Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Исчисление высказываний

Лекция 4

Система аксиом и правил вывода

Используя понятие формального исчисления, определим *исчисление высказываний* (ИВ).

Алфавит ИВ состоит из букв x, y, z, u, v, возможно с индексами (которые называются *пропозициональными переменными*), *логических символов* (связок) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, а также *вспомогательных* символов $($, $)$.

Множество формул ИВ определяется индуктивно:

а) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

б) если φ, ψ - формулы ИВ, то $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \ \rightarrow \ \psi)$ – формулы ИВ;

в) выражение является формулой ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов "а" и "б".

Таким образом, любая формула ИВ строится из пропозициональных переменных с помощью связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

Подформулой ψ формулы φ ИВ называется подслово φ, являющееся формулой ИВ.

Под *длиной формулы* φ будем понимать число символов, входящих в слово φ.

Аксиомами ИВ являются следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИВ:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;
3. $(\varphi \land \psi) \to \varphi$;
4. $(\varphi \land \psi) \to \psi$;
5. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \land \chi)))$;
6. $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$;
7. $\varphi \to (\psi \lor \varphi)$;
8. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to x) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$;
9. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Указанные формулы называются *схемами аксиом ИВ.* При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается *частный случай схемы аксиом.*

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad \delta = 1, \\ \bar{x}, & \text{если} \quad \delta = 0 \end{cases}$$

Единственным *правилом вывода в ИВ* является *правило заключения (modus ponens):* если φ и $\varphi \to \psi$ - выводимые формулы, то ψ - также выводимая формула. Символически это записывается так:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Говорят, что формула φ *выводима в ИВ из формул* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (обозначается $\varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash \varphi$ *),* если существует последовательность формул $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула либо является аксиомой, либо принадлежит множеству формул $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, называемых *гипотезами,* либо получается из предыдущих по правилу вывода. Выводимость формулы φ из $\emptyset$ *(*$\vdash \varphi$*)* равносильна тому, что φ - теорема ИВ или доказуемая формула $ИП^{\Sigma}$.

Пример

Покажем, что $\vdash \varphi \to \varphi$.

Квазивыводом в ИВ формулы φ *из формул* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ называется последовательность формул $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула, либо принадлежит множеству формул $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, либо выводима из предыдущих.

Замечание 1. Если существует квазивывод в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, то φ выводима в ИВ из формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Примеры

Покажем, что $\varphi, \psi \vdash \varphi \land \psi$.

Покажем, что $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

Теорема о дедукции в ИВ

Теорема (о дедукции). Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi, \psi$ – формулы ИВ. Тогда

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_m, \vdash \varphi \to \psi.$$

Примеры

Покажем, что $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.

Покажем, что $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.

Теорема о замене в ИВ

Формулы φ и ψ назовем ***эквивалентными*** (обозначим $\varphi \equiv \psi$), если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$.

Замечание . Для любых формул φ и ψ ИВ

$$\varphi \equiv \psi \iff \vdash \varphi \to \psi \text{ и } \vdash \psi \to \varphi.$$

Утверждение 1. Отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности на множестве формул ИВ, т.е. для любых формул φ, ψ, χ ИВ:

a) $\varphi \equiv \varphi$;

b) $\varphi \equiv \psi \;\Rightarrow\; \psi \equiv \varphi$;

c) $\varphi \equiv \psi, \psi \equiv x \;\Longrightarrow\; \varphi \equiv x$.

Утверждение 2. Для любых формул $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ ИВ таких, что $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, имеют место эквивалентности:

1. $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$,
2. $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2$,
3. $\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \psi_1 \to \psi_2$,
4. $\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$.

Теорема (о замене). Пусть φ - формула ИВ, ψ - ее подформула, φ' получается из φ заменой некоторого вхождения ψ на формулу ψ' ИВ и $\psi \equiv \psi'$. Тогда $\varphi \equiv \varphi'$.

Свойства выводимых и эквивалентных формул ИВ

Утверждение 3. Пусть φ, ψ, χ – формулы ИВ. Тогда

1. $\vdash \varphi \to \varphi$;
2. $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;
3. $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;
4. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;
5. $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (свойство транзитивности);

Свойства выводимых и эквивалентных формул ИВ

Утверждение 3. Пусть φ, ψ, χ – формулы ИВ. Тогда

6. $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \to (\varphi \to \chi)$ (свойство перестановочности посылок);

7. $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \varphi \wedge \psi \to \chi$ (свойство соединения и разъединения посылок);

8. $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$ (свойство контрапозиции).

Основные эквивалентности исчисления высказываний

Теорема 3. Пусть φ, ψ, χ - формулы ИВ. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

- $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi, \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$ (законы идемпотентности);
- $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi, \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ (законы коммутативности);
- $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi), (\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ (законы ассоциативности);
- $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (законы дистрибутивности);

Основные эквивалентности исчисления высказываний

Теорема 3.

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (законы де Моргана);
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (закон двойного отрицания);
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$;
- $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Теорема. Для любой формулы φ ИВ существует ДНФ (КНФ) ψ ИВ такая, что $\varphi \equiv \psi$.

Полнота и непротиворечивость исчисления высказываний

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ИВ называется тождественно истинной (обозначается $\vDash \varphi$), если $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ – тождественно истинная формула, как формула алгебры высказываний.

Теорема (о полноте). Формула φ ИВ доказуема тогда и только тогда, когда φ тождественно истинна:

$$\vdash \varphi \iff \vDash \varphi.$$

Теорема. (о непротиворечивости). ИВ непротиворечиво.

Схема аксиом называется ***независимой*** в исчислении, если хотя бы один ее частный случай не доказуем в исчислении без этой схемы.

Теорема. Схемы аксиом ИВ независимы.