_{AM}=0.3$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц

5. Заменить источник АМ-колебаний на источник ЧМ колебаний. Источник ЧМ колебаний доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе: Source, Семейство: SIGNAL\_VOLTAGE\_SOURCE* под именем **FM\_VOLTAGE**. Задать параметры источника в соответствии с вариантом задания, табл. 3.2.

6. Используя **Анализатор спектра**, определить амплитуды гармоник ЧМ-колебания.

Использовать следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... – установки (**установить число точек FFT – 32768**).

В качестве примера, на рис 3.14 показан вид окна **Анализатора спектра** для ЧМ-колебания с параметрами: Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Индекс модуляции  $K_{ЧМ}=5$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц.

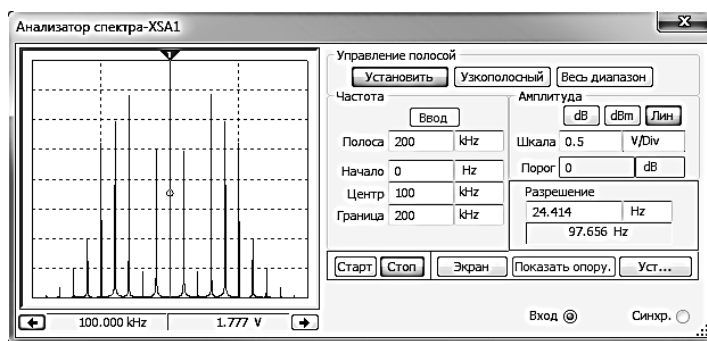


Рис. 3.14. Вид окна **Анализатор спектра** при анализе ЧМ-колебания. Амплитуда несущей  $U_m=10$  В, Несущая частота  $f=100$  кГц, Индекс модуляции  $K_{ЧМ}=5$ , Частота модуляции  $F=10$  кГц

7. Установить частоту модуляции ЧМ-колебания  $F = f / 200$  и, изменяя девиацию частоты от 0 до 10 %, определить индексы модуляции  $K_{ЧМ}$ , при которых амплитуда несущей принимает минимальные значения.

8. Установить частоту модуляции ЧМК в соответствии с табл. 3.2 и, уменьшая девиацию частоты, определить индекс модуляции  $K_{ЧМ}$ , при котором амплитуды гармоник с номером выше 1становятся менее 5 % от первой.

9. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

### Контрольные вопросы

1. Приведите классификацию видов модуляции.
2. Каким выражением описывается амплитудно-модулированный сигнал?

3. Что такое коэффициент глубины модуляции АМ-сигнала?
4. Нарисуйте спектр АМ-сигнала и поясните его состав.
5. Чем отличаются сигналы балансной модуляции от сигналов однополосной амплитудной модуляции?
6. Что такое частотная модуляция сигнала?
7. Чем отличается частотная модуляция от фазовой модуляции сигнала?
8. Поясните, что такое девиация частоты и индекс частотной модуляции.
9. Какой спектр имеют ЧМ и ФМ-сигналы?
10. Чем отличается сигнал дискретной амплитудной модуляции от непрерывного АМ-сигнала?
11. Покажите временную диаграмму и спектр сигнала при дискретной частотной модуляции.
12. Поясните, как формируется сигнал при дискретной фазовой модуляции? Почему ширина спектра дискретного АМ и ФМ-сигналов одинакова?
13. Перечислите основные свойства программы Multisim.
14. Как задаются параметры основных элементов цепей?
15. Как задаются параметры радиосигналов с АМ и ЧМ?
16. Как смоделировать импульсный радиосигнал с АМ?
17. Как смоделировать радиосигналы с АИМ?
18. Как смоделировать частотно-модулированные радиосигналы со сложным первичным сигналом?
19. Как получить спектральные характеристики сигналов?
20. В чем состоит принципиальное различие в спектрах видео- и радиосигналов?
21. Как получить числовые значения спектральных характеристик?
22. Как измерить параметры сигналов по осциллограмме виртуального осциллографа?
23. Приведите классификацию сигналов.
24. Объясните необходимость модуляции как основного радиотехнического процесса.
25. Приведите примеры узкополосных сигналов.
26. Как связаны между собой спектральные плотности видеоимпульса и радиоимпульса?
27. Какова причина искажений сообщения, наблюдаемых при перемодуляции сигнала?
28. От чего зависит распределение мощности в спектре однотонного АМ-сигнала?
29. Объясните принцип построения векторной диаграммы АМ сигнала.
30. Чем принципиально отличаются осциллограммы сигналов с балансной амплитудной модуляцией и обычных АМ-сигналов?



## Тема 4. ШУМОПОДОБНЫЕ СИГНАЛЫ

---

---

### 4.1. Общие сведения и основные характеристики шумоподобных сигналов

Решение целого ряда узловых проблем развития радиотехнических систем различного назначения привело к идее сложных широкополосных сигналов (СШС) [6].

Первая проблема встала на пути развития радиолокационных систем. Она заключалась в, казалось, неразрешимых противоречиях между требованиями высокой разрешающей способности по дальности и дальностью обнаружения целей в импульсных РЛС, желанием обеспечить одновременное точное измерение скорости и высокое разрешение по дальности, увеличить дальность обнаружения целей при ограничениях на пиковую мощность передатчика. Оригинальное решение перечисленных противоречий было предложено Ф. Вудвордом.

Он показал, что форма сигнала является дополнительным параметром при разработке радиолокатора. Длительность сигнала может быть выбрана настолько большой, насколько это необходимо для обеспечения энергетических требований при фиксированной пиковой мощности передатчика, а разрешение по дальности и точность измерений определяются шириной полосы частот сигнала. Они обеспечиваются путем сжатия импульса на приемной стороне [6].

Таким образом, Ф. Вудворд сформулировал два основополагающих принципа:

1. Зондирующий импульс радиолокатора должен иметь сложную внутреннюю структуру, т.е. произведение эффективной полосы частот  $F$  радиосигнала на его длительность  $T$  должно быть существенно больше единицы:

$$FT \gg 1. \quad (4.1)$$

2. Принцип сжатия импульса. Внутренняя структура зондирующего сигнала должна быть такой, чтобы допускать на приемной стороне сжатие распределенного во времени сигнала в короткий импульс, соответствующий полосе  $F$ .

Сигналы, удовлетворяющие этим двум требованиям, получили название сложных широкополосных сигналов.

Другая проблема связана с развитием систем передачи информации. Здесь возник конфликт между желанием, с одной стороны, передать с предельной скоростью как можно больше информации и, с другой стороны, обеспечить высокую достоверность приема. Принципи-

альное разрешение этого противоречия принадлежит К.Шеннону, который ввел понятие пропускной способности канала  $C$  и показал:

$$C = F \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right), \quad (4.2)$$

где  $F$  – полоса частот, отводимая для передачи информации,  $C=1/T$ ,  $S$  и  $N$  – мощности сигнала и шума, соответственно.

Следует заметить, что при  $S/N \ll 1$  формула (4.2) преобразуется к (4.1).

Действительно, соотношение (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)} = FT \cdot \quad (4.3)$$

При  $S/N \ll 1$  левая часть равенства устремляется к бесконечности, что равносильно (4.1). Таким образом, применение сложных шумоподобных сигналов позволяет обеспечить теоретически любую достоверность передачи информации.

Отсюда следует еще одно очень важное качество радиотехнических систем со сложными широкополосными сигналами – способность работать «под шумами» ( $S \ll N$ ). С одной стороны, это скрытность работы радиотехнической системы, с другой – возможность уплотнения действующих каналов связи и передачи информации.

Итак, наиболее серьезные проблемы радиолокации, передачи информации и связи решаются применением сложных широкополосных сигналов.

Широкое применение получили дискретно-кодированные сигналы (ДКС), в которых манипулируемые параметры (амплитуда, фаза и частота) изменяются через строго фиксированные интервалы времени (такты). Такие сигналы формируются и обрабатываются на базе современной цифровой вычислительной техники. Закон изменения манипулируемого параметра в ДКС задается дискретно-кодированными последовательностями (ДКП), которые полностью определяют свойства ДКС и часто отождествляются с ними. Поэтому внимание исследователей СШС оказалось сфокусированным на анализе, синтезе и обработке ДКП [6].

Известны последовательности Баркера, Хаффмена, Зингера, Голда, Касами, Холла, Фрэнка, Велти, Костаса и др., в которых правило кодирования (ПК) отождествляется с фамилией его автора или автора различного множества, положенного в основу ПК.

Часто название ДКП (ПК) определяет принцип их формирования: последовательности символов Лежандра и Якоби, последовательности

степенных вычетов, последовательности бент-функций, последовательности на основе разностных множеств, сбалансированных на определенное число уровней, линейные рекуррентные последовательности, составные последовательности и т.д.

Иногда название ДКП (ПК) определяет их приоритетная качественная характеристика: последовательности с идеальной периодической автокорреляционной функцией, ортогональные, квазиортогональные, трансортогональные, максимально трансортогональные, оптимальные по минимаксному или по какому-либо другому критерию, локально-оптимальные, со свойством «не более  $r_m$  совпадений», с минимальной апериодичностью, псевдослучайные, шумоподобные последовательности, периодические, импульсные, регулярные, нерегулярные импульсные последовательности и т.д. [6].

Достаточно распространенным классификационным признаком является набор символов, из которых состоит ДКП: двоичные, троичные, многоуровневые, многофазные последовательности и т.д.

Такое разнообразие ДКП обусловлено постоянно расширяющейся областью их применения.

В системах радиолокации, гидролокации, навигации, связи и передачи информации применение ДКП для формирования сложных широкополосных и сверхширокополосных сигналов в качестве манипулирующих последовательностей позволило разрешить противоречие между разрешающей способностью и дальностью действия систем, повысить их помехоустойчивость и электромагнитную совместимость, повысить эффективность использования радиодиапазона за счет кодового разделения каналов, улучшить экологию в зоне действия радиоизлучателей за счет уменьшения пиковой мощности излучения, создать спутниковые системы радиолокации, радионавигации и связи, обеспечить наблюдение, определение координат и передачу информации в любую точку нашей планеты, в том числе на подвижные объекты, находящиеся на суше, в море, в воздухе или космосе, осуществить скрытную локацию и связь с помощью шумоподобных сигналов и многое другое.

В вычислительных системах ДКП позволяют повысить быстродействие и точность вычислений. Их применяют в качестве псевдослучайных последовательностей для имитационного моделирования, решения задач методом Монте-Карло, кибернетической диагностики сложных сетей и систем, встроенного тестового контроля, защиты от несанкционированного доступа, обеспечения связи в вычислительных сетях и многое другое [6].

В системах автоматики и телемеханики применение ДКП позволяет строить высокоэффективные кодеры и декодеры, контролирующие, обнаруживающие и исправляющие ошибки, автоматически передавать телеметрическую информацию с территориально-распределенных дат-

чиков-измерителей с помощью самосинхронизирующихся кодовых последовательностей, обеспечивая сколь угодно высокую достоверность и криптостойкость передачи информации и многое другое.

#### 4.2. Псевдослучайные последовательности для реализации шумоподобных сигналов

Названия исследуемых сигналов соответствует широте областей применения. Их называют «шумоподобными», «сложными», «широкополосными», «псевдослучайными», «дискретными», «сложными дискретными», «дискретно-кодированными», «ортогональными (квазиортогональными)», «оптимальными дискретными» [6].

Каждое из названий акцентирует внимание на приоритетной для конкретного применения характеристике сигнала. Тем не менее, общепринятым можно считать определение «сложного сигнала» как сигнала, удовлетворяющего условию:

$$1 \ll F \cdot T = B, \quad (4.4)$$

где  $B$  – база сигнала;

$F$  – эффективная ширина его спектра;

$T$  – длительность.

В современных системах связи, как правило, используются амплитудно-фазоманипулированные сложные дискретно-кодированные сигналы (СДКС), амплитуда и фаза несущей частоты которых могут изменяться только через строго определенные интервалы времени  $\Delta_t$ . Комплексная огибающая СДКС имеет вид [6]:

$$S(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i S_0(t - i \Delta_t), \quad (4.5)$$

где  $S_0(t)$  – комплексная огибающая радиоимпульса,  $Y = \{y_i\}$  – дискретно-кодированная последовательность (ДКП), задающая закон изменения амплитуды и фазы,  $\Delta_t$  – длительность дискрета.

Поскольку ДКП  $\{y_i\}$  являются основным классификационным признаком и определяют основные свойства СДКС (их даже часто отождествляют с СДКС), то именно они составляют предмет наших дальнейших исследований.

По алфавиту, к которому принадлежат элементы  $\{y_i\}$ , ДКП подразделяют на:

- двоичные последовательности (ДП), если  $y_i \in \{0, 1\}$ ;
- троичные последовательности (ТП), если  $y_i \in \{0, \pm 1\}$ ;
- бинарные последовательности (БП), если  $y_i \in \{\pm 1\}$ ;
- $p$ -ичные последовательности, если  $y_i \in \left\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}\right\}$

– М-фазные последовательности, если  $y_i \in \left\{ \exp\left(j2\pi \frac{k}{M}\right) \right\}, k \leq M$ .

Различают периодические ДКП  $y_i = y_{i+N}$ , с периодом  $N = T/\Delta_t$  и импульсные (усеченные, аperiodические) длиной  $N$  и обязательными условиями:

$$R(\tau, f) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i y_{i-\tau} - \tau \exp(-i 2\pi f_i \Delta_t), \quad (4.6)$$

где  $f$  – сдвиг по частоте,  $\tau$  – сдвиг по времени (сдвиг последовательности в тактах длительностью  $\Delta_t$ ).

Сечение ненормированной ФН при  $f=0$  называют ненормированной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ), если ДКП  $\{y_i\}$  периодическая последовательность:

$$R(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i y_{i-\tau} = \begin{cases} R, & \text{если } \tau = 0, \\ r(\tau), & \text{если } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

и ненормированной импульсной (aperiodической) автокорреляционной функцией (ИАКФ), если ДКП  $\{y_i\}$  является импульсной последовательностью:

$$\hat{R}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-\tau-1} y_i y_{i-\tau} = \begin{cases} R, & \text{если } \tau = 0, \\ \hat{r}(\tau), & \text{если } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

$R_Y$  называют главным лепестком ненормированной АКФ,  $r_Y(\tau)$  и  $\hat{r}_Y(\tau)$  – боковыми лепестками АКФ.

Кроме ФН и ее сечений (ПАКФ, ИАКФ), важными характеристиками (параметрами) ДКП являются:

1. **Правило кодирования** (ПК)  $U_Y(i)$ . ПК ставит в соответствие каждой позиции с номером  $i$  символ  $y_i$  из алфавита, над которым задана ДКП  $Y$ .

2. **Мощность ПК**  $L(U_Y(i))$  равна числу неинверсно-изоморфных ДКП  $Y$  одинакового периода (длины)  $N$ , которые можно построить по ПК  $U_Y(i)$ .

3. **Пик-фактор**  $pf = \frac{N_Y}{R_Y}$ .

4. Степень неуравновешенности:  $\eta = \Delta m/N$ ,  $\Delta m = |m_+ - m_-|$  для бинарных и троичных последовательностей, где  $m_+$  – число «плюсов», а  $m_-$  – «минусов» на периоде (длине) ДКП.

Ещё одну группу ДКП составляют ансамбли – это множество последовательностей, предназначенных для передачи цифровых сообщений, совокупность сигналов образуют ансамбль, важнейшей характери-

стикой которого является его объём  $M$ . Рассмотренные выше сигналы дискретной АМ, дискретной ЧМ и дискретной ФМ образуют ансамбли с  $M=2$ , т.к. управляющий сигнал может принимать только два значения.

Вместе с тем рассмотренными сигналами не ограничивается обширный класс сигналов дискретной модуляции. Дело в том, что в качестве управляющих сигналов могут выступать сигналы с числом значений 4, 8, ...,  $2^n$ . Это приводит к тому, что для передачи информации используются ансамбли сигналов соответствующих объёмов. Для того чтобы отличить один ансамбль от другого не только по управляемому параметру (амплитуда, частота, начальная фаза), но и по объёму, вводится понятие кратности модуляции, которая определяется как  $n = \log_2 M$ .

Групповым признаком «системы сигналов» может быть единое ПК, общий принцип формирования:

- рекуррентные последовательности – ДКП, у которых каждый следующий символ формируется по группе предыдущих;

- линейные последовательности – ДКП, у которых функция формирования линейна;

- нелинейные последовательности – ДКП, у которых функция формирования нелинейна.

Довольно распространённым классификационным признаком ДКП является корреляционная функция [6]:

- последовательности с одноуровневой ПАКФ;

- последовательности с двухуровневой ПАКФ;

- последовательности с идеальной ПАКФ;

- трансортгональные последовательности;

- максимально-трансортгональные последовательности;

- двоичные последовательности со свойством «не более одного совпадения» (нерегулярные импульсные последовательности (НИП));

- ДКП с  $n$ -уровневой ПАКФ.

### 4.3. Периодические последовательности

Обзор известных ПК периодических ДКП будем проводить в соответствии с классификационными признаками [6], указанными в разделе 4.2.

1. Бинарные последовательности (БП).

1.1. БП с одноуровневой ПАКФ:

- $M$ -последовательности – это хорошо изученные, наиболее распространённые и широко применяемые БП. Их также называют «последовательностями Хаффмена», «нулевыми последовательностями Хаффмена», «сигналами Хаффмена», последовательностями максимального периода, «линейными кодами максимальной длины», «линейными рекуррентными последовательностями максимального периода» [120].

– Последовательности символов Лежандра, которые также называют «последовательностями квадратичных вычетов», «последовательностями Лежандра», «последовательностями Пэли-Плоткина», «кодами символов Лежандра».

– Последовательности символов Якоби, которые также называют «последовательностями Якоби», «последовательностями с периодом, равным произведению двух простых чисел», «кодами Якоби».

– Последовательности Холла [10, 15, 27, 31] или «коды Холла».

– Последовательности Баркера или «коды Баркера», «сигналы Баркера».

– БП на основе разностных множеств, сбалансированных на один и на два уровня.

На примере БП с одноуровневой ПАКФ только из обилия названий одних и тех же ДКП видна многозначность подхода к их описанию. Далее мы будем приводить лишь одно название ДКП и источник с наиболее полным описанием ПК.

1.2. БП с двухуровневой ПАКФ:

– Обобщенные последовательности квадратичных вычетов.

– Обобщенные последовательности символов Якоби.

– Характеристические последовательности.

– БП на основе разностных множеств, сбалансированных на два уровня.

1.3. Нелинейные последовательности:

– Нелинейные рекуррентные последовательности.

– Нелинейные ПСП.

1.4. Троичные последовательности:

– ТП с идеальной ПАКФ.

– ТП на основе линейных рекуррентных последовательностей.

– Троичные квазиортогональные последовательности.

– Троичные составные последовательности.

1.5. Двоичные последовательности:

– ДП на основе разностных множеств.

– ДП со свойством «не более одного совпадения».

– ДП с «минимальной апериодичностью».

– ДП Шермана.

1.6.  $r$ -ичные линейные рекуррентные последовательности.

1.7. Многофазные последовательности:

– Четвертичные последовательности Велти.

– Последовательности Фрэнка.

1.8. Ансамбли последовательностей:

– Ансамбли БП Голда.

– Ансамбли БП на основе объединения ансамблей Касами и бент-функций.

- Ансамбли двоичных последовательностей.
- Ансамбли многофазных последовательностей.

Подводя итог обзора известных ДКП, следует заметить, что многие из перечисленных последовательностей можно использовать не только для манипуляции амплитудой и фазой, но и частотой.

Поскольку понятия «анализ» и «синтез» также трактуют по-разному, здесь и далее мы будем пользоваться определением, данным в:

**Анализ сигналов** – изучение их свойств.

**Синтез сигналов** – нахождение сигналов, обладающих заданными свойствами.

Математической основой анализа ДКП являются:

- теория чисел;
- теория кодирования;
- высшая алгебра;
- теория автономных линейных последовательностных машин;
- комбинаторика.

Основные методы синтеза:

1. Довольно распространенным методом синтеза ДКП является **направленный перебор**. Как правило, он состоит из двух этапов. Первый этап заключается в поиске необходимых условий существования ДКП с заданными параметрами. А второй — направленный перебор в ограниченной области. Так найдены все известные бинарные последовательности Баркера  $N \leq 13$ , троичные последовательности с идеальной ПАКФ до  $N \leq 18$  и троичные квазиортогональные последовательности с одним нулевым символом на периоде  $N \leq 23$ . Однако при достаточно больших периодах он неэффективен.

2. **Синтез пары: сигнал-фильтр**. Это наиболее продуктивный подход, который предусматривает одновременное конструирование сигнала и фильтра для его обработки. Оптимизируемый параметр: отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

3. **Синтез ДКП на основе известных разностных множеств**. Этот подход достаточно хорошо проиллюстрирован в. Он является составной частью второго метода, однако его возможности ограничены числом известных РМ.

4. **Синтез ДКП на основе линейных рекуррентных последовательностей**, формируемых автономными линейными последовательностными машинами. Наиболее наглядно он представлен в работах. Этот метод достаточно продуктивен.

5. **Синтез ДКП путем гомоморфного отображения мультипликативных групп простого и расширенного поля Галуа с помощью  $k$ -значного характера**.

Последний метод, как показано в [6], поглощает практически все известные ПК линейных ДКП.



## Контрольные вопросы

1. Дайте общепринятое определение «сложного широкополосного сигнала».
2. Почему сложные широкополосные сигналы называют шумоподобными?
3. Почему переход к сложным широкополосным сигналам позволяет сгладить противоречия между требованиями высокой разрешающей способностью по дальности и дальностью обнаружения цели в импульсных радиолокационных станциях (РЛС)?
4. Какие требования выдвигаются к внутренней структуре зондирующих импульсов систем с широкополосными сигналами?
5. Как связана пропускная способность радиоканала связи с полосой частот, отводимых для передачи информации?
6. Почему применение сложных шумоподобных сигналов позволяет повысить достоверность передачи информации?
7. Какое свойство сложных широкополосных сигналов обеспечивает скрытность работы радиотехнических систем.
8. Какое свойство шумоподобных сигналов обеспечивает уплотнение действующих каналов связи?
9. Дайте определение дискретно-кодированных сигналов (ДКС).
10. Какие свойства дискретно-кодированных сигналов (ДКС) определяются дискретно-кодowymi последовательностями (ДКП)?
11. Что понимается под анализом ДКП?
12. В каких случаях требуется поиск новых правил кодирования?
13. Что является основной качественной характеристикой ДКП?
14. Как определяется мощность правила кодирования?
15. Дайте определение системы сигналов.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для студентов вузов, обуч. по специальности «Радиотехника» / С.И. Баскаков. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 528 с.
2. Шестеркин, А.Н. Система моделирования и исследования радиоэлектронных устройств Multisim 10 / А.Н. Шестеркин. – М.: ДКМ Пресс, 2012. – 360 с.
3. Введение в Multisim. Трёхчасовой курс. [Электронный ресурс]. URL: <http://ni.com/russia>
4. Радиоежегодник 2013. Схемотехническое моделирование. Вып. 23. М. 141.
5. Гордякина, Т.В. Моделирование радиотехнических цепей и сигналов в программной среде Multisim. / Т.В. Гордякина, С.В. Лебедева: – Н. Новгород: Изд-во ФГОУ ВПО «ВГАВТ», 2010.
6. Гантмахер, В.Е. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка / В.Е. Гантмахер, Н.Е. Быстров, Д.В. Чеботарев. – СПб.: Наука и Техника, 2005. – 400 с.
7. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский, М.П. Демин. – М.: Радио и связь, 1994.
8. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство по решению задач / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2002.
9. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи / под ред. И.С. Гоноровского. – М.: Радио и связь, 1989.
10. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания / под ред. А.Н. Яковлева. – М.: Инфа-М, изд-во НГТУ, 2003.
11. Multisim. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств / М.Е. Хернитер. – М.: ДМК. Пресс 2006. – 492 с.

Для заметок

Учебное издание

**Белоус Игорь Александрович**

# **ТЕОРИЯ СИГНАЛОВ**

Учебное пособие

В авторской редакции  
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Подписано в печать 17.07.2017. Формат 60×84/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,88.  
Тираж 200 экз. Заказ

---

Издательство Владивостокского государственного университета  
экономики и сервиса  
690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41  
Отпечатано во множительном участке ВГУЭС  
690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41