2 МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СОДЕРЖАЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени. Модели, базирующиеся на дифференциальных уравнениях, могут быть моделями роста с непрерывным временем, которые ориентированны на прогноз вероятных тенденций изменения реальных экономических процессов и систем. Модели равновесного роста предназначены для изучения свойств равновесных траекторий (их устойчивости или неустойчивости), а также для определения условий, возвращающих экономическую систему на равновесную траекторию в случае отклонения. Неоклассические модели роста используются для изучения трендовых траекторий при стационарном режиме развития, предполагающем, что макроэкономическое статическое равновесие в условиях совершенной конкуренции и процессе роста как бы воспроизводит само себя.

2.1 Модель роста с постоянными темпами (без ограничений роста)

Пусть $y(t)$ - объем продукции в момент времени t (произведенной, реализованной к моменту времени t).

Будем предполагать, что имеет место аксиома о ненасыщаемости потребителя (рынка), то есть вся производимая продукция будет продана, а также объем продаж не является столь высоким, чтобы существенно повлиять на цену товара p, которую ввиду этого будем считать фиксированной.

Известно, что увеличение объема выпускаемой продукции $y(t)$ связано с чистыми инвестициями – это инвестиции, направленные на расширение производства. Обозначим их через $I(t)$. Чистые инвестиции – это разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами. Чтобы увеличить объем выпускаемой продукции необходимо, чтобы чистые инвестиции $I(t)$ были больше нуля. В случае, когда $I(t) = 0$ общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию, и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай $I(t) < 0$ приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению уровня выпуска продукции. Таким образом, в модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций $I(t)$, то есть

$$y'(t) = l \cdot I(t) \text{ или } \frac{dy}{dt} = l \cdot I(t), \tag{25}$$

где l – норма акселерации.

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим $I(t) = m \cdot p \cdot y(t)$, где m – коэффициент пропорциональности, называемый нормой чистых инвестиций. Норма инвестиций $0 < m < 1$ является постоянной величиной и составляет ту часть дохода, которая тратится на чистые инвестиции.

Подставляя последнее выражение $I(t)$ в уравнение (25) получим

$$y'(t) = l \cdot m \cdot p \cdot y(t) \text{ или } y'(t) = k \cdot y(t), \text{ где } k = p \cdot l \cdot m.$$

Полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет решение $y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$.

Если $y(t_0) = y_0$, то $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$.

Интегральная кривая уравнения $y'(t) = k \cdot y(t)$ представлена на рисунке 17.

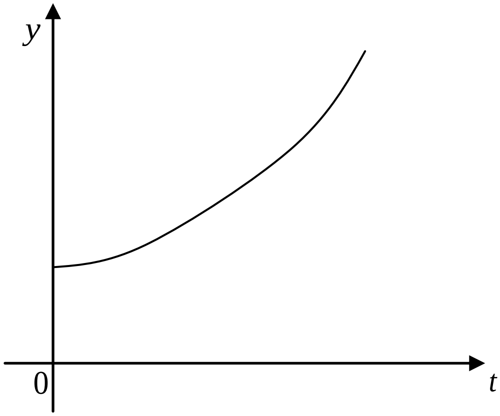

Рисунок 17- Рост с постоянными темпами

Дифференциальное уравнение $y'(t) = k \cdot y(t)$ описывает увеличение объема выпускаемой продукции без ограничений роста, и относится к уравнениям естественного роста (рост при постоянном темпе). Этим уравнением описывается также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции.

Пример. Рассмотрим динамику роста цен при постоянном темпе инфляции. Известно, что в начальный момент времени цена на товар равнялась $p(0) = p_0$, а годовой темп инфляции постоянный и равен r. Описать динамику роста цен при постоянном темпе инфляции.

Решение. Динамика роста цен при постоянном темпе инфляции будет описываться дифференциальным уравнением $p'(t) = r \cdot p(t)$. Это дифференциальное уравнение с разделяющими переменными. Найдем его общее решение. Уравнение $p'(t) = r \cdot p(t)$ запишем в виде $\dfrac{dp}{dt} = r \cdot p$ и разделим переменные $\dfrac{dp}{p} = r \cdot dt$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int \dfrac{dp}{p} = r \int dt$, получим $\ln|p| = r \cdot t + \ln|C|$. Тогда общее решение имеет вид $p(t) = C \cdot e^{r \cdot t}$. С учетом начальных условий получим частное решение - $p(t) = p_0 \cdot e^{r \cdot t}$.

Пример. Движение основных фондов.

Коэффициент выбытия основных фондов равен 0,1. Инвестиции постоянны и составляют 50 д.е. Описать процесс движения основных фондов, если известно, что скорость изменения основных фондов равна разности между инвестициями и выбытием основных фондов. В начальный момент времени основные фонды составляли 1200 д.е.

Решение. Обозначим основные фонды в каждый момент времени через $K(t)$. Процесс движения основных фондов будет описываться дифференциальным уравнением $K'(t) = 50 - 0{,}1 \cdot K$. Найдем общее решение данного дифференциального уравнения. Запишем его в виде $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{500 - K}{10}$ и разделим переменные $\dfrac{dK}{500 - K} = \dfrac{1}{10} dt$. Проинтегрировав обе части уравнения, получим $-\ln|500 - K| = \dfrac{t}{10} - \ln|C|$. Преобразуем полученное выражение

$-\ln|500 - K| + \ln|C| = \dfrac{t}{10}$, $-\ln\left|\dfrac{500 - K}{C}\right| = \dfrac{t}{10}$, $\ln\left|\dfrac{500 - K}{C}\right| = -\dfrac{t}{10}$,

$500 - K = C \cdot e^{-0{,}1t}$. Отсюда общее решение дифференциального уравнения имеет вид $K(t) = 500 - C \cdot e^{-0{,}1t}$. С учетом начальных условий частное решение дифференциального уравнения - $K(t) = 500 + 700 \cdot e^{-0,1t}$.

2.2 Модель роста с резкой отсечкой

Рассмотрим объем производства $y(t)$ в момент времени t, время непрерывно. Если рассматривать прирост объема производства $y(t)$ в зависимости от использования ресурса $s(t)$ за время Δt, то уравнение роста будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{ds}{dt},$$

при условии, что предприятие не получает из внешней среды никаких ресурсов и не теряет их. Темп роста при данном условии можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, s).$$

Если допустить, что рост объема производства пропорционален использованию производственного оборудования, процесс роста необратим и прекратится, как только истощаются ресурсы производственных мощностей. В этом случае экономический процесс можно описать дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \nu \cdot y, \qquad (26)$$

где ν - удельный (относительный) темп роста.

Параметр ν зависит от вида продукции, соответствующего ресурса и скорости, с которой работает механизм прироста объема производства. Решив дифференциальное уравнение (26), получим

$$y(t) = y_0 e^{\nu \cdot t}, \text{ при } 0 \le t \le t_f.$$

При $t = t_f$ рост прекращается, расход ресурса равен нулю ($s = 0$) и $y = Y$, где Y соответствует стопроцентному использованию производственных мощностей. Графически экспоненциальный рост, ограниченный реальным ресурсом производственных мощностей, представлен на рисунке 18.

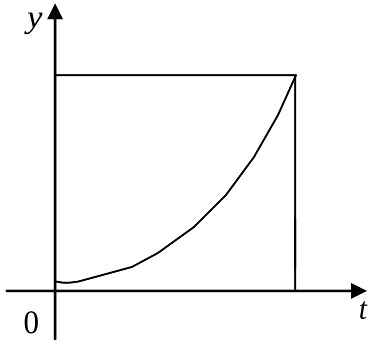

Рисунок 18- Экспоненциальный рост с резкой отсечкой

2.3 Рост объема производства, пропорциональный расходу ресурса

Если предположить, что механизм роста работает со скоростью, пропорциональной расходу ресурса s , то можно записать

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot s , \qquad (27)$$

где k - некоторая постоянная величина.

Тогда при $s = Y - y$ получим:

$$\frac{dy}{dt} = k(Y - y). \qquad (28)$$

Решим данное дифференциальное уравнение

$$\int_{y_o}^{y} \frac{dy}{Y-y} = \int_0^t k \cdot dt , \qquad \ln\left(\frac{Y-y_0}{Y-y}\right) = k \cdot t$$

или $y(t) = Y - (Y - y_0) \cdot e^{-kt}$, при $y_0 = 0$

$$y(t) = Y \cdot (1 - e^{-kt}) . \qquad (29)$$

Графически данный рост представлен на рисунке 19.

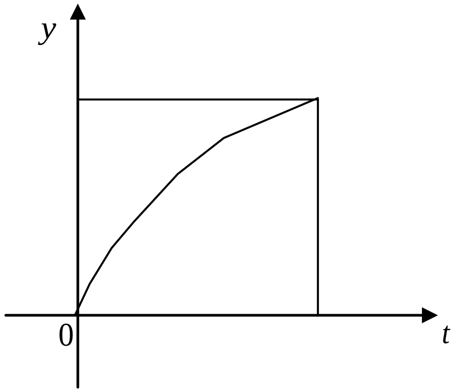

Рисунок 19-Рост объема производства, пропорциональный расходу ресурса

2.4 Модель естественного роста в условиях конкуренции (логистический рост)

На практике модель естественного роста при постоянном темпе целесообразно применять на начальных этапах развития экономической системы в течение ограниченного промежутка времени, поскольку (как это следует из уравнения $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$) с течением времени $y(t)$ принимает какие угодно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены. Кривая спроса, то есть зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y, является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка).

Поэтому модель роста объема производства в условиях конкурентного рынка (логистический рост) примет вид:

$$y'(t) = k \cdot p(y) \cdot y(t), \tag{30}$$

где $p = p(y)$ – убывающая функция $\left(\dfrac{dp}{dy} < 0\right)$, $k = m \cdot l$.

Полученное уравнение представляет собой автономное дифференциальное уравнение.

Так как $k > 0$, $p > 0$, $y > 0$, то из $y'(t) = k \cdot p(y) \cdot y(t)$ следует, что $y(t)$ есть возрастающая функция $(y' > 0)$.

Исследуем $y(t)$ на выпуклость. Дифференцируя уравнение $y'(t) = k \cdot p(y) \cdot y(t)$ по t, получим $y'' = k\left(p'(y) \cdot y' \cdot y + p(y) \cdot y'\right)$ или

$$y'' = k \cdot y' \cdot \left(\frac{dp}{dy} \cdot y + p \right).$$

Преобразуем это уравнение

$$y'' = k \cdot y' p \cdot \left(\frac{1}{\frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}} + 1 \right), \qquad y'' = k \cdot y' \cdot p \cdot \left(\frac{1}{E_p(y)} + 1 \right) \tag{31}$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$, где $E_p(y) = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}$ - эластичность спроса относительно цены.

Из уравнения (31) вытекает:

- если $|E_p(y)| > 1$ (спрос эластичен), то $y'' > 0$ и $y(t)$ выпуклая функция;

- если $|E_p(y)| < 1$ (спрос неэластичен), то $y'' < 0$ и $y(t)$ - вогнутая функция, $E_p(y) < 0$.

Предположим, что спрос описывается линейным уравнением $p(y) = b - ay \quad (a, b > 0)$, тогда уравнение $y' = k \cdot p(y) \cdot y$ примет вид:

$$y' = k \cdot (b - ay) \cdot y.$$

Из этого уравнения видно, что $y' = 0$, если $y = 0$ или $y = \frac{b}{a}$, а так же, что $y'' < 0$ при $y > \frac{b}{2a}$ и $y'' > 0$ при $y < \frac{b}{2a}$.

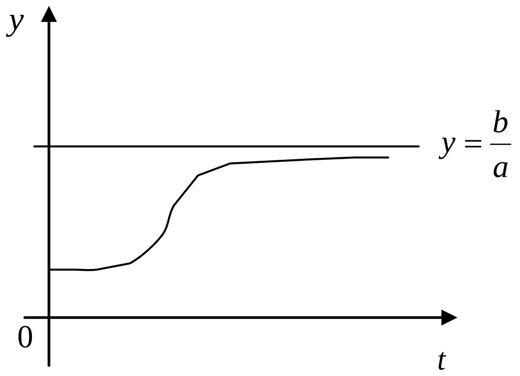

Рисунок 20- Логистическая кривая

В данном случае легко получить явное выражение для $y(t)$. Решим уравнение $y'(t) = k \cdot (b - ay) \cdot y(t)$:

$$\frac{dy}{y \cdot (b - ay)} = k \cdot dt \text{ или } \frac{dy}{b} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{a}{b - ay} \right) = k \cdot dt \, .$$

Проинтегрировав обе части этого равенства, получим

$$\ln|y| - \ln|b - ay| = kbt + \ln c$$

или
$$\frac{y}{b - a \cdot y} = c \cdot e^{kbt},$$

тогда $y(t) = \dfrac{c \cdot b \cdot e^{bkt}}{1 + c \cdot a \cdot e^{bkt}}$ или $y(t) = \dfrac{b}{a + c \cdot e^{-bkt}}$ (32)

График полученной функции называется логистической кривой. Из графика логистической кривой видно, что при малых t логический рост схож с естественным ростом (при постоянных темпах), однако при больших t характер роста меняется, темпы роста замедляются и кривая асимптотически приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}$. Эта прямая является стационарным решением уравнения $y'(t) = k \cdot (b - a \cdot y) \cdot y(t)$ и соответствует случаю $p(y) = 0$. Для данного уравнения также существуют решения и при $y > \dfrac{b}{a}$ имеющие графики (рисунок 21).

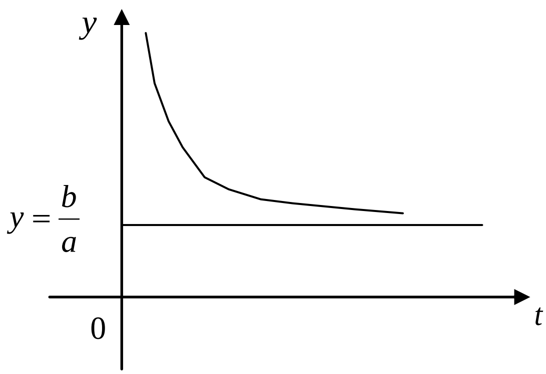

Рисунок 21-Логистическая кривая для случая $y > \dfrac{b}{a}$

Поскольку в этом случае $p(y) < 0$, то эти графики не имеют экономической интерпретации.

Пример. Найти объем реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$ норма акселерации $l = 2$, норма инвестиций $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$.

Решение. Дифференциальное уравнение $y'(t) = l \cdot m \cdot p(y) \cdot y(t)$ в этом случае примет вид $y'(t) = (2 - y)y(t)$ или $\dfrac{dy}{dt} = 2y - y^2$. Решим это уравнение:

$$\frac{dy}{2y - y^2} = dt\,, \quad \frac{dy}{2}\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right) = dt\,, \quad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{2-y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \int dt\,;$$

$$\int \frac{dy}{2-y} + \int \frac{dy}{y} = 2\int dt\,, \quad -\ln|2-y| + \ln|y| = 2t + \ln c\,,$$

$$\ln\left|\frac{y}{c\cdot(2-y)}\right| = 2t\,, \quad \frac{y}{2-y} = c\cdot e^{2t}\,, \quad \frac{2-y}{y} = c\cdot e^{-2t}\,, \quad 2 - y = y\cdot c\cdot e^{-2t}\,,$$

$y\cdot c\cdot e^{-2t} + y = 2$, $y\cdot(c\cdot e^{-2t} + 1) = 2$, окончательно имеем

$$y(t) = \frac{2}{1 + c\cdot e^{-2t}}\,.$$

Так как $y(0) = 0{,}5$, то $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{1+c}$, $c = 3$, следовательно

$$y(t) = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}\,.$$

Исследуем график этой функции:

а) функция определена для всех $t \geq 0$;

б) точек пересечения с осью Ot нет, при $t = 0$ получаем $y(0) = \dfrac{1}{2}$ $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ - точка пересечения графика с осью Oy;

в) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2}{1 + 3e^{-2t}} = 2$, значит $y = 2$ - горизонтальная асимптота;

г) функция монотонно возрастает: $y' > 0$,

$$y' = -\frac{2\cdot(-6)e^{-2t}}{(1 + 3e^{-2t})^2} = \frac{12e^{-2t}}{(1 + 3e^{-2t})^2} > 0 \text{ для любого } t\,;$$

д) точки перегиба. В данном примере модель роста в условиях конкурентного рынка (логистический рост) имеет вид:

$$y' = (2 - y)\cdot y\,,$$

тогда $y'' = 2 - 2y$, $y'' = 0;\ y = 1$ – критическая точка второго рода.

Найдем значение t при $y=1$

$$1=\frac{2}{1+3e^{-2t}}\ ,\ 1+3e^{-2t}=2,\ 3e^{-2t}=1,\ e^{-2t}=\frac{1}{3},\ e^{-2t}=3^{-1},\ 2t=\ln 3,$$

$t=\dfrac{\ln 3}{2}$; $B\left(\dfrac{\ln 3}{2};1\right)$.

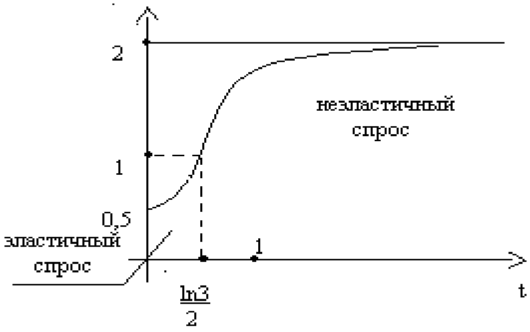

Рисунок 22-Логистическая кривая функции $y(t)=\dfrac{2}{1+3e^{-2t}}$

Рассчитаем эластичность спроса относительно цены $E_p(y)$. Условие $E_p(y)=\dfrac{p}{y}\cdot\dfrac{dy}{dp}=-\dfrac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает $y=1$. Если $y<1$, то $|E_p(y)|>1$ и спрос эластичный, при $y>1$ получаем $|E_p(y)|<1$ и спрос неэластичный.

Из графика построенной логистической кривой видно, что при малых $t\in\left[0;\dfrac{ln3}{2}\right]$ логистический рост схож с естественным ростом, а затем темпы роста замедляются и кривая асимптотически приближается к прямой $y=2$.

Замечание. Более реалистической является модель, в которой скорость роста выпуска продукции зависит не от дохода, а от прибыли. Пусть $C(y)=m\cdot y+n$ – издержки, где m и n – константы, тогда

$$y'=k\cdot(p(y)\cdot y-my-n)\ . \qquad (33)$$

Если $p(y)=b-ay$, то $y'=k((b-ay)y-my-n)$,

$$y' = k(by - ay^2 - my - n)),$$

$$y' = k(-ay^2 + (b-m)y - n). \qquad (34)$$

Таким образом правая часть уравнения (34) представляет собой квадратный многочлен относительно y с отрицательным коэффициентом перед y^2. В этом случае возможны три варианта.

- если $D < 0$, следовательно, $y' < 0$. Издержки настолько велики,

что это приводит к постоянному падению уровня производства и в конце концов к банкротству (рисунок 23);

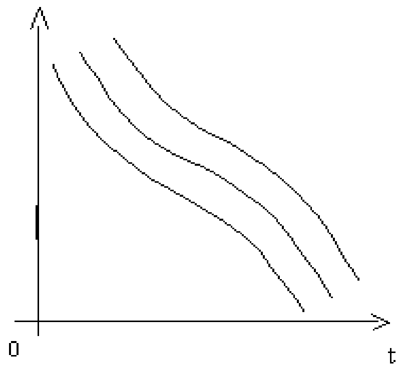

Рисунок 23-Интегральные кривые уравнения для случая $D < 0$

- если $D = 0$, то $y' = 0$ и имеется единственное стационарное решение y^*. При этом интегральные кривые, удовлетворяющие начальному условию $y(t_0) = y_0 > y^*$, будут асимптотически приближаться к y^* при $t \to +\infty$, а интегральные кривые, удовлетворяющие условию $y(t_0) = y_0 < y^*$, будут асимптотически приближаться к y^* при $t \to 0$ (рисунок 24);

- если $D > 0$, то существуют два стационарных решения y_1^* и y_2^*, $(0 < y_1^* < y_2^*)$. При этом $y' > 0$ при $y_1^* < y < y_2^*$, и $y' < 0$ при $y < y_1^*$ или $y > y_2^*$ (рисунок 25).

Итак, в этом случае возможны два ненулевых равновесных (стационарных) значения объема производства y_1^* и y_2^* ($y_2^* > y_1^*$), причем y_2^* - устойчивое равновесие, y_1^* - неустойчивое равновесие.

Это означает, что существует критический порог объема производства, равный y_1^*. Если начальное значение объема производства y_0 окажется больше y_1^*, то с течением времени этот уровень приблизится к равновесному значению y_2^*. Если же y_0 меньше значения y_1^*, то объем производства будет монотонно убывать до нуля. Таким образом, любое снижение производства ниже критического уровня чревато банкротством предприятия.

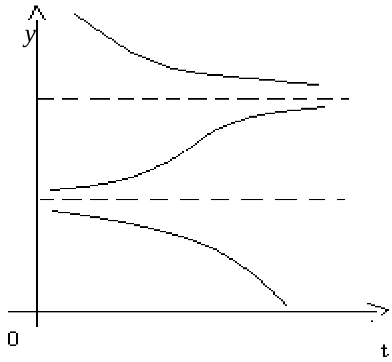

Рисунок 24-Интегральные кривые уравнения для случая $D = 0$

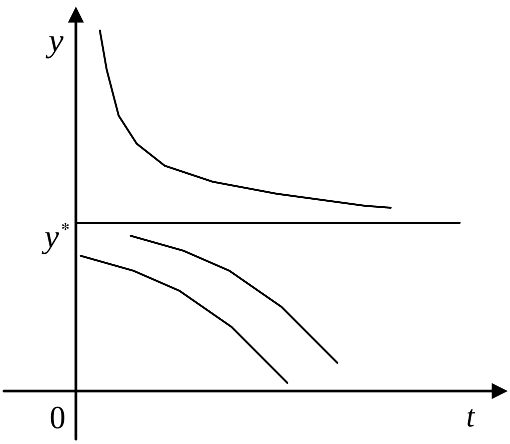

Рисунок 25- Интегральные кривые уравнения для случая $D > 0$

Итак, в этом случае возможны два ненулевых равновесных (стационарных) значения объема производства y_1^* и y_2^* ($y_2^* > y_1^*$), причем y_2^* - устойчивое равновесие, y_1^* - неустойчивое равновесие. Это означает, что существует критический порог объема производства, равный y_1^*. Если начальное значение объема производства y_0 окажется больше y_1^*, то с течением времени этот уровень приблизится к равновесному значению y_2^*. Если же y_0 меньше значения y_1^*, то объем производства будет монотонно убывать до нуля. Таким образом, любое снижение производства ниже критического уровня чревато банкротством предприятия.

Уравнения роста могут быть:

- логистическими

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot Y}{Y - (Y - y_0) \cdot e^{-\nu t}};$$

- Гомперца

$$y(t) = y_0 \cdot \exp\left(\frac{\nu_0 \cdot (1 - e^{-Dt})}{D} \right),$$

где D - дополнительный параметр, характеризующий уменьшение ν;

- Ричардса

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot Y}{(y_0^n + (Y^n - y_0^n) \cdot e^{-kt})^{1/n}},$$

где n - параметр;

- Чантера

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot B}{y_0 + (b - y_0) \cdot \exp\left(-\frac{\nu(1 - e^{-Dt})}{D} \right)},$$

где B и D - постоянные величины.

2.5 Модифицированная модель естественного роста. Модель Харрода-Домара

Вполне очевидно, что экономический рост ценен не сам по себе, а в качестве основы повышения благосостояния населения, поэтому качественная оценка роста часто дается через оценку динамики потребления.

Модель описывает динамику дохода $y(t)$, который рассматривается как сумма непроизводственного потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$y(t) = I(t) + C(t)\,. \qquad (35)$$

В модели вводится понятие естественного роста темпа дохода (при отсутствии технического прогресса, он равен темпу роста населения) и гарантированного темпа, ограниченного ростом капитала.

Как и ранее, в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость роста дохода пропорциональна величине инвестиций:

$$by'(t) = I(t) \quad \text{или} \quad y'(t) = \frac{1}{b} I(t)\,, \qquad (36)$$

где b - коэффициент капиталоемкости прироста дохода;

$\frac{1}{b}$ - приростная капиталоотдача или предельная производительность капитала.

Потребление $C(t)$ представляет собой определенную часть дохода:

$$C(t) = (1-m)\cdot y(t)\,, \qquad (37)$$

где m - норма инвестиций.

Подставим выражения (36) и (37) в выражение (35) получим:

$$y(t) = by'(t) + (1-m)\cdot y(t)\,.$$

Выразим $y'(t)$, получим $y'(t) = \frac{m}{b} y(t)$, что равносильно уравнению $y'(t) = ky(t)$ при p = const.

Будем также предполагать, что:

- инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала. Формально это означает, что $\Delta K(t) = I(t)$, где $\Delta K(t)$ - непрерывная функция прироста капитала во времени;

-выбытие капитала отсутствует;

-экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равен нулю, а государственные расходы в модели не выделяются;

-производственная функция в модели линейна. Это следует из пропорциональности прироста дохода приросту капитала.

Например, если $y = \alpha L + \beta K$, где $\beta = \dfrac{1}{b}$, то она удовлетворяет этому предположению либо когда $\alpha = 0$, либо когда $L(t) = const$.

Это значит, что затраты труда постоянны во времени, либо выпуск не зависит от затрат труда, поскольку труд не является дефицитным ресурсом. Другими словами можно сказать, что технология производства представлена производственной функцией с постоянной производительностью капитала, при условии, что труд не является дефицитным ресурсом. Выпуск фактически зависит от одного ресурса-капитала;

-модель не учитывает технического прогресса.

Указанные предположения упрощают описание динамики реальных макроэкономических процессов, но делают затруднительным применение данной модели, например, для непосредственного расчета или прогноза величины совокупного выпуска или дохода. В то же время ее относительная простота позволяет более глубоко изучить взаимосвязь инвестиций и роста выпуска, получить точные формулы траекторий рассматриваемых параметров.

Зависимость, связывающая между собой во времени показатели инвестиций, определяемый ими объем или объем основного капитала и уровень дохода (выпуска), является базовой во всех моделях макроэкономической динамики. Кроме того, в этих моделях необходимо определить принципы формирования структуры дохода, распределение между составляющими, прежде всего – потреблением и накоплением.

В рассматриваемой модели предполагается, что динамика объема потребления $C(t)$ может считаться постоянной во времени, расти с заданным постоянным темпом или иметь какую-либо другую динамику.

Простейший вариант модели получается, если считать $C(t) = 0$. Этот случай совершенно не реалистичен с практической точки зрения, в нем все ресурсы направляются на инвестиции, однако здесь могут быть определены максимальные технологически возможные темпы роста. В этом случае получаем линейное однородное дифференциальное уравнение $y'(t) = \dfrac{1}{b} y(t)$ и его решение имеет вид: $y(t) = y(0) \cdot e^{\frac{1}{b}t}$, где $y(0)$ - доход при $t = 0$.

Непрерывный темп роста дохода $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{1}{b}$ - это максимально возможный темп роста.

Пусть теперь $C(t) = C_0$ – постоянна во времени. Получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$y(t) = by'(t) + C_0 \quad \text{или} \quad y'(t) = \frac{1}{b}(y(t) - C_0)\,.$$

Частным решением данного уравнения является $y(t) = C_0$, складывая его с общим решением однородного уравнения $y(t) = C \cdot e^{\frac{1}{b}t}$, в итоге получаем общее решение: $y(t) = C \cdot e^{\frac{1}{b}t} + C_0$, откуда, подставив $t = 0$, получим $C = y(0)$ и $y(t) = (y(0) - C_0) \cdot e^{\frac{1}{b}t} + C_0$.

Непрерывный темп роста дохода $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{1}{b}\left(1 - \dfrac{C_0}{y(t)}\right)$. Он составляет $\dfrac{1}{b}\left(1 - \dfrac{C_0}{y(0)}\right)$ в начальный момент времени (при $t = 0$) и, возрастая, стремится к $\dfrac{1}{b}$ при $t \to \infty$ (поскольку доход растет, а постоянный объем потребления составляет все меньшую долю). Величина $a(t) = \left(1 - \dfrac{C_0}{y(t)}\right)$ есть норма накопления в момент времени t, и темп роста дохода оказывается пропорциональным этой величине, как и показателю прироста капиталоотдачи $\dfrac{1}{b}$.

Итак, при росте нормы накопления и темпов роста дохода, постоянный объем потребления составляет все меньшую долю. В то же время это единственный уровень текущего потребления. Для разрешения проблемы согласования конкурентных целей увеличения темпов роста и уровня текущего благосостояния в модель включают элемент оптимизации. В этом случае решается оптимизационная задача на максимум общего объема потребления за конечный или бесконечный период времени. Для отражения предпочтительности более раннего получения результата в модель включается временное дисконтирование, при котором более ранний результат учитывается в критерии с большим “весом”. Требуется максимизировать интегральное общее потребление за длительный промежуток времени $\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta\cdot t} C(t)dt$, где δ - коэффициент дисконтирования. В этот интеграл будущие значения потребления входят с экспоненциально убывающим весом. Таким образом, приходим к следующей модели оптимизации роста:

$$\max \int\limits_0^{\infty} e^{-\delta\cdot t} C(t)dt ,$$

$\tilde{C} < C < \dfrac{1}{\beta}$, где $\tilde{C}$ - максимально допустимое, с социальной точки зрения значение, потребление.

Рассмотрим вариант модели, когда потребление $C(t)$ растет с постоянным темпом, то есть $C(t) = C(0)e^{r\cdot t}$, где $C(0)$ - потребление в момент времени $t = 0$, r - темп прироста потребления. Решение уравнения $y(t) = by'(t) + C(0)e^{r\cdot t}$ имеет вид:

$$y(t) = (y(0) - \frac{C(0)}{1-br}) \cdot e^{\frac{1}{b}t} + \frac{C(0)}{1-br} \cdot e^{rt}.$$

Темп роста потребления r не должен быть больше максимально возможного общего темпа прироста $\dfrac{1}{b}$, так как иначе потребление будет занимать все большую часть дохода, что сведет к нулю сначала инвестиции, а затем и доход. Это видно из формулы решения модели, поскольку в случае, если $r > \dfrac{1}{b}$, то коэффициент $\dfrac{1}{1-br}$ - отрицателен, а e^{rt} растет быстрее, чем $e^{\frac{1}{b}t}$.

В решении рассматриваемой модели роста при $r < \dfrac{1}{b}$ многое зависит от соотношения между r и $\dfrac{a(0)}{b}$, где $a(0) = 1 - \dfrac{C(0)}{y(0)}$ - норма накопления в начальный момент времени $t = 0$. Если $r = \dfrac{a(0)}{b}$, то темп роста дохода равен темпу роста потребления, и решением модели является:

$$y(t) = y(0) \cdot e^{\frac{1}{b}\cdot t}.$$

Норма накопления $a(t)$ в этом случае постоянна во времени и равна $a(0)$, а темп роста дохода пропорционален норме накопления и обратно пропорционален коэффициенту капиталоемкости.

Именно эта модификация модели экономического роста, в которой постоянна норма накопления, называется моделью Харрода-Домара.

Если в рассматриваемой модели роста $\frac{a(0)}{b} < r < \frac{1}{b}$, то требуемый темп прироста потребления оказывается слишком высоким для экономики. В этом случае $y(0) - \frac{C(0)}{1-br}$ отрицателен и, поскольку $r < \frac{1}{b}$, то первое, отрицательное, слагаемое в решении “перевешивает” в конце концов второе. Поэтому темп прироста дохода падает и становится с некоторого момента отрицательным. Через некоторое время сам доход становится равным нулю, после чего модель теряет экономический смысл. Это аналогично случаю $r \geq \frac{1}{b}$, хотя здесь уже дело не в том, что нужный темп прироста потребления в принципе не достижим за длительный период. В данном случае слишком низкой оказывается начальная норма накопления $a(0)$.

Если $r < \frac{a(0)}{b}$, то норма накопления, а вместе с ней и темп прироста дохода растут, причем последний в пределе приближается к $\frac{1}{b}$. Однако в этом случае происходит “накопление ради накопления ”, так как потребление растет заданным темпом r, а темп прироста дохода удается увеличить за счет более быстрого роста инвестиций. Норма накопления $a(0)$ здесь превышает br, и если исходить из задачи максимизации объема потребления, то эта норма слишком высока. Более высокий ее уровень требует увеличения инвестиций $I(0)$ за счет сокращения потребления $C(0)$ в начальный момент, что при фиксированном темпе прироста потребления r обуславливает более низкий его уровень на всей траектории. В то же время нужный темп прироста потребления $r < \frac{1}{b}$ можно поддерживать при $a(0) = br$. Таким образом, если требуется поддерживать постоянный темп роста потребления r, не превышающий технологического темпа, то для максимизации объема потребления за любой период нужно установить начальную норму накопления $a(0)=br$. Более сложен вопрос о том, какой уровень темпа r более предпочтителен. Большая его величина позволяет обеспечить больший объем потребления за длительный период, но это происходит за счет сокращения потребления на начальном этапе. Таким образом, для выбора значения r (если оно предполагается постоянным) нужна информация о межвременных предпочтениях лица, принимающего решение.

Пример. Найти функцию дохода $y=y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t)=2t$, коэффициент капиталоёмкости дохода $b=\frac{1}{2}$, $y(0)=2$.

Решение. Итак, в данном случае

$$y(t)=\frac{1}{2}y'(t)+2t,$$

то есть функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}y'-y=-2t \text{ или } y'-2y=-4t.$$

Решение будем искать в виде $y=uv,\ y'=u'v+uv'$, тогда получим

$$u'v+uv'-2uv=-4t, \qquad u'v+u(v'-2v)=-4t.$$

Положим $v'-2v=0$ или $\frac{dv}{dt}=2v,\ \frac{dv}{v}=2dt$, $\ln v=2t$, откуда $v=e^{2t}$.

Подставим $v=e^{2t}$ в уравнение, получим $u'e^{2t}=-4t$ или

$\frac{du}{dt}e^{2t}=-4t$, $du=-4te^{-2t}dt$, $u=-4\int te^{-2t}dt$.

Откуда $u=2te^{-2t}+e^{-2t}+C$, а $y(t)=e^{2t}(2te^{-2t}+e^{-2t}+C)$.

Поскольку $y(0)=2$, то, $C=1$, тогда

$$y(t)=(2t\cdot e^{-2t}+e^{-2t}+1)e^{2t}=2t+e^{2t}+1.$$

2.6 Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Обозначим через $Y(t)$, $E(t)$, $C(t)$, $I(t)$ – соответственно национальный доход, государственные расходы (государственное потребление), потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени *t*. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&Y(t) = C(t) + L(t) + E(t),\\
&C(t) = a(t)Y(t) + b(t), \qquad (38)\\
&I(t) = l(t)Y'(t),
\end{aligned}
$$

где $0 < a(t) < 1$ – коэффициент склонности к потреблению (предельная склонность потребления);

$b(t)$ –конечное потребление (базовый уровень потребительских расходов, фиксированная часть фонда потребления);

$0 < l(t) < 1$ – норма акселерации (коэффициент акселерации – показывает, на сколько возрастут инвестиции, если национальный доход возрастет на единицу).

Все функции, входящие в уравнения, положительны. Из первого уравнения соотношений (38) следует, что сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу. Из второго уравнения - общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода и конечного потребления. Наконец, из третьего уравнения следует, что размер инвестиций не может быть произвольным. Он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход. Будем предполагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $l(t)$, $E(t)$ заданы и являются характеристиками функционирования и развития данного государства. Требуется найти динамику национального дохода $Y(t)$, или закон изменения национального дохода в зависимости от времени t.

Выразим из второго и третьего уравнений выражения (38) $C(t)$ и $I(t)$ соответственно и подставим в первое уравнение выражения (38):

$$Y(t) = a(t)Y(t) + b(t) + l(t)Y'(t) + E(t).$$

После преобразований получим дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$):

$$Y'(t) = \frac{1 - a(t)}{l(t)} Y(t) - \frac{b(t) + E(t)}{l(t)}\ . \qquad (39)$$

Для решения данного дифференциального уравнения рассмотрим более простой случай, когда основные параметры задачи a, b, l являются постоянными числами. Тогда дифференциальное уравнение (39) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$Y'(t) = \frac{1-a}{l} Y(t) - \frac{b+E(t)}{l}. \qquad (40)$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (40) возьмем так называемое равновесное решение, когда $Y'=0$, тогда

$$Y_p = \frac{b+E(t)}{1-a}.$$

Общее решение однородного уравнения задается формулой

$$\bar{Y} = Ce^{\frac{1-a}{l}\cdot t},$$

тогда общее решение уравнения (40) примет вид

$$Y(t) = \frac{b+E(t)}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{l}\cdot t}. \qquad (41)$$

Интегральные кривые уравнения показаны на рисунке 26.

Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ и кривые уходят вниз от стационарного решения $Y_p = \dfrac{b+E}{1-a}$, то есть национальный доход со временем падает при заданных параметрах a, b, l и E, так как показатель экспоненты в (41) положителен. Если же $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ и национальный доход растет во времени и на рисунке интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой.

Замечание. Уравнение $Y'(t) = \dfrac{1-a}{l} Y(t) - \dfrac{b+E}{l}$ является автономным. В общем виде его записывают $y'(t) = f(y)$. Такие уравнения часто применяются на практике для математического моделирования различных процессов, когда, например, независимая переменная x играет роль времени, не входящего в соотношения, описывающие законы природы. В этом случае обычный интерес представляют так называемые точки равновесия, или стационарные точки, где $y' = 0$. В нашем случае точка представляет собой точку неустойчивого равновесия.

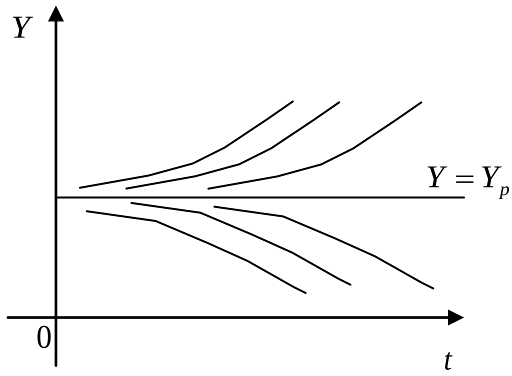

Рисунок 26-Интегральные кривые уравнения

Пример. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 300 д.е. Базовая величина потребления – 120 д.е. Предельная склонность к потреблению равна 0,6. Величина государственных расходов фиксирована и равна 38 д.е. Норма акселерации – 0,5. Найти динамику дохода и равновесный доход. Каким будет доход через 1ед. времени и через 2 ед. времени?

Решение. Найдем равновесное решение задачи по формуле $Y_p = \dfrac{b + E(t)}{1 - a} = \dfrac{120 + 38}{0,5} = 316$. В дифференциальное уравнение $Y'(t) = \dfrac{1-a}{l} Y(t) - \dfrac{b + E(t)}{l}$ подставим исходные данные. Тогда получим дифференциальное уравнение $Y'(t) = 0,8 \cdot Y(t) - 316$, общее решение которого имеет вид $Y(t) = 395 + C \cdot e^{0,8t}$. С учетом начальных условий будем иметь динамику дохода $Y(t) = 395 - 95 \cdot e^{0,8t}$. Доход через одну единицу времени равен $Y(1) = 395 - 95 \cdot e^{0,8 \cdot 1} = 183,57$. Доход убывает, так как по условию задачи $Y(0) < Y_p$, где $Y(0)$ - доход в начальный момент времени.

2.7 Неоклассическая модель роста

Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где $F(K, L)$ – однородная производственная функция первого порядка

$(F(zK,zL)=zF(K,L))$, L - объем затрат труда, K – объем капиталовложений (производственных фондов). Если $k=\dfrac{K}{L}$ - капиталовооруженность, тогда производительность труда

$$f(k)=\frac{F(K,L)}{L}=F\left(\frac{K}{L},1\right)=F(k,1).$$

Известно, что $f'(k)>0, f''(k)<0$. Требуется описать динамику капиталовооруженности или закон изменения капиталовооруженности в момент времени t.

Поскольку любая модель базируется на определенных предпосылках, сделаем некоторые предположения и введем ряд определяющих параметров.

Предположим:

а) что происходит естественный прирост трудовых ресурсов во времени $L'=aL$ или $\dfrac{dL}{dt}=aL$, где a - коэффициент пропорциональности;

б) что инвестиции направлены на увеличение запасов капитала на его амортизацию.

Если считать, что выбытие капитала происходит с постоянным коэффициентом выбытия (норма амортизации) b, то за время Δt будем иметь: $I\Delta t=\Delta K+bK\Delta t$ или $\Delta K=I\Delta t-bK\Delta t$. Окончательно можно записать: $K'=I-bK$ или $\dfrac{dK}{dt}=I-bK$, где $0<b<1$.

Если $0<m<1$ – норма инвестиций, то $I=mY$ и $K'=mY-bK$, где $Y=F(K,L)$.

Обозначим капиталовооруженность через $k=\dfrac{K}{L}$, а производительность труда $f(k)=\dfrac{F(K,L)}{L}=F(k,1)$.

Прологарифмируем выражение капиталовооруженности $k=\dfrac{K}{L}$ и получим: $\ln|k|=\ln|K|-\ln|L|$.

Дифференцируя последнее равенство по t, имеем

$$\frac{k'}{k}=\frac{K'}{K}-\frac{L'}{L}.$$

Подставим в это соотношение выражения $L'=aL$ и $K'=mF(K,L)-bK$, получим уравнение относительно неизвестной функции k:

$$\frac{k'}{k}=\frac{mF(K,L)-bK}{K}-\frac{aL}{L}=\frac{mLF(K,L)-bLK-aKL}{KL}=$$

$$=\frac{mL}{K}\cdot\frac{F(K,L)}{L}-a-b=\frac{m}{K}\cdot F(k,1)-(a+b).$$

Отсюда получаем:

$$k'=mf(k)-(a+b)k$$

или
$$\frac{dk}{dt}=mf(k)-(a+b)k\ . \qquad (41)$$

Полученное уравнение называется уравнением неоклассического роста.

Замечание. Уравнение $\frac{dk}{dt}=mf(k)-(a+b)k$ представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое является автономным. У автономного дифференциального уравнения существует стационарное решение. Выделим стационарное решение этого уравнения из условия, $\frac{dk}{dt}=0$, тогда $mf(k)-(a+b)k=0$.

Корень этого нелинейного алгебраического уравнения обозначим через k^*. Действительно, так как $f''(k)<0$, то графики $y=mf(k)$ и $y=(a+b)k$ обязательно пересекутся (рисунок 27).

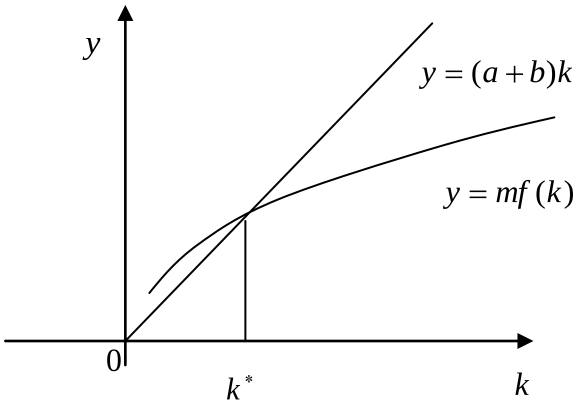

Рисунок 27-Стационарное решение дифференциального уравнения

Кроме того, так как $f'(k)$ - непрерывная монотонно убывающая функция, то существует такое k_1, что $f'(k_1)=\frac{a+b}{m}$, то есть у функции $k(t)$ существует точка перегиба. Итак, при $k>k^*$ имеем

$k' < 0$, при $k < k^*$ будет $k' > 0$. При $k < k_1$ имеем $k'' > 0$, а при $k > k_1$ имеем $k'' < 0$. Ввиду этого интегральная кривая уравнения $\frac{dk}{dt} = mf(k) - (a+b)k$ напоминает логистическую кривую (рисунок 28).

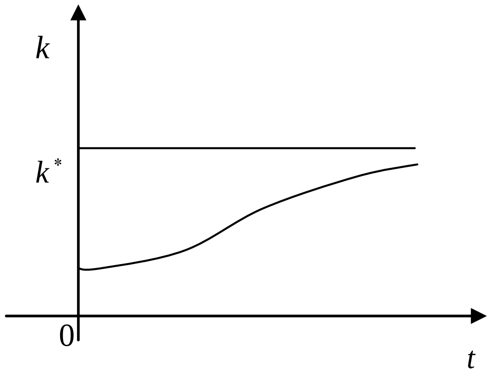

Рисунок 28-Логистическая кривая

Пример. Для производственной функции $F(K, L) = \sqrt{KL}$ найти интегральные кривые уравнения $\frac{dk}{dt} = mf(k) - (a+b)k$ и стационарное решение.

Из условия $f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k,1)$ следует, что $f(k) = \sqrt{k}$ и тогда дифференциальное уравнение неоклассического роста примет вид:

$$\frac{dk}{dt} = m\sqrt{k} - (a+b)k \ .$$

Стационарное решение этого уравнения следует из равенства $m\sqrt{k} - (a+b)k = 0$ и имеет вид: $k^* = \frac{m^2}{(a+b)^2}$.

Дифференциальное уравнение неоклассического роста решаем методом разделения переменных:

$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[m - (a+b)\sqrt{k}\right]} = dt$, $\int \frac{dk}{\sqrt{k}\left[m - (a+b)\sqrt{k}\right]} = \int dt$, заменим $\sqrt{k} = z$, тогда $\displaystyle\int \frac{2zdz}{z(m-(a+b)z)} = \int dt$, $\displaystyle 2\int \frac{dz}{m-(a+b)z} = \int dt$,

$$z = \frac{m}{(a+b)} + ce^{\frac{-(a+b)}{2}t}, \text{ тогда } k(t) = \left[\frac{m}{(a+b)} + ce^{\frac{-(a+b)}{2}t} \right]^2 .$$

Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению (рисунок 29), то есть $k = k^*$ при $t \to \infty$.

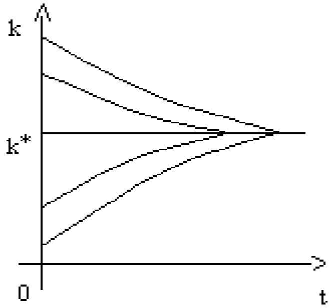

Рисунок 29-Семейство интегральных кривых, сходящихся к стационарному решению

Следовательно, при неизменных входных параметрах задачи, функция капиталовооруженности устойчиво стремится к стационарному решению независимо от начальных условий. Такая стационарная точка $k = k^*$ является точкой устойчивого равновесия.

Задачи для самостоятельного решения (к подразделам 2.1-2.7)

1. Коэффициент выбытия фондов $\mu = 0{,}1$, инвестиции постоянны и равны I=100 д.е. Опишите процесс движения фондов $K(t)$, если известно, что скорость изменения фондов равна разности между инвестициями и выбытием фондов. Через какой промежуток времени износ фондов составит 50% от первоначальной величины, $K(0) = 1200$.

2 Фирма оказывает услуги населению. Пусть в начале открытия фирмы всегда есть 10 единиц посетителей. В каждую единицу времени непрерывно поступают 2 ед. посетителей, из которых 30% хотят получить вполне определенную услугу. Вновь прибывшие перемешиваются с уже пришедшими посетителями. И эта ”смесь” убывает с фирмы с той же скоростью (2 единицы посетителей в

единицу времени). Сколько будет желающих получить определенную услугу через 5 единиц времени?

3. В помещении завода работают два вентилятора, каждый из которых доставляет в минуту по $60\,м^3$ чистого воздуха, содержащего 0,01 % углекислоты. Полагая, что в помещении объемом $1600\,м^3$ с начальным содержанием углекислоты в 0,2 % находится 120 человек, каждый из которых выдыхает в минуту $0{,}1\,м^3$ воздуха с 5 % содержанием углекислоты. Определить наличие углекислоты в одном $м^3$ воздуха после двух часов пребывания в помещении.

4. Месячный доход семьи постоянный и составляет I_0 =100 д.е. Траты пропорциональны накоплениям. Описать процесс изменения накопления. Через какой промежуток времени накопления составят 50% месячного дохода семьи? Стабилизируются ли накопления? В начальный момент накопления составляли $K(0) = K_0 = 10$ д.е., коэффициент пропорциональности α =0,3.

5. Месячный доход семьи постоянный и равен I, а траты пропорциональны накоплениям. Описать процесс накопления, если через год, накопления составили 3 д.е., а через 2 года – 5 д.е. В начальный момент времени накопления отсутствовали ($K(0)$ =0). Через сколько лет накопления сравняются с бюджетом семьи? Найти месячный доход семьи.

6. Процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности. Обозначим через $x = const$ - введенную производственную мощность, а через $y(t)$ - фактическое производство на базе этой мощности в момент времени t $(y(t) < x)$. Предполагая, что рост производства пропорционален недоиспользованной мощности, найти изменение производства в каждый момент времени. Через какой промежуток времени будет достигнут заданный размер мощности x =150 д.е , если в начале года производство определялось величиной 10 д.е., а через год – 20 д.е.?

7**.** Прирост фактического производства пропорционален недоиспользованной мощности. Введенная производственная мощность равна x_0. В результате освоения производственной мощности установили, что через год после освоения, фактическое производство на базе этой мощности составило 51,5 д.е., а через три года – 150,3 д.е. Определить введенную производственную мощность x_0. Через какой промежуток времени будут освоены 90% введенной производственной мощности?

8. В начальный момент времени доход составлял 60 д.е. Доход используется на потребление и инвестиции в соотношении 4:1. Темп роста дохода составляет 4% в год. Найти динамику дохода и норму инвестиций в доходе на начало и конец года.

9. Описать процесс обеспеченности товаром население, если скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Насыщение товаром (предельное значение обеспеченности товаром) составляет А=300ед. Установлено, что через год обеспеченность товаром составляла 90,5 ед., а через два года – 110,5 единиц. Какова обеспеченность товаром в начальный момент времени? Через какой промежуток времени будет обеспечено 50% предельного значения обеспеченности спросом?

10. Описать процесс обеспеченности товаром население, если скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром (предельное значение обеспеченности товаром). В начальный момент времени обеспеченность товаром составляла $y(0) = 23$ ед. Скорость увеличения спроса имеет естественный рост 2%. Через какой промежуток времени обеспеченность товаром будет составлять 90% предельного значения обеспеченности (предельное значение обеспеченности товаром А=150 ед.).

11**.** Доход $y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Темп прироста потребления равен 8 %, инвестиций – 20%. В начальном году $(t = 0)$ $C = 400, I = 100$. Чему равен темп роста дохода через три года?

12**.** Доход $y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций. Найти функцию дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 2e^{0.5t}$ коэффициент капиталоемкости дохода равен 0,5, $y(0)$ =0,5

13**.** Доход $y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций. Найти функцию дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 3t$, коэффициент капиталоемкости дохода равен $\frac{1}{3}$, $y(0)$ =3.

14. Доход $y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций. Найти функцию дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = \sqrt[3]{t}$, коэффициент капиталоемкости дохода равен $\frac{1}{3}$, $y(0)$ =3.

15.Функция потребления определяется уравнением $C = 140 - 0{,}6Y$. Доход в начальный момент времени составлял 2000 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 500 д.е. Определить равновесный доход. Найти доход потребление и инвестиции через 6 месяцев.

16. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 600 д.е. Базовая величина потребления - 200 д.е. Предельная склонность к потреблению - 0,7. Величина государственных расходов - 50 д.е. Норма акселерации – 0,8. Найти динамику дохода и равновесный доход.

17.Функция потребления определяется уравнением $C = 70 - 0{,}7 \cdot Y$. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы изменяются с постоянным темпом $E = e^{0{,}03t}$. Найти динамику дохода и равновесный доход, если в начале года доход был равен 336,70 д.е.

18. Дана производственная функция $F(K, L) = 3K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. Найти интегральные кривые $k' = mf(k) - (a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций составляет $m = 0{,}5$, норма амортизации

$b=0{,}1$, а годовой прирост трудовых ресурсов составляет 2%. Начальное условие задать самостоятельно.

19. Найти динамику капиталовооруженности и ее стационарное значение, если производственная функция $F(K,L)=3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}e^{t}$, норма инвестиций составляет $m=0{,}5$, норма амортизации $b=0{,}1$, а годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1%. Начальное условие задать самостоятельно.

20. Дана производственная функция $F(K,L)=\sqrt{KL}e^{0{,}5t}$. Найти интегральные кривые $k'=mf(k)-(a+b)k$ и точку устойчивого равновесия. Норма инвестиций составляет $m=0{,}3$, норма амортизации $b=0{,}1$, а годовой прирост трудовых ресурсов составляет 2%. Начальное условие задать самостоятельно.

2.8 Модель Солоу с непрерывным временем

Модель Солоу является динамической односекторной моделью экономического роста. Экономическая система здесь рассматривается как единое целое (без структурных подразделений), в ней производится единственный универсальный продукт, который может потребляться как в непроизводственной сфере, так и в производственной. Потребление его в производственной сфере может рассматриваться как инвестирование. Универсальным продуктом можно условно считать денежную оценку всей экономики. Экспорт-импорт в явном виде не учитывается. Эта модель отражает важнейшие макроэкономические аспекты, в том числе и процесса воспроизводства.

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью эндогенными (заданными внутри системы) переменными состояния: Y – конечный продукт, L – затраты труда (наличные трудовые ресурсы), K – затраты капитала (производственный фонды), I – инвестиции, C – размер непроизводственного потребления. Все переменные являются функциями времени *t*. Время будет предполагается непрерывным.

Кроме того, в модели используются экзогенные (заданные вне системы) показатели: $-1<a<1$ - годовой темп прироста трудовых ресурсов; $0<b<1$ - коэффициент выбытия капитала; $0<\rho<1$ - норма накопления (доля конечного продукта, используемого на инвестирование). Экзогенные показатели считаются постоянными во времени, причем норма накопления является управляющим параметром. В начальный момент времени она устанавливается управляющим органом системы на любом уровне из области допустимых значений. Для мгновенных показателей K, L можно считать, что $K(t)$ и $L(t)$, – соответственно запасы капитала и трудовые ресурсы в момент *t*. Чтобы избежать сезонных изменений числа занятых и всплеска производственных фондов при вводе новых мощностей, K и L можно считать средними значениями этих величин за год, серединой которого служит *t*. Для величин Y, C и I их значения в момент *t* можно себе представить, как их объемы, накопленные за год, серединой которого служит момент *t* (но и в этом случае они остаются функциями времени и их все же лучше воспринимать как мощность производства и мгновенные скорости потребления и инвестирования). Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) при производстве годового конечного продукта используются полностью.

Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых капитала и труда: $Y = F(K,L)$. Таким образом, $F(K,L)$ – производственная функция (ПФ) всего народного хозяйства.

Предполагается, что $Y = F(K,L)$ является линейно-однородной неоклассической производственной функцией, удовлетворяющей постоянным масштабам расширения производства, то есть $F(zK,zL) = zF(K,L)$ и следующим свойствам:

а) $F(0,L) = F(K,0) = 0$ - при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно;

б) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ - с ростом количества ресурсов выпуск растет;

в) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ - с увеличением количества ресурсов скорость выпуска замедляется;

г) $F(+\infty;L) = F(K;+\infty) = +\infty$ - при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции: $Y = C + I$. Если $0 < \rho < 1$ - норма накопления, которая в модели представляет собой долю конечного продукта, используемого на инвестиции, то есть $I = \rho Y$, тогда $C = (1-\rho)Y$.

Рассмотрим как меняются ресурсы за небольшой промежуток времени t.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличным трудовым ресурсам, то согласно данному годовому темпу прироста занятых $-1 < a < 1$, можно записать что за время Δt: $\Delta L = aL\Delta t$ или $\frac{dL}{dt} = aL$ - это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и начальным условием $L(0) = L_0$ и решение которого имеет вид: $L(t) = L_0 e^{at}$, где $L(0) = L_0$ - трудовые ресурсы в начале наблюдения при $t = 0$.

Запасы капитала могут изменяться по двум причинам: инвестиции вызывают увеличение запасов капитала; амортизация или выбытие капитала вызывает снижение его запасов. Если считать, что выбытие капитала происходит с постоянным коэффициентом выбытия $0 < b < 1$, то за время Δt прирост капитала будет равен: $\Delta K = I\Delta t - bK\Delta t$ или $\frac{dK}{dt} = I - bK$. Окончательно, с учетом $I = \rho Y$, получаем:

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - bK .$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием $K(0) = K_0$ (запасы капитала в начале наблюдения, при $t = 0$).

Таким образом, модель Солоу можно записать в абсолютных показателях в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} Y = F(K, L), \\ C = (1-\rho)Y, \\ \frac{dK}{dt} = \rho Y - bK, \quad K(0) = K_0, \\ \frac{dL}{dt} = aL, \quad L(0) = L_0. \end{cases} \tag{42}$$

Введем следующие относительные показатели:

а) $k = \frac{K}{L}$ - капиталовооруженность (фондовооруженность);

б) $y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L},1\right) = F(k,1) = f(k)$ - производительность труда;

в) $i = \frac{I}{L}$ - удельные инвестиции;

г) $c = \frac{C}{L}$ - удельное потребление.

Динамика объема выпуска конечного продукта зависит от объема капитала (в нашем случае – капитала в расчете на одного занятого – капиталовооруженности k). Найдем производную k по t:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{(\rho Y - bK)L - aKL}{L^2} = \rho \cdot f(k) - (b+a)k \ .$$

Итак,

$$\frac{dk}{dt} = \rho \cdot f(k) - (b+a)k \ , \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0} \qquad (43)$$

Поведение макропоказателей модели (42) целиком определяется дифференциальным уравнением (43) и динамикой трудовых ресурсов.

Уравнение (43) – это уравнение с разделяющимися переменными и начальным условием, поэтому оно имеет единственное решение. Исследуем некоторые специальные решения этого уравнения.

2.8.1 Стационарные траектории модели Солоу

Каждый абсолютный или относительный показатель модели Солоу изменяется во времени, то есть можно говорить о траектории системы в абсолютных или относительных показателях. Траектория называется стационарной, если показатели на ней не изменяются во времени.

Рассмотрим стационарную траекторию, на которой капиталовооруженность постоянна. Она может быть равна своему постоянному значению k_0. Но поскольку постоянное значение капиталовооруженности не всегда совпадает с его начальным значением, обозначим его через k^*. Такое значение капиталовооруженности называется стационарным. Установление капиталовооруженности на постоянном уровне k^* приводит к выходу на стационарную траекторию. На стационарной траектории $\frac{dk}{dt} = 0$ или

$$\rho \cdot f(k) - (b+a)k = 0 \ . \qquad (44)$$

Покажем, что k^* - решение данного уравнения. Так как $y = f(k) = F(k,1)$, то $f'(k) > 0, f''(k) < 0$. Это значит, что $f(k)$- возрастающая функция, но темп роста ее замедляется. Первая производная $f'(k)$- предельная производительность капитала (производственных фондов), которая показывает прирост конечного продукта на душу населения при единичном увеличении величины k. Вторая производная показывает снижение темпов роста, то есть по мере роста капитала на одного человека каждая его дополнительная единица приносит все меньший эффект. В то же время функция $y = (b + a)k$ возрастает с постоянным темпом. Значит, если $\rho \cdot f'(0) > (b + a)$, то уравнение (44) имеет единственное решение k^* при $k > 0$ (рисунок 30).

На рисунке 30 стационарная точка k^* - точка равновесия, в которой инвестиции равны выбытию капитала. Если экономика достигает точки k^*, то уровень капиталовооруженности k перестает изменяться. Это состояние называется устойчивой капиталовооруженностью. Уровень k^* - устойчивое равновесие, то есть отклонение от него в итоге приводит к возврату в первоначальное состояние. При $k < k^*$ $(\frac{dk}{dt} > 0)$ инвестиции превышают выбытия, наблюдается рост k до состояния k^*. Если $k > k^*$ $(\frac{dk}{dt} < 0)$, то выбытия превышают инвестиции и уровень k снижается до k^*.

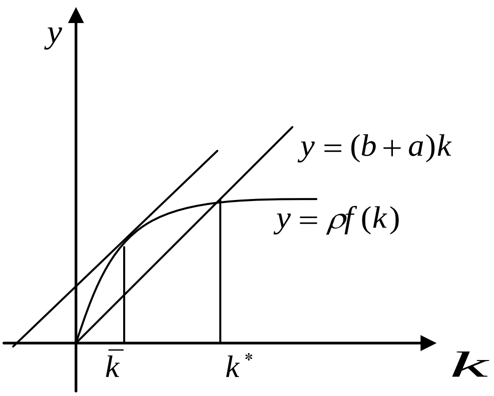

Рисунок 30 - Стационарное значение капиталовооруженности k^*

Рассмотрим, как ведут себя на стационарной траектории макроэкономические показатели K, L, C, I, Y.

Поскольку: $L = L_0 e^{at}$, $k = \frac{K}{L}$, $\frac{Y}{L} = f(k)$, тогда $K = k^* L_0 e^{at}$,

$$Y = f(k^*)L_0e^{at}, \quad C = (1-\rho)f(k^*)L_0e^{at}, \; I = \rho\cdot f(k^*)L_0e^{at}.$$

На стационарной траектории все основные макроэкономические показатели растут экспоненциально, пропорционально трудовым ресурсам:

$$\begin{cases} L(t) = L_0e^{at}, \\ Y(t) = f(k^*)L_0e^{at}, \\ K(t) = k^*L_0e^{at}, \\ C(t) = (1-\rho)f(k^*)L_0e^{at}, \\ I(t) = \rho\cdot f(k^*)L_0e^{at}. \end{cases} \tag{45}$$

2.8.2 Переходный режим в модели Солоу

Если $k_0 = k^*$, то экономика уже находится на стационарной траектории и может сойти с нее только при изменении внешних условий (установление другого значения нормы накопления либо переход к новым технологиям с изменением функции $F(K,L)$). При $k_0 \neq k^*$ в экономике будет происходить переходный процесс, который заканчивается установлением стационарного режима.

На рисунке 30 через $\bar{k}$ обозначена капиталовооруженность при которой скорости функций $y = \rho\cdot f(k)$ и $y = (b+a)k$ равны.

Если $k_0 < \bar{k}$, то имеет место ускоренный темп роста капиталовооруженности, который по достижении значения $\bar{k}$ сменяется замедленным ростом. При $\bar{k} < k_0 < k^*$ наблюдается замедленный рост капиталовооруженности. Наконец, если $k_0 > k^*$ - замедляющее падение капиталовооруженности (“проедание” фондов). Точно так же изменяются и остальные относительные показатели ($y = f(k) = \frac{Y}{L}$, $i = \frac{I}{L}$, $c = \frac{C}{L}$), поскольку они пропорциональны k^*.

2.8.3 Модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа. «Золотое правило» экономического роста

Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \; A > 0, \; 0 < \alpha < 1.$$

Поскольку $f(k) = F(K,1) = Ak^{\alpha}$, то уравнение (43) примет вид:

$$\frac{dk}{dt} = \rho\cdot Ak^{\alpha} - (b+a)k, \quad k(0) = k_0. \tag{46}$$

Решим это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными следующим образом. Сделаем замену переменной

$k(t)=u(t)e^{-(b+a)t}$, $u(t)$ – новая функция t. Продифференцируем данное выражение по t, получим :

$$\frac{dk}{dt}=\frac{du}{dt}e^{-(b+a)t}-(b+a)e^{-(b+a)t}u\ . \qquad (47)$$

Подставим в уравнение (46) вместо k его выражение через u , а вместо $\frac{dk}{dt}$ -его выражение из (47) , получим:

$$\frac{du}{dt}e^{-(b+a)t}-(b+a)e^{-(b+a)t}u=\rho A(ue^{-(b+a)t})^{\alpha}-(b+a)e^{-(b+a)t}u\ .$$

Дальнейшие преобразования приводят к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными относительно u :

$$\frac{du}{dt}=\rho Au^{\alpha}e^{(1-\alpha)(b+a)t} \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^{\alpha}}=\rho Ae^{(1-\alpha)(b+a)t}dt\ .$$

Решим это уравнение: $\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\rho Ae^{(1-\alpha)(b+a)\cdot t}}{(1-\alpha)(b+a)}+c$. Так как

$k(t)=u(t)e^{-(b+a)t}$,

то $u(t)=k(t)e^{(b+a)t}$ и $u(0)=k(0)e^{(b+a)0}=k(0)=k_0$.

Тогда получим $\frac{u^{1-\alpha}(0)}{1-\alpha}=\frac{\rho Ae^{(1-\alpha)(b+a)\cdot 0}}{(1-\alpha)(b+a)}+c$ или

$$\frac{k_0^{\ 1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\rho A}{(1-\alpha)(b+a)}+c\ .$$

Следовательно, $c=\frac{k_0^{\ 1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\rho A}{(1-\alpha)(b+a)}$ и

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\rho Ae^{(1-\alpha)(b+a)\cdot t}}{(1-\alpha)(b+a)}+\frac{k_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\rho A}{(1-\alpha)(b+a)}$$

или $\quad u(t)=\left(\frac{\rho A}{b+a}e^{(1-\alpha)(b+a)t}+k_0^{1-\alpha}+\frac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Тогда окончательно имеем

$$k(t)=u(t)e^{-(b+a)t}=\left(\frac{\rho A}{b+a}e^{(1-\alpha)(b+a)t}+k_0^{1-\alpha}+\frac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot e^{-(b+a)t}=$$

$$=\left(\frac{\rho A}{b+a}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho A}{b+a}\right)\cdot e^{-(1-\alpha)(b+a)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Стационарная траектория задаётся уравнением

$\rho Ak^{\alpha} - (b+a)k = 0$, откуда $k = \left(\dfrac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Следовательно, стационарное значение капиталовооруженности для производственной функции Кобба-Дугласа равно

$$k = \left(\frac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Покажем, что капиталовооруженность сходится к своему стационарному значению. Найдем

$\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{\rho\cdot A}{b+a} + \left(k_0^{1-\alpha} - \dfrac{\rho\cdot A}{b+a}\right)\cdot e^{-(1-\alpha)(b+a)\cdot t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\dfrac{\rho\cdot A}{b+a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Так как $y = f(k) = Ak^{\alpha}$, то удельный доход (производительность труда $\dfrac{Y}{L}$)

сходится к стационарному значению $y^* = A\left(\dfrac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Удельное потребление также сходится к стационарному значению:

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{C(t)}{L(t)} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(1-\rho)\cdot Y(t)}{L(t)} = (1-\rho)\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = (1-\rho)A\cdot\left(\dfrac{\rho\cdot A}{b+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

$$c^* = (1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (48)$$

Найдём значение нормы накопления, при которой удельное потребление в стационарном режиме максимально. Для этого найдём производную по ρ для (48) и приравняем её нулю

$$\frac{d}{d\rho}\left(A(1-\rho)\left(\frac{\rho A}{b+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) = A\left(\frac{A}{b+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{d}{d\rho}\left((1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) = 0.$$

$$\frac{d}{d\rho}\left((1-\rho)\rho^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}\right) = (-1)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-\rho)\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} =$$

$$= \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\left(-\rho + \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\rho)\right) = 0.$$

Отсюда получим: $-\rho + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(1-\rho) = 0$

или $-\rho + \dfrac{\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho = 0$, тогда $\rho\left(1 + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\rho = \alpha$.

Получили «золотое правило» экономического роста. Суть этого правила состоит в том, что для производственной функции Кобба-Дугласа оптимальная норма накопления в стационарном режиме равна коэффициенту эластичности α по капиталу. На практике норма накопления всегда меньше своего оптимального значения.

Замечание. Модель Солоу рассматривалась для случая, когда ПФ строится для внутреннего национального продукта (ВНП), где коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в валовом общественном продукте) равен нулю.

Пример. Производственная функция имеет вид $Y = 2\sqrt{KLe^t}$. Норма выбытия капитала равна b, годовой прирост трудовых ресурсов равен a, норма сбережения – ρ. Найти капиталовооруженность на стационарной траектории, динамику капиталовооруженности и найти значение нормы сбережения, при котором потребление в стационарном режиме максимально $(b = 0{,}2; a = 0{,}3; \rho = 0{,}25)$.

Решение. Запишем модель Солоу:

$$\begin{cases} Y = 2\sqrt{KLe^t} \\ C = (1-\rho)Y, \\ K' = \rho y - bK, K(0) = K_0, \\ L' = aL, L(0) = L_0. \end{cases}$$

Если $k = \dfrac{K}{L}$, то система определяется дифференциальным уравнением:

$$k' = \rho f(k) - (a+b)k \text{ , где } f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{2\sqrt{KLe^t}}{L} = 2\sqrt{ke^t}$$

и, тогда,

$$k' = 2\rho\sqrt{ke^t} - (b+a)k \text{ .} \qquad (49)$$

Найдем капиталовооруженность на стационарной траектории, то есть когда $k' = 0$. В результате преобразований получим:

$$\sqrt{k} = \frac{2\rho\sqrt{e^t}}{b+a} \text{ или } k^* = \frac{4\rho^2 e^t}{(b+a)^2} \text{ .}$$

Найдем значение нормы сбережения ρ, при котором удельное потребление $\dfrac{C(t)}{L(t)}$ в стационарном режиме максимально.

$$\frac{C}{L}=\frac{(1-\rho)Y}{L}=(1-\rho)f(k)=2(1-\rho)\sqrt{ke^t}=$$

$$=2(1-\rho)\frac{2\rho\sqrt{e^t}}{b+a}\cdot\sqrt{e^t}=\frac{4(1-\rho)\cdot\rho\cdot e^t}{b+a}.$$

Найдем производную по ρ удельного потребления и приравняем ее нулю:

$$\left(\frac{4e^t(1-\rho)\cdot\rho}{b+a}\right)'\rho=\frac{4e^t}{b+a}(1-2\rho)=0.$$

Окончательно получим: $1-2\rho=0$ или $\rho=\dfrac{1}{2}$.

Найдем решение дифференциального уравнения (49). Решение будем искать в виде:

$$k(t)=u(t)\cdot e^{-(b+a)t}. \tag{50}$$

Найдем производную этого выражения:

$$k'=u'e^{-(b+a)t}-(b+a)e^{-(b+a)t}\cdot u. \tag{51}$$

Выражения (50) и (51) подставим в (49):

$$u'e^{-(b+a)t}-(b+a)e^{-(b+a)t}\cdot u=2\rho\sqrt{u}\cdot e^{\frac{-(b+a)t}{2}}\cdot\sqrt{e^t}-(b+a)e^{-(b+a)}\cdot u,$$

$$u'e^{-(b+a)t}=2\rho\sqrt{u}\cdot e^{\frac{-(b+a)t}{2}}\cdot\sqrt{e^t}.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2\rho\cdot e^{\frac{-(b+a)t}{2}}\cdot\sqrt{e^t}}{e^{-(b+a)t}}dt,\qquad u^{-\frac{1}{2}}du=2\rho e^{\left(\frac{b+a}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot t}\cdot dt.$$

Интегрируя обе части уравнения получим

$u(t)=\left(\dfrac{2\rho}{a+b+1}e^{\frac{a+b+1}{2}\cdot t}+C\right)^2$, общее решение имеет вид

$$k(t)=\left(\frac{2\rho\cdot e^{\left(\frac{b+a}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot t}}{a+b+1}+C\right)^2\cdot e^{-(b+a)t}.$$

2.9 Модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара

Рассмотрим рынок одного товара, время считается непрерывным. Пусть $D(t)$, $S(t)$, $p(t)$ – соответственно спрос, предложение и цена товара к моменту времени t. Спрос и предложение будем считать линейными функциями цены, то есть $D(t) = a - bp$, $S(p) = \alpha + \beta p$, где $a, b, \alpha, \beta > 0$. Естественно считать, что $a > \alpha$, то есть при нулевой цене спрос превышает предложение. Основное предположение модели состоит в том, что цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением. Увеличение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности этого превышения: $\Delta p = \gamma(D - S)\Delta t$ или, так как время непрерывно, можно записать: $\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s),$ где $\gamma > 0$ - коэффициент пропорциональности.

Подставим в это дифференциальное уравнение линейные зависимости спроса и предложения от цены, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma((b + \beta) \cdot p - a + \alpha), \quad p(0) = p_0 \qquad (52)$$

Это уравнение имеет стационарное решение при $\frac{dp}{dt} = 0$, которое имеет вид:

$$p^* = \frac{a - \alpha}{b + \beta} > 0, \qquad (53)$$

причем $\frac{dp}{dt} > 0$ при $p^* > p$ и $\frac{dp}{dt} < 0$ при $p^* < p$.

При $p_0 < p^*$ цена p стремится к p^* возрастая, а при $p_0 > p^*$ цена p стремится к p^* убывая. Стационарная точка p^* является точкой устойчивого равновесия. Сама цена p^* есть равновесная цена, при которой равны спрос и предложение:

$$D = S \text{ или } a - bp = \alpha + \beta p, \text{отсюда } p^* = \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

Найдем решение линейного дифференциального неоднородного уравнения (52).

Дифференциальное уравнение (52) решаем методом вариации произвольной постоянной. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$p(t) = Ce^{-\gamma(b+\beta)t}. \qquad (54)$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения (52), для этого найдем производную по t выражения (54), считая вместо постоянной C функцию $C(t)$.

$$p'(t) = C'(t)e^{-\gamma(b+\beta)t} - C(t)e^{-\gamma(b+\beta)t}\gamma(b+\beta),$$

подставим в (52), получим

$$C'(t)e^{-\gamma(b+\beta)t} - C(t)e^{-\gamma(b+\beta)t}\gamma(b+\beta) + C(t)e^{-\gamma(b+\beta)t}\gamma(b+\beta) =$$

$$\gamma(a-\alpha),\ C'(t)e^{-\gamma(b+\beta)t} = \gamma(a-\alpha), \qquad C'(t) = \frac{\gamma(a-\alpha)}{e^{-\gamma(b+\beta)t}},$$

$$C''(t) = \gamma(a-\alpha)e^{\gamma(b+\beta)t},\ dC = \gamma(a-\alpha)e^{\gamma(b+\beta)t}dt,$$

$C(t) = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}e^{\gamma(b+\beta)t} + C_1$, тогда $p(t) = \left(\dfrac{a-\alpha}{b+\beta}e^{\gamma(b+\beta)t} + C_1\right)e^{-\gamma(b+\beta)t}$, или

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + c_1 e^{-\gamma(b+\beta)t}.$$

Окончательно, с учетом начальных условий, получаем

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}(1-e^{-\gamma(b+\beta)t})$$

или

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + p^*(1-e^{-\gamma(b+\beta)t}),$$

причем $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p^*$, т.к

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}(p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}(1-e^{-\gamma(b+\beta)t}) =$$

$$\lim_{t\to\infty} p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\lim_{t\to\infty}(1-e^{-\gamma(b+\beta)t}) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} = p^*.$$

Замечание. В дискретной модели Эванса рынок функционирует следующим образом: утром на рынке обнаруживается некоторое предложение S и спрос D. В зависимости от их значений цена начинает равномерно расти или убывать; если утром спрос был больше предложения, то возрастать, если предложение было больше спроса, то убывать. Предположим, что начальная цена была p_0, при этом $S(p_0) < D(p_0)$. За день она возрастает до некоторого значения p_1. На следующее утро предложение и спрос будут соответствовать этой цене p_1, при этом опять будет $S(p_1) < D(p_1)$, а цена будет возрастать и т.д. (рисунок 31).

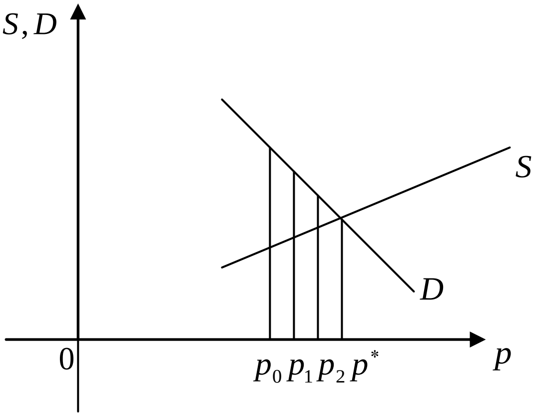

Рисунок 31-Равновесного решения в дискретной модели Эванса

В отличии от паутинообразной модели рынка, точка равновесия не переходится, то есть если цена была меньше равновесной, то она так и останется меньше, и весь процесс изображается слева от точки равновесия, а если цена была больше равновесной, то она так и останется больше, и весь процесс изображается справа от точки равновесия.

Пример. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 8 - 0.5p,\ S = 2 + 1.5p$, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности $\gamma = \dfrac{1}{2}$. В начальный момент времени цена товара была установлена в 5 д.е. Построить график и сделать выводы.

Решение. Увеличение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности $\gamma = \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{dp}{dt} = \gamma(D - S)$.

Подставим в это дифференциальное уравнение линейные зависимости спроса и предложения от цены, получим дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{dp}{dt} = (3 - p), \quad p(0) = 5.$$

Решим это дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{3-p} = dt, \qquad \int \frac{dp}{3-p} = \int dt, \qquad -\ln|3-p| = t - \ln|C|,$$

$-\ln\left|\frac{3-p}{C}\right| = t$, $\ln\left|\frac{3-p}{C}\right| = -t$, $3 - p = C \cdot e^{-t}$. Окончательно получаем общее решение дифференциального уравнения в виде $p(t) = 3 - C \cdot e^{-t}$. С учетом начальных условий получим частное решение $p(t) = 3 + 2 \cdot e^{-t}$.

Равновесная цена $p^* = \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{8-2}{0.5+1.5} = 3$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\left(3 + 2\cdot e^{-t}\right) = 3$. Причем $p(t) \to 3$ убывая, так как $p(0) > p^*$.

2.10 Уравнение Самуэльсона

Уравнение Самуэльсона моделирует связь между изменением цены p и неудовлетворенным спросом $D(p) - S(p)$, где $D(p)$ – функция спроса, $S(p)$ – функция предложения при цене p. Уравнение Самуэльсона имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = k\left(D(p) - S(p)\right), \tag{55}$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Изменение цены на товар пропорционально величине неудовлетворенного спроса на этот товар.

Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями

$$D(p) = a - bp, \quad S(p) = \alpha + \beta p, \tag{56}$$

где a, b, α, β – некоторые положительные числа.

С учетом (56) уравнение (55) примет вид

$$\frac{dp}{dt} = k(a - bp - \alpha - \beta p) = k(-\beta - b)p + k(a - \alpha) \tag{57}$$

Полученное уравнение (57) является линейным дифференциальным уравнением. Найдем решение соответствующего ему однородного уравнения. Имеем:

$$\frac{dp}{dt} = k(-\beta - b)p, \quad \frac{dp}{p} = k(-\beta - b)dt, \quad \ln|p| = k(-\beta - b)t + \ln|C|,$$

$$p(t) = C \cdot e^{k(-\beta - b)t}.$$

В качестве частного решения уравнения (57) можно использовать стационарное равновесное решение $p(t) = p^* = const$, где p^* - корень уравнения $D(p) = S(p)$. В этом случае обе части уравнения (55) будут равны нулю. Из уравнения (57) находим стационарное решение: $p^* = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$, рисунок. (32).

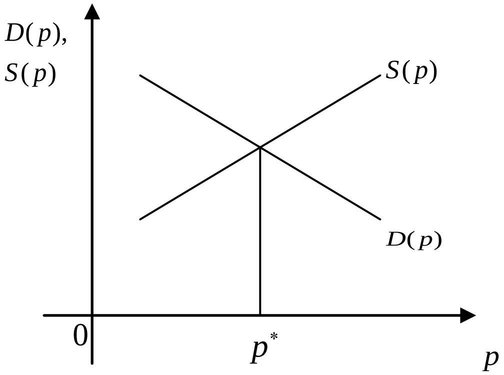

Рисунок 32-Стационарное решение

Тогда общее решение уравнения (57) имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C \cdot e^{k(-\beta - b)t}. \qquad (58)$$

Из уравнения (58) следует, что:

1) если $\beta > b$, то с течением времени интегральные кривые будут отдаляться от состояния равновесия p^* (рисунок 33);

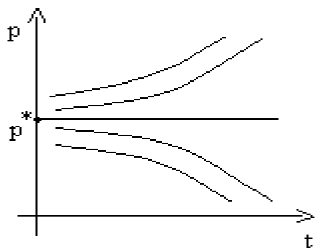

Рисунок 33-Интегральные кривые удаляющиеся от состояния равновесия

2) если $\beta = b$, то $p(t)$ $=const$ (рисунок 34)

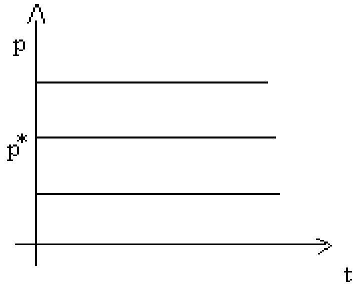

Рисунок 34-Цена постоянна во времени

3) если $\beta < b$, то с течением времени интегральные кривые p^* (рисунок 35) будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия

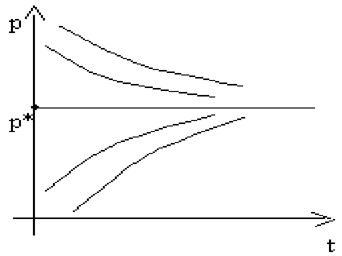

Рисунок 35-Интегральные кривые приближающиеся к состоянию равновесия

Пример. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид $D(p) = 19 + p + 4p'$, $S(p) = 28 - 2p + 3p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 20$.

Решение. Для нахождения равновесной цены приравняем правые части функции спроса и предложения $19 + p + 4p' = 28 - 2p + 3p'$ и получим дифференциальное уравнение с разделяющими переменными

$$p' = 9 - 3p \text{ или } \frac{dp}{dt} = 9 - 3p.$$

Разделим переменные: $\dfrac{dp}{9-3p}=dt$. Интегрируя обе части дифференциального уравнения $\displaystyle\int\frac{dp}{9-3p}=\int dt$, получим $-\dfrac{1}{3}\ln|9-3p|=t+\ln|C|$ или $9-3p=C\cdot e^{-3t}$. Откуда $p(t)=\dfrac{9-C\cdot e^{-3t}}{3}$.

Подставляя начальное условие, найдем C и частное решение задачи $p(t)=3+17e^{-3t}$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(3+17e^{-3t}\right)=3$, то имеем устойчивое равновесии. Заметим, что если $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$, то равновесная цена растет и имеет место инфляция.

2.11 Модель рынка с прогнозируемыми ценами

В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависимыми только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $p(t)$.

Пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены и ее производных:

$$D=3p''-p'-2p+18,$$

$$S=4p''+p'+3p+3.$$

Данные зависимости вполне реалистичны, действительно:

а) спрос усиливается темпом изменения цены. Если темп растет $(p''>0)$, то рынок увеличивает интерес к товару и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус;

б) предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при p'' в функции S больше, чем в D. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее p', входит в выражение для S со знаком плюс.

Пример. Требуется определить закон, устанавливающий зависимость цены от времени.

Решение. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D=S$, получим:

$$3p'' - p' - 2p + 18 = 4p'' + p' + 3p + 3,$$

$$p'' + 2p' + 5p = 15 \qquad (59)$$

Уравнение (59) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $p(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$p'' + 2p' + 5p = 0. \qquad (60)$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_1 = -1 + 2i,\ \ k_2 = -1 - 2i$ и, следовательно, общее решение уравнения (60) имеет вид

$$\tilde{p}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

В качестве частного решения неоднородного уравнения (59) возьмем решение $p = p^*$ - постоянную величину как установившуюся цену.

Подставим $p^* = const$ в уравнение (59), получим

$$(p^*)'' + 2(p^*)' + 5p^* = 15,\ \ p^* = 3.$$

Тогда общее решение уравнения (59) имеет вид:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Нетрудно видеть, что $p(t) \to p^* = 3$ при $t \to \infty$, то есть все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $p^* = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене p^* с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Можно привести частное решение этой задачи в двух вариантах.

Задача Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция ее изменения: $t = 0$, $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$.

Подставляя первое условие в $p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, получим

$$p(0) = C_1 + 3;\ \ 4 = C_1 + 3, \text{ откуда } C_1 = 1,$$

то есть получили

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \qquad (61)$$

Дифференцируя это выражение, имеем:

$$p'(t) = e^{-t}\left[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t\right].$$

Используем второе условие задачи Коши:

$$p'(0) = 2C_2 - 1,\ 2C_2 - 1 = 1, \text{ откуда } C_2 = 1.$$

Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$$

Смешанная задача. Пусть в начальный момент времени известны цены и спрос: $t = 0, p(0) = 4, D(0) = 30$. Поскольку первое начальное условие такое же, как и в предыдущем случае, то имеем решение:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Тогда производные функции $p(t)$ выражаются формулами:

$$p'(t) = e^{-t}\left[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t\right],$$

$$p''(t) = e^{-t}\left[(-4C_2 - 3)\cos 2t - (3C_2 - 4)\sin 2t\right].$$

Отсюда $p'(0) = 2C_2 - 1$ и $p''(0) = -4C_2 - 3$

Подставляя эти равенства, а также $p(0) = 4$ и $D(0) = 30$ в выражение

$$D = 3p'' - p' - 2p + 18$$

получим $C_2 = -2$. Тогда решение данной задачи имеет вид:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - 2\sin 2t).$$

Задачи для самостоятельного решения
(к подразделам 2.8-2.11)

1. Дана производственная функция $Y = 5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}e^{0.03t}$. Норма выбытия капитала составляет 0,08. Численность занятых растет на 2% в год. Норма сбережения составляет 25%. Найти устойчивый уровень капиталовооруженности единицы труда с постоянной эффективностью, устойчивый уровень удельного дохода, инвестиций, потребления. Соответствует ли данная норма сбережения “золотому правилу”? Если нет, то какой она должна стать для этого? Каков устойчивый уровень удельного дохода, инвестиций, потребления по “золотому правилу”?

2. Построить модель Солоу для случая, когда ВВП задана линейно-однородной CES-функцией: $Y = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, где $A > 0,\ 0 \le \gamma \le 1,\ \rho > -1$.

3. Дана производственная функция $Y = 10K^{0,2}L^{0,4}$. Норма накопления $\rho = 0{,}1$, годовое выбытие капитала составляет 0,2, а годовой прирост трудовых ресурсов составляет 0,15. Определить значение капиталовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории.

4. Дана производственная функция $Y = 5K^{0,35}L^{0,45}$. Норма выбытия капитала составляет 0,15. Численность занятых растет на 1% в год. Норма сбережения составляет 25%. Показать, что оптимальная норма накопления в стационарном режиме равна коэффициенту эластичности по капиталу.

5. Дана производственная функция $Y = \dfrac{K^2 + L^2}{K}$ Норма выбытия капитала составляет 0,1. Численность занятых растет на 2% в год. Норма сбережения составляет 20%. Найти динамику капиталовооруженности, устойчивый уровень удельного дохода, потребления и инвестиций.

6. Дана производственная функция $Y = \dfrac{K^2 + L^2}{K}$ Норма выбытия капитала составляет 0,15. Численность занятых растет на 2,5% в год. Норма сбережения составляет 20%. Найти стационарное решение, динамику капиталовооруженности, устойчивый уровень удельного дохода.

7. Дана производственная функция $Y = 2\sqrt{KLe^{0,1t}}$. Норма выбытия капитала составляет 0,06. Численность занятых растет на 2% в год. Норма сбережения составляет 20%. Найти устойчивый уровень капиталовооруженности единицы труда с постоянной эффективностью, устойчивый уровень удельного дохода, инвестиций, потребления. Соответствует ли данная норма сбережения “золотому правилу”? Если нет, то какой она должна стать для этого? Каков устойчивый уровень удельного дохода, инвестиций, потребления по “золотому правилу”?

8. Дана производственная функция $Y = K + L$. Найти динамику капиталовооруженности, стационарное значение капиталовооруженности и удельное потребление в стационарном режиме.. Годовое выбытие капитала составляет b, годовой прирост трудовых ресурсов составляет a, норма накопления равна ρ. Каким должно быть соотношение между b и a, чтобы удельное потребление росло, было постоянным, убывало?

9.Дана производственная функция $Y = \frac{K^2 - L^2}{L}$. Найти, стационарное значение капиталовооруженности и удельное потребление в стационарном режиме. Годовое выбытие капитала составляет b =0,1, годовой прирост трудовых ресурсов составляет a =0,1, норма накопления равна ρ. При каком значении нормы накопления удельное потребление в стационарном режиме максимально?

10.Дана производственная функция $Y = K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}} e^{0,02t}$. Найти динамику капиталовооруженности и оптимальную норму накопления в стационарном режиме. Годовое выбытие капитала составляет b, годовой прирост трудовых ресурсов составляет a, норма накопления равна ρ. Значения b, a, ρ задать самостоятельно.

11. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 5 - 3p,\ S = 2 + 2p$, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности γ =2. В начальный момент времени цена товара была установлена в 5 д.е. Построить график и сделать выводы.

12. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 19 - p,\ S = 5 + p$. Изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением. В течение 3-х лет цена изменилась с 3 д.е. до 6 д.е. Какой будет цена через два года? Решить эту же задачу при условии, что цена за 3 года изменилась с 5 д.е. до 8 д.е. Построить графики и сделать выводы.

13. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 15 - 0.5p,\ S = 5 + 0.5p$. Известно, что через год цена изменилась до 6 д.е., а через три года – до 9 д.е. Определить первоначальную цену и через какой промежуток времени, цена станет максимально близка к равновесной? Построить график и сделать выводы.

14. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 6 - 4p,\ S = 3 + 3p$, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности γ=0,5. В начальный момент времени цена товара была установлена в 4 д.е. Построить график и сделать выводы.

15. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 15 - 3p,\ S = 5 + 3p$. Изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением. В течение недели цена изменилась с 2 д.е. до 4 д.е. Какой была цена в середине недели?

16. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 6 - p,\quad S = 4 + p$. Известно, что через год цена изменилась до 7 д.е., а через два года – до 9 д.е. Определить первоначальную цену и через какой промежуток времени, цена станет максимально близка к равновесной?

17**.** Найти закон между изменением цены и неудовлетворенным спросом, если известно, что увеличение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности превышения. Спрос и предложение задаются функциями:

а) $D(p) = 5 - 4p$, $S(p) = 3 + 6p$;

б) $D(p) = 3 - p$, $S(p) = 3 + 2p$.

18. Цена товара в начале недели составляла 36 д.е., а через t недель – $p(t)$. Спрос определяется уравнением $D(p) = 120 - 2p + 5p'$, а предложение – $S(p) = 3p - 30 + 50p'$. Найти закон изменения цены, при котором для каждого значения t сохраняется условие равновесия. Является ли равновесная цена устойчивой или равновесная цена растет и имеет место инфляция?

19. Найти динамику равновесной цены p на товар, если прогноз спроса и предложения описываются следующими соотношениями:

а) $D(t) = p'' - 2p' + 10,\ S(t) = 2p'' + 2p' + 4p + 4$;

б) $D(t) = p'' - 2p' + 36,\ S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6$;

в) $D(t) = p'' + 4p' + 2p + 8,\ S(t) = 2p'' + 2p' + 3p + 6$.

20. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид $D(p)$ и $S(p)$. Найти зависимость равновесной цены от времени, если в момент времени $t = 0$ цена определялась значением $p(0) = p_0$. Проверить является ли равновесная цена устойчивой и построить график.

а) $D(p) = 50 - 2p - 4p',\quad S(p) = 70 + 2p - 5p',\quad p_0 = 10$;

б) $D(p) = 30 - p - 4p',\quad S(p) = 20 + p + p',\quad p_0 = 7$;

в) $D(p) = 100 - p - 2p',\quad S(p) = 140 + p - 3p',\quad p_0 = 5$;

г) $D(p) = 54 - 4p - 3p',\quad S(p) = 26 + 3p + 2p',\quad p_0 = 6$;

д) $D(p) = 100 - 3p + 4p',\quad S(p) = 120 + 2p + p',\quad p_0 = 10$.

Список использованных источников

1Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – АНХ при правительстве РФ: Москва, 2001.

2 Колемаев В. А. Экономико – математическое моделированиею Моделирование макроэкономических процессов и систем: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2005.

3 Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998.

4 Федосеев В. В., Гармаш А. н., Орлова И. В. Экономико – математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. Федосеева В. В. – 2- е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2005.

5 Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006.

6 Багриновский К. А. . Матюшок В. М. Экономико - математические методы имодели: Учебное пособие. – М.:Изд – во РУДН, 1999.

7 Замков Щ. Щ., Толстопятенко А. В.,Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Издательство “ДИС”, 1997.

8 Кундышева Е. С. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие / Под науч. ред. проф. Б. А. Суслакова. – М: Издательство – торговая корпорация «Дашков и К», 2004.

9 Просветов Г. И. Математические модели в экономике: Учебно – методическое пособие. – М.: Издательство РДЛ, 2005.

10 Орехов Н. А., Левин А. Г., Горбунов Е. А. Математические методы и модели в экономике: Учебное пособие для вузов / Под ред. проф. Орехова Н. А. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2004.

11 Минюк С. А. Математические методы и модели в экономике: Учебное пособие /Минюк С. А., Ровба Е. А., КузьмичК. К. – Минск.: ТетраСистемс, 2002.

12 Монахов А. В. Математические методы анализа экономики. – СПб: Питер, 2002.

13 Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.,Шандра И. Г. Математика в экономике: Учебник в 2 – х частях. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 1999.

14 Шишов А. Л. Макроэкономика: Учекбник. – М.: Ассоциация авторов и издателей “ТАНДЕМ”, Издательство ЭКМОС, 1997.

15 Кремер Н. Ш., Путко Б. Ф., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Под ред. Проф. Кремера Н. Ш. – 2- е изд., перераб. и доп. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.

16 Малыхин В. И. Математика в экономике: Учебное пособие. – М.: ИНФРА – М, 2001.

17 Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроэкономика: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2007.