Тема 3.

Методы представления знаний.

Элементы теории нечёткких множеств для представления знаний

Элементы теории нечётких множеств и нечёткой логики для представления знаний

Множество — это совокупность объектов, обладающих некоторым **общим свойством**.

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_n),\ B=(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

При этом любой объект:

Либо принадлежит множеству $a_2 \in A,\ b_3 \in B$

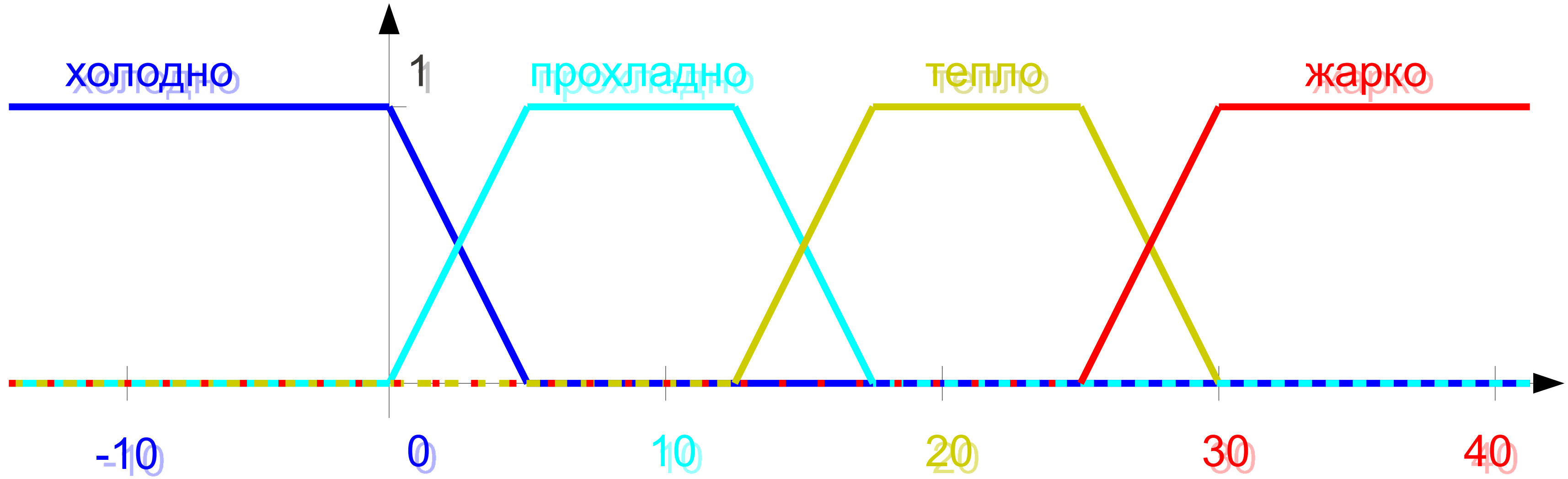
Либо не принадлежит $b_1 \notin A,\ a_i \notin B\ \forall i=1,2,\dots,n$

Однако, для большинства процессов в реальных сложных системах подобный «булев» подход приводит к неоправданной **идеализации математического описания**.

Понятие нечёткого множества основывается на предположении о том, что любой элемент лишь **в некоторой степени принадлежит данному множеству**.

Поэтому одним из основных способов математического описания нечёткого множества является определение степени такой принадлежности некоторым числом, например, из интервала [0, 1].

Границы этого интервала (0 или 1) предсталяют собой «классический» случай строгой принадлежности элемента множеству.



Математический аппарат **нечётких множеств** (***fuzzy sets***) и **нечёткой логики** (***fuzzy logic***) является обобщением классической теории множеств и классической формальной логики.

Основателем теории ночётких множеств и нечёткой логики считается
Лотфи (Лютфи) Аскер Заде (*Lotfi Zadeh*)

Одним из основных способов математического описания нечёткого множества является определение степени такой принадлежности некоторым числом. Для этого обычно используется интервал [0,1]

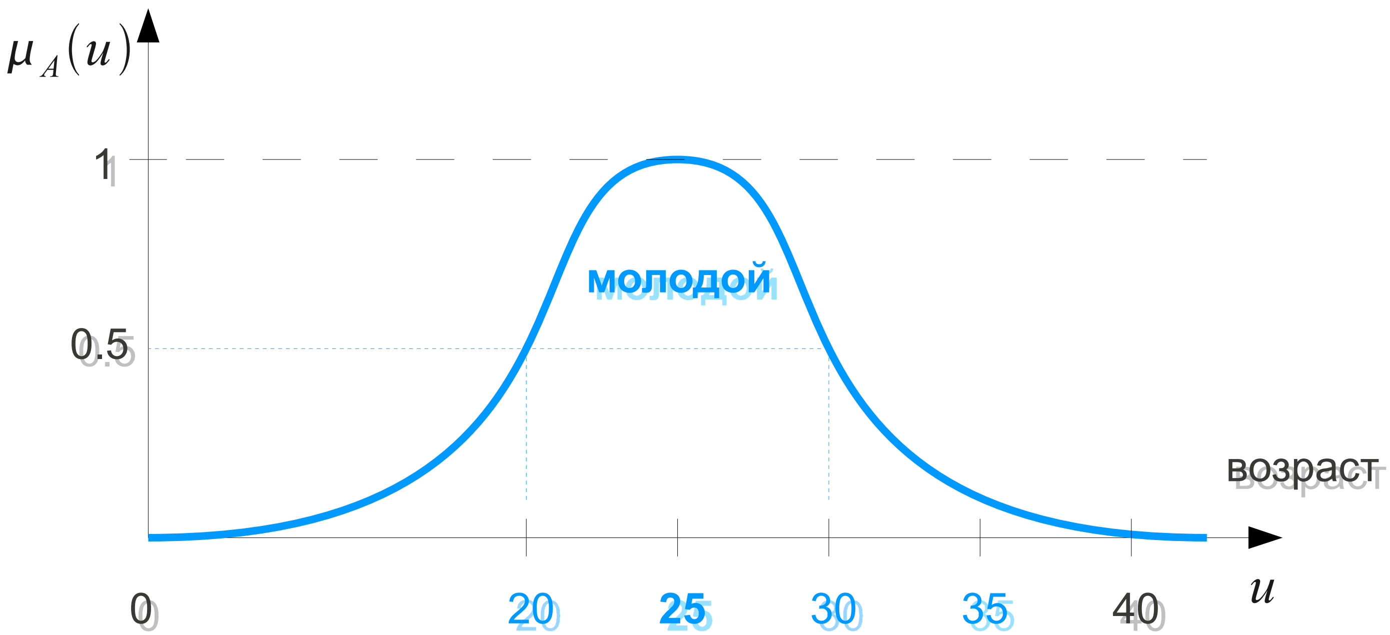
Пусть U – некоторое множество элементов.

Нечёткиммножеством $A \subseteq U$ называют совокупность пар вида $(u, \mu_A(u))$,

где $u \in U$,

$\mu_A(u): U \to [0,1]$ - функция, которую называют

функцией принадлежности или характеристической функцией.



Обычные множества составляют подкласс класса нечётких множеств, т.е. функцией

$$B \subset U$$

принадлежности обычного множества является функция:

$$\mu_B(u) = \begin{cases} 1, u \in B \\ 0, u \notin B \end{cases}$$

Нечёткое множество называют **пустым**, если его функция принадлежности равна нулю на всём множестве *U*, т.е.

$$\mu_{\varnothing}(u) = 0, \forall u \in U$$

Универсальное множество *U* описывается функцией принадлежности вида:

$$\mu_U(u) = 1, \forall u \in U$$

Носителем нечёткого множества *A* (***supp A***) с функцией принадлежности $\mu_A(u)$ называют множество вида:

$$supp\,A = \{u \in U \,|\, \mu_A(u) > 0\}$$

Высотой нечёткого множества *A* называется величина $\sup\limits_{u \in U} \mu_A(u)$ (супремум!)

Нечёткое множество *A* **нормально**, если его высота равна 1

Если его высота строго меньше 1, то оно называется **субнормальным.**

Нормализация непустого субнормального нечёткого множества выполняется по формуле:

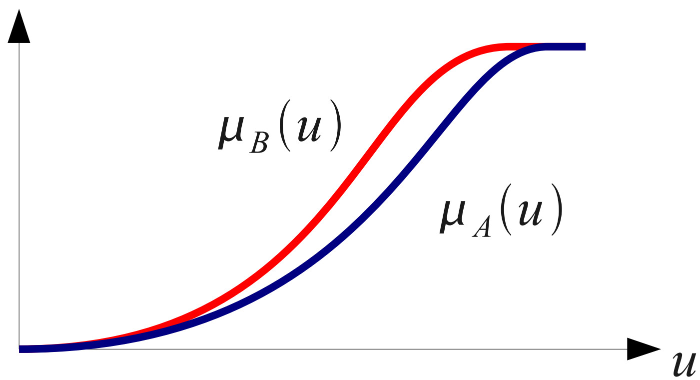
$$\mu'_A(u) = \frac{\mu_a(u)}{\sup\limits_{u \in U} \mu_A(u)}$$

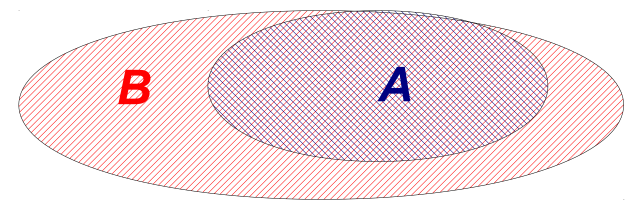
Нечёткое множество **унимодально**, если $\mu_A(u) = 1$ **только на одном** $u \in U$

Точки $u \in U$, для которых $\mu_A(u) = 0.5$, называются **точками перехода** нечёткого множества *A*

Нечёткое множество *A* **содержится** в нечётком множестве *B* ($A \subset B$), если для любого элемента $u \in U$ функция принадлежности множеству *A* будет меньше или равна функции принадлежности множеству *B:*

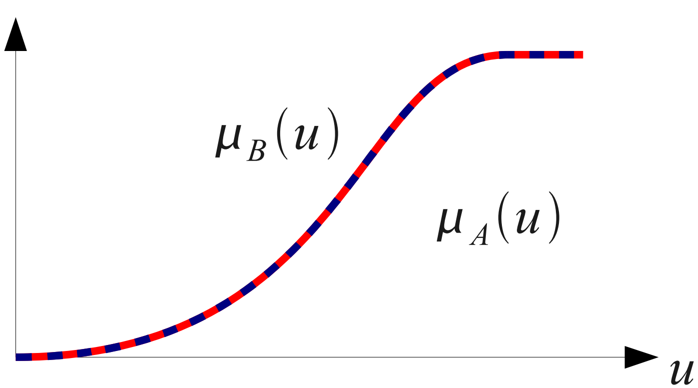
$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; \mu_A(u) \le \mu_B(u) \;\; \forall\, u \in U$$

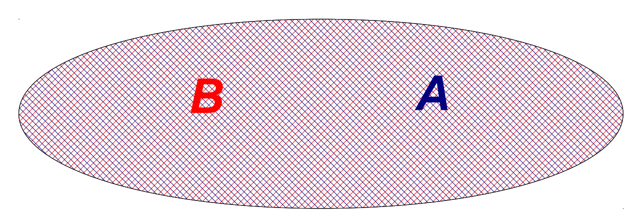




Два нечётких множества *A* и *B* **равны**, если функции принадлежности этим множествам равны для всех $u \in U$:

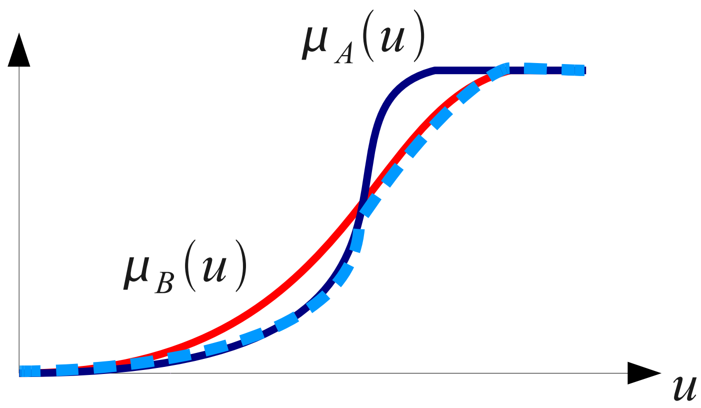
$$A = B \;\Leftrightarrow\; \mu_A(u) = \mu_B(u) \;\; \forall\, u \in U$$

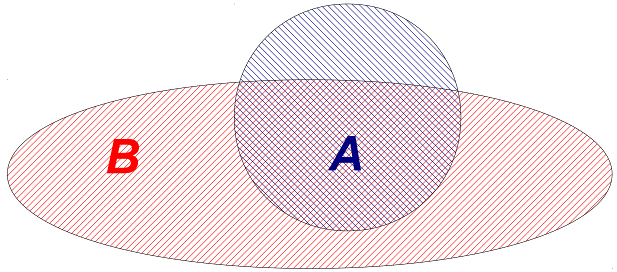




Пересечением нечётких множеств *A* и *B* является нечёткое множество, содержащееся одновременно в *A* и *B*:

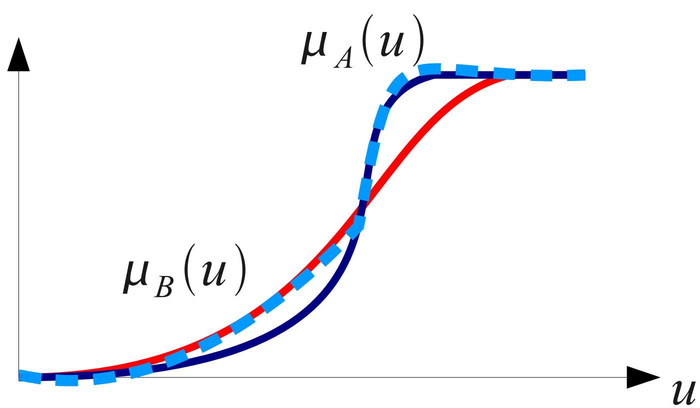
$$\mu_{A\cap B}(u)=\min(\mu_A(u),\mu_B(u))$$

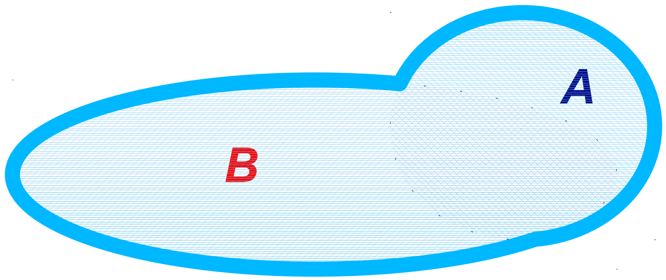




Объединением нечётких множеств *A* и *B* является «наибольшее» нечёткое множество, содержащее одновременно *A* и *B*:

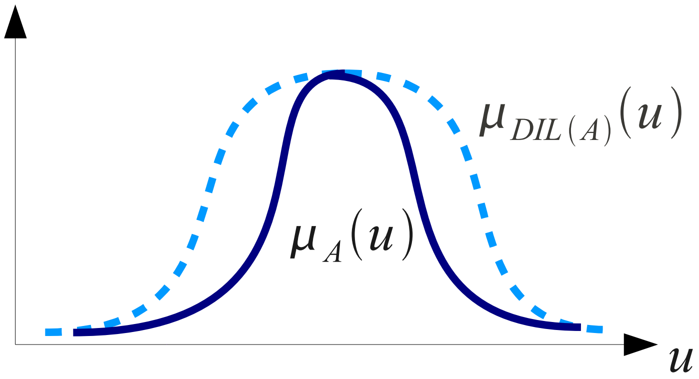
$$\mu_{A\cup B}(u)=\max(\mu_A(u),\mu_B(u))$$





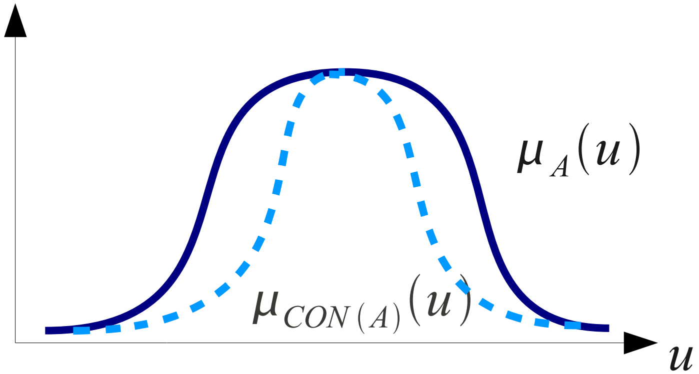
Растяжение (размытие) нечёткого множества *A* является нечёткое множество, полученное извлечением квадратного корня из функции принадлежности (возведение в степень меньше 1):

$$\mu_{DIL(A)}(u) = \mu_A(u)^{0.5}$$



Концентрированием нечёткого множества *A* является нечёткое множество, полученное возведением функции принадлежности в степень (больше 1):

$$\mu_{CON(A)}(u) = \mu_A(u)^2$$

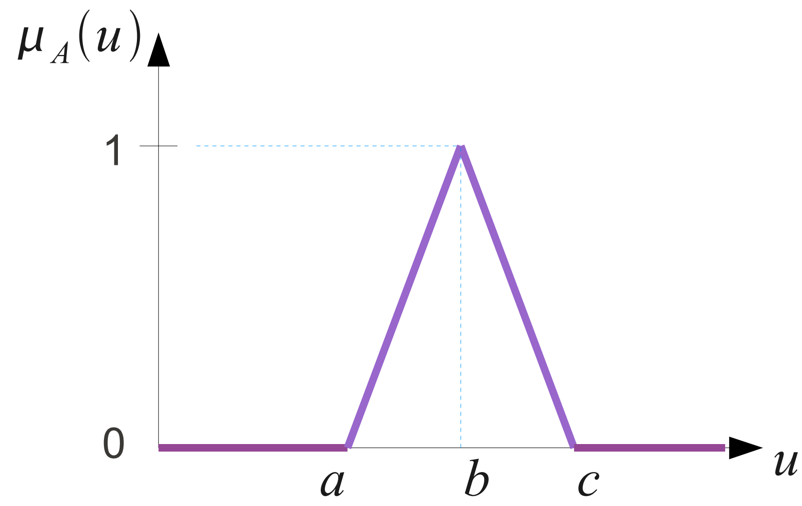


Некоторые виды функции принадлежности:

- Треугольная функция :

задаётся параметрами *a, b, c*
имеет вид:

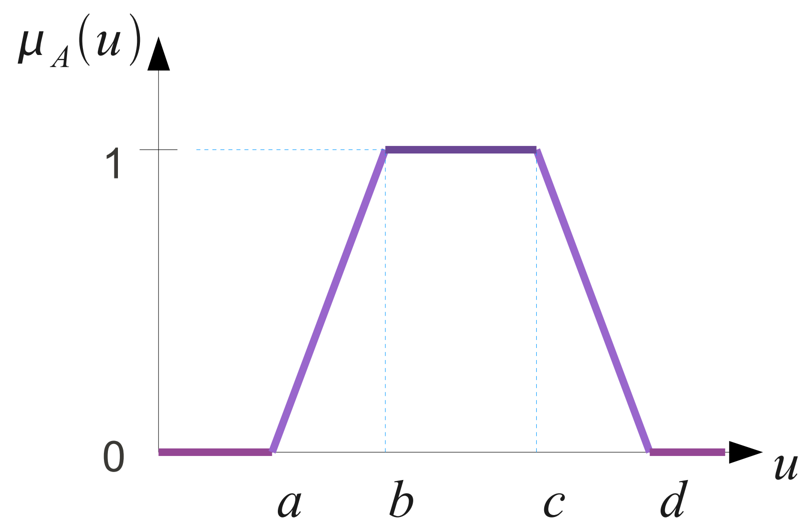
$$\mu_A(u)=\begin{cases}1-\dfrac{b-u}{b-a}, & a\le u\le b\\[2mm] 1-\dfrac{u-b}{c-b}, & b\le u\le c\\[2mm] 0, \quad u<a, & u>c\end{cases}$$



- Трапецеидальная функция:

задаётся параметрами *a, b, c, d*
имеет вид:

$$\mu_A(u)=\begin{cases}1-\dfrac{b-u}{b-a}, & a\le u< b\\[2mm] 1, & b\le u\le c\\[2mm] 1-\dfrac{u-c}{d-c}, & c< u\le d\\[2mm] 0, \quad u<a, & u>d\end{cases}$$



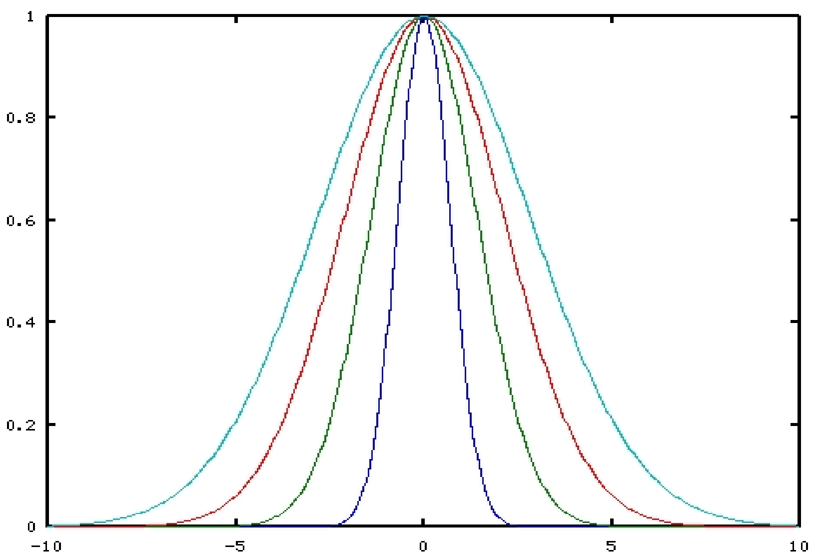
• Гауссова функция принадлежности:

$$\mu_A(u) = e^{-\left(\frac{u-c}{\sigma}\right)^2}$$

где коэффициенты:

- c — среднее значение диапазона
- σ - «дисперсия», характеристика величины разброса значений

График такой функции выглядит следующим образом:



Параметры функции для
Каждого графика:

$c=0;$

$\sigma=1;$

$\sigma=2;$

$\sigma=3;$

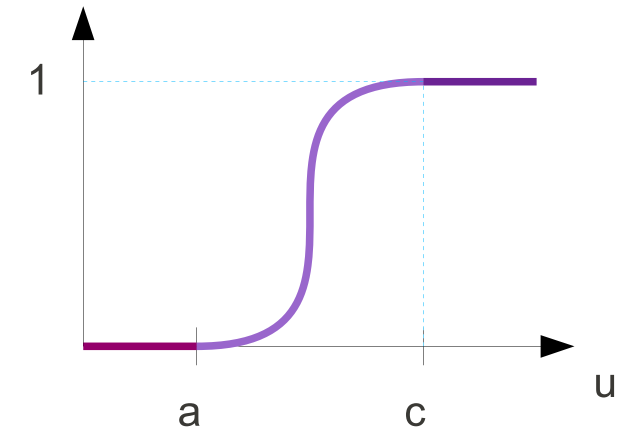
$\sigma=4;$

• Квадратичные функции

Классы функций принадлежности (квадратичные):

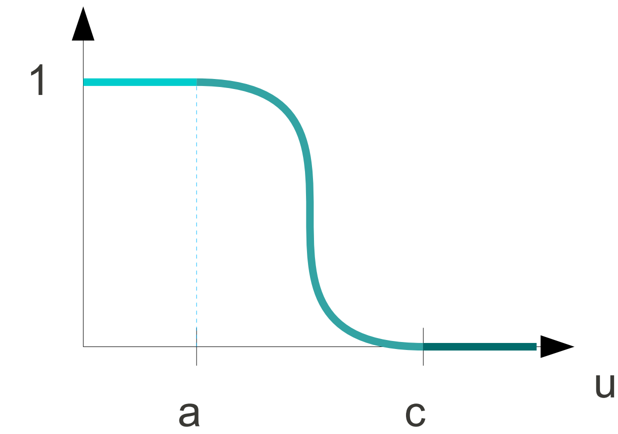
- Класс ***S :***

$$
\begin{aligned}
&S(u,a,c)=0, && u<a,\, u\in U\\
&S(u,a,c)=2\cdot\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^2, && a<u\le(a+c)/2\\
&S(u,a,c)=1-2\cdot\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^2, && (a+c)/2<u\le c\\
&S(u,a,c,)=1, && c<u
\end{aligned}
$$



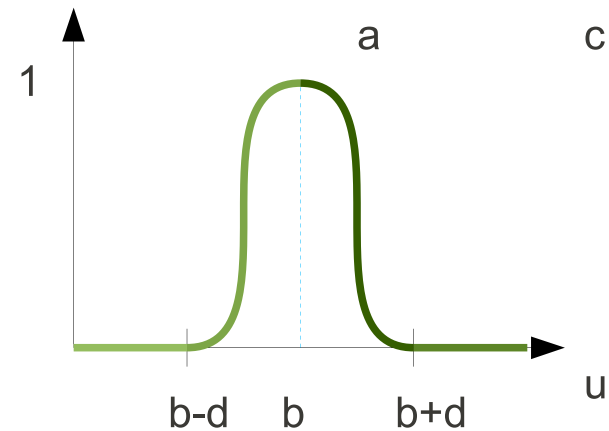
- Класс ***Z :***

$$Z(u,a,c)=1-S(u,a,c)$$



- Класс ***П :***

$$
\begin{aligned}
&\Pi(u,d,b)=S(u,b-d,b), \quad u\le b\\
&\Pi(u,d,b)=Z(u,b,b+d), \quad u>b
\end{aligned}
$$



Лингвистическая и нечеткая переменная:

Лингвистическая переменная характеризуется набором

$$(x, T(x), U, G, M)$$

где

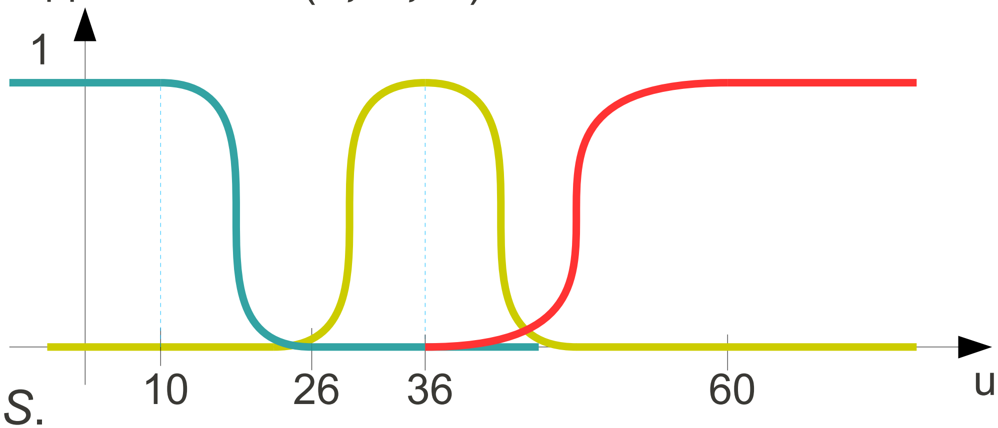
- *x* — название переменной;
- *T(x)* — терм-множество переменной *x*, т.е. множество названий лингвистических значений переменной *x*;

  Каждое из них является переменной *X* со значениями из универсального множества *U* ;
- *G* — синтаксическое правило, порождающее назания значений переменной *x*; (обычно в форме грамматики)
- *M* — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечёткой переменной *X* её смысл *M(X)*.

Пример

описания нечётких множеств температуры воды (*холодная*, *тёплая*, *горячая*) с помощью квадратичных функций принадлежности (***Z, П, S***) :

- Холодная: *Z(u, 10, 26)*;
- Тёплая: *П(u, 12, 36);*
- Горячая *S(u, 37, 60);*



Пояснения:

- Функция *Z* определяется как 1 — *S*.
  Тогда *S(u, 10, 26)* равна нулю до 10, возрастает от 10 до 26, а с 26 равна 1.
  Поскольку *Z* = 1 — *S*, то поведение *Z* противоположное:
  До 10 градусов *Z* = 1, с 10 до 26 функция убывает, после 26 градусов Z = 0.

- Функция *П(u, 12, 36)* определяет диапазон значений соответствия температуры воды термину «теплая», т.е. она возрастает с со значения 36-12=24 градуса до 36, а с 36 убывает до 48 градусов. До 24 и после 48 *П(u, 12, 36)* = 0;

- Функция *S(u, 37, 60)* задаёт принадлежность значений температур множеству, обозначенным термином «горячая вода» в диапазоне со значения 37, где функция начинает расти, но еще меньше, чем *П(u, 2, 36).* До температуры 60 градусов функция S возрастает и далее имеет значение 1.

Пример управления мобильным роботом

Лингвистические переменные:

- ДИСТАНЦИЯ
- НАПРАВЛЕНИЕ

Для переменной «ДИСТАНЦИЯ» определим термы:

- «ДАЛЕКО»
- «СРЕДНЯЯ»
- «БЛИЗКО»
- «ОЧЕНЬ БЛИЗКО»

Для физической реализации необходимо определить точные значения термов этой переменной.

Пусть переменная «ДИСТАНЦИЯ» принимает значения всей действительной числовой оси.