Тема 4.

Методы распознавания образов

Нейронные сети

- Осовский С. **Нейронные сети для обработки информации** / Пер. с польского И.Д. Рудинского - М.: Финансы и статистика, 2002

- Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. **Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы** / Пер. с польского И.Д. Рудинского. - М.: Горячая линиия - Телеком, 2006

Нейронный сети (НС) — это раздел ИИ, в котором для обработки сигналов используются явления, аналогичные происходящим в нейронах живых существ.

Важнейшая особенность сети, свидетельствующая о её широких возможностях и огромном потенциале, состоит в **параллельной обработке** информации всеми звеньями.

При огромном количестве межнейронных связей это позволяет значительно ускорить процесс обработки информации. Во многихслучаях становится возможным преобразование сигналов в реальном времени.

Кроме того, при большом количестве межнейронных соединений сеть приобретает **устойчивость к ошибкам**, возникающих на некоторых линиях. Функции повреждённых связей берут на себя исправные линии, в результате чего деятельность сети не претерпевает существенных возмущений.

Другое не менее важное свойство — **способность к обучению и обобщению накопленных знаний**.

НС обладает чертами ИИ. Натренированная на ограниченном множестве данных сеть способна обобщать полученную информацию и показывать хорошие результаты на данных, не использовавшихся в процессе обучения.

ИНС в практических приложениях, как правило, используются в качестве **подсистемы управления** или в**ыработки решений**, передающей исполнительный сигнал другим подсистемам, имеющим иную методологическую основу.

Функции, вполняемые ИНС подрязделяются на несколько групп:

1. Аппроксимация
2. Классификация и распознавание образов
3. Прогнозирование
4. Идентификация и оценивание
5. Ассоциативное управление

Аппроксимирующая сеть играет роль универсального аппроксиматора функции нескольких переменных, который реализует нелинейную функцию вида

$$y = f(x)$$

где *x* – входной вектор, а *y* – реализованная функция нескольких переменных. Множество задач моделирования, идентификации, обработки сигналов удаётся сформулировать в аппроксимационной постановке.

Для **классификации и распознавания** образов сеть накапливает в процессе обучения знания об основных свойствах этих образов, таких, как геометрическое отображение структуры образа, распределение главных компонентов, или о других характеристиках.

При обобщении акцентируются отличия образов друг от друга, которые и составляют основу для выработки классификационных решений.

В области **прогнозирования** задача сети формулируется как предсказание будущего поведения системы по имеющейся последовательности её предыдущих состояний.

По информации о значениях переменной x в моменты времени, предшествующие прогнозированию, сеть вырабатывает решение о том, чему должно быть равно оцениваемое значение исследуемой последовательности в текущий момент времени.

В задачах управления динамическими процессами НС выполняет, как правило, несколько функций:

1. Представляет собой нелинейную модель процесса и идентифицирует его основные параметры, необходимые для выработки соответствующего управляющего сигнала.

2. Сеть выполняет функции следящей системы, отслеживает изменяющиеся условия окружающей среды и адаптируется к ним. Важное значение имеет классификация текущего состояния и выработка решений о дальнейшем развитии процесса.

В задачах **ассоциации** НС выступает в роли **ассоциативного запоминающего устройства**.

Выделяют типы памяти:

- **автоассоциативного** типа: взаимосвязи охватывают только конкретные компоненты входного вектора
- **гетероассоациативного** типа, с помощью которой сеть определяет взаимосвязи различных факторов.

Применяется для решения **задач восстановления образов** из зашумлённых или повреждённых данных.

Различные способы объединения нейронов между собой и организации их взаимодействия порождают различные типы сетей.

Каждый тип сети тесно связан с соответствующим методом подбора весов межнейронных связей (**методом обучения**).

Среди множества существующих видов НС можно выделить наиболее важнейшими являются:

- Многослойный перцептрон (персептрон)
- Радиальные сети RBF
- Сети с самоорганизацей в результате конкуренции нейронов
- сети с самоорганизацией корреляционного типа
- Рекуррентные сети (с обратной связью)
- Нечёткие нейронные сети (функционирование на принципах нечёткой логики)

Биологические основы функционирования нейрона

Тело нервной клетки называется «**сомой**», внутри которого располагается ядро. Из сомы выходят многочисленные отростки, играющие ключевую роль в его взаимодействии с другими нервными клетками.

Выделяют два типа отростков:

- **Дендриты** — многочисленные тонкие, густо ветвящиеся
- **Аксон** — толстый, расщепляющйся на конце.

Входные сигналы поступают в клетку через **синапсы**, тогда как

выходной сигнал отводится **аксоном** через его многочисленные нервные окончания, называемые колатералами.

Колатералы контактируют с **сомой и дендритами** других нейронов, образуя очередные синапсы.

Синапсы отличаются друг от друга размерами и возможностью концентрации нейромедиатора вблизи своей оболочки, в результате чего импульсы одинаковой величины, поступающие в клетку через различные синапсы, могут возбуждать её разной степени.

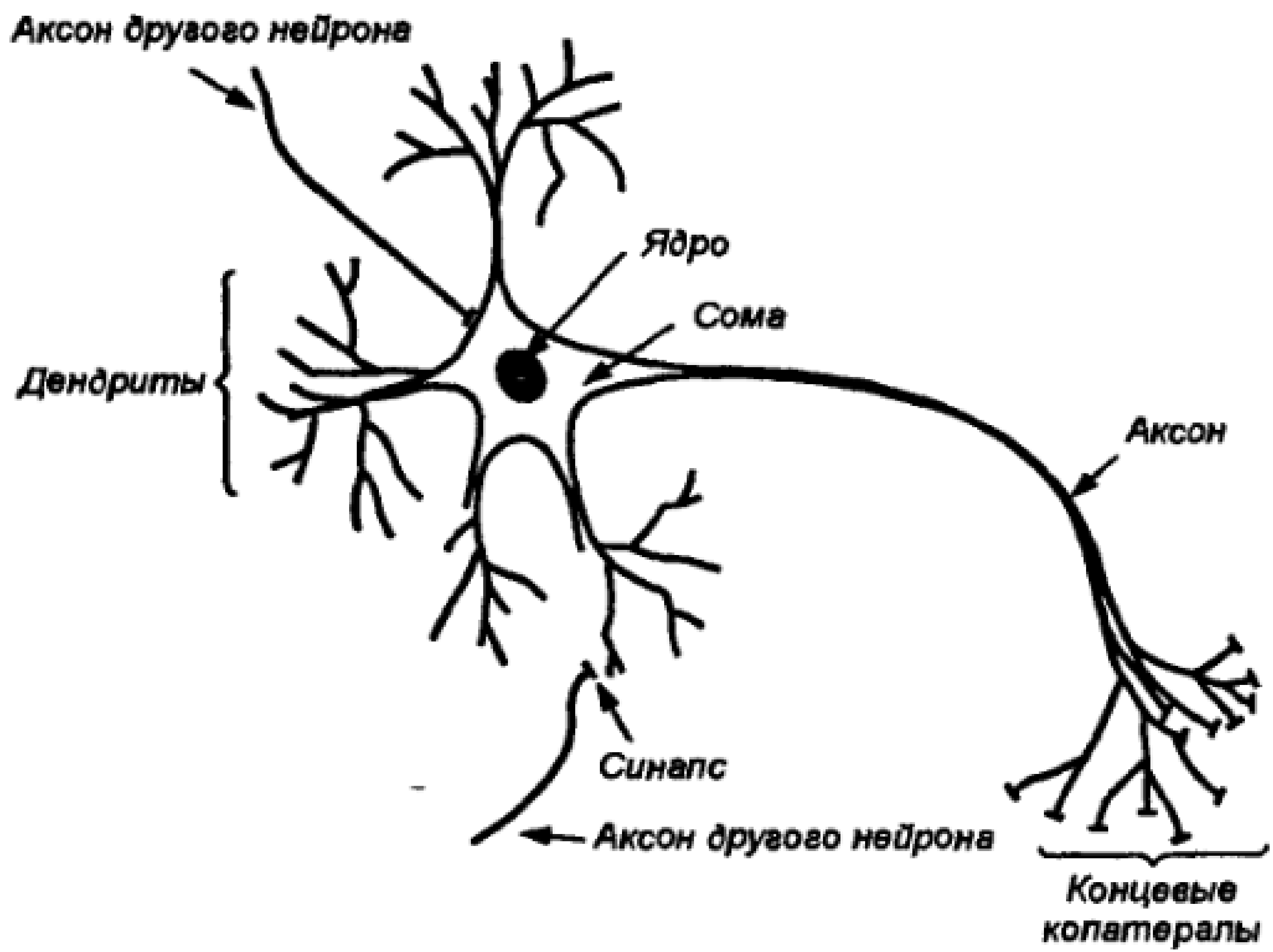


Рис. 1. Схематичная структура нервной клетки

[Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. С польского И.Д. Рудинского. - М.: Финансы и статистика, 2002.]

Из этого следует, что каждому входу клетки можно сопоставить численные коэффициенты (**веса**).

В математической модели нейрона входные сигналы умножаются на эти коэффициенты для того, чтобы корректно учитывать влияние каждого сигнала на состояние нервной клетки.

Возбуждающий и тормозящий эффект реализуется использованием положительных и отрицательных весов соответственно.

Важной характеристикой нейрона является **значение порога возбуждения,** превышение которого суммой входных сигналов провоцирует посылку сигнала через аксон на синапсы других связанных клеток.

Считается, что человеческий мозг содержит около 10^{11} нейронов, каждый из которых выполняет относительно примитивные функции суммирования весовых коэффициентов входных сигналов и сравнения полученной суммы с пороговым значением.

Первые модели НС.

Каждый нейрон можно считать своеобразным процессором, который суммирует с соответствующими весами сигналы, приходящие от других нейронов, выполняет нелинейную (например, пороговую) решающую функцию и передаёт результирующее значение связанным с ним нейронам.

В простейших моделях нейронов выходной сигнал принмиает двоичные значения 0 (возбуждение ниже порогового уровня) или 1 (возбуждение превысило пороговый уровень).

В одной из первых моделей нейрона (модель МакКаллока — Питтса, 1943 г.) нейрон считается бинарным элементом

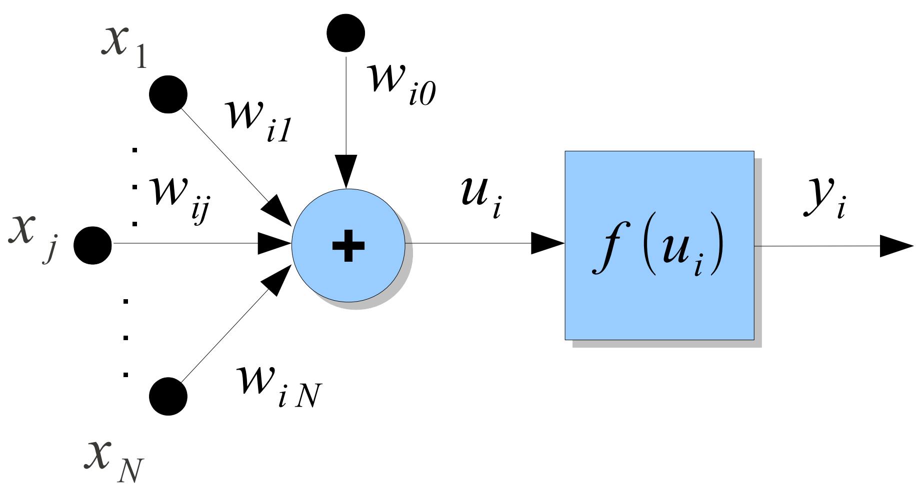


Рис. 2. Модель искусственного нейрона Мак-Каллока - Питтса

Входные сигналы

$$x_j,\ j=1,2,\ldots,N$$

суммируются с учётом соответствующих весов w_{ij} (сигнал поступает в направлении от узла *i* к узлу *j*) в сумматоре,

после чего результат сравнивается с **пороговым значением** w_{i0}
.

Выходной сигнал нейрона y_i определяется при этом зависимостью:

$$y_i = f\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t) + w_{i0}\right)$$

Аргументом функции выступает суммарный сигнал

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j(t) + w_{i0}$$

Функция $f(u_i)$ называется **функцией активации.**

В модели МакКаллока-Питтса это пороговая функция вида:

$$f(u) = \begin{cases} 1, u > 0, \\ 0, u \le 0. \end{cases}$$

Модель МакКаллока-Питтса — это дискретная модель, в которой состояние нейрона в момент времени *t*+1 рассчитывается по значениям его входных сигналов в предыдущий момент *t*.

Построение дискретной модели обосновывается проявленеим **рефракции** у биологических нейронов, приводящей к тому, что нейрон может изменять свое состояние с **конечной частотой**, причём длительность периодов бездействия зависит от частоты его срабатыания.

Д. Хебб в процессе исследования ассоциативной памяти предложил теорию обучения (подбора весов w_{ij}) нейронов.

При этом он использовал наблюдение, что веса межнейронных соединений при активации нейронов могут возрастать.

В **модели Хебба** приращение веса w_{ij} в процессе обучения пропорционально произведению выходных сигналов y_i и y_j нейронов, связанных весом

$$w_{ij}(k+1)=w_{ij}(k)+\eta\, y_i(k)\, y_j(k)$$

где *k* - номер итерации, а η - коэффициент скорости обучения.

Модель нейрона Хебба

Дональд Хебб в процессе исследования поведения нервных клеток заметил, что связь между двумя клетками усиливается, если они обе возбуждаются в один и тот же момент времени.

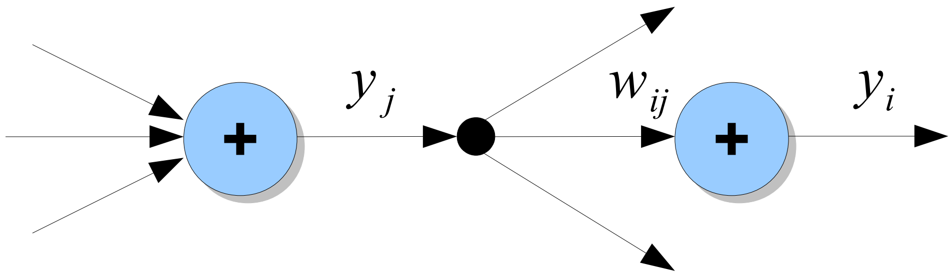


Рис. 3. Иллюстрация связи нейронов в модели Хебба

Если *j*-я клетка с выходным сигналом y_j связана с *i*-й клеткой, имеющей выходной сигнал y_i, связью с весом w_{ij}, то на силу связи этих клеток влияют значения выходных сигналов y_i и y_j

Хебб предложил формальное правило, в котором отразились результаты его наблюдений. В соответствии с правилом Хебба, вес w_{ij} сигнала нейрона изменяется пропорционально произведению его входного и выходного сигналов:

$\Delta w_{ij} = \eta y_j y_i$ (антихеббовское правило: $\Delta w_{ij} = -\eta y_j y_i$)

Правило Хебба может применяться к различным типам нейронных сетей с разнообразными функциями активации отдельных нейронов.

Структурная схема нейрона Хебба соответствует структуре нейрона МакКаллока — Питтса.

Способ подбора веса связи w_{ij} задаётся указанным способом ($\Delta w_{ij} = \eta y_j y_i$)

Обучение нейрона по правилу Хебба может производиться как с учителем, так и без него.

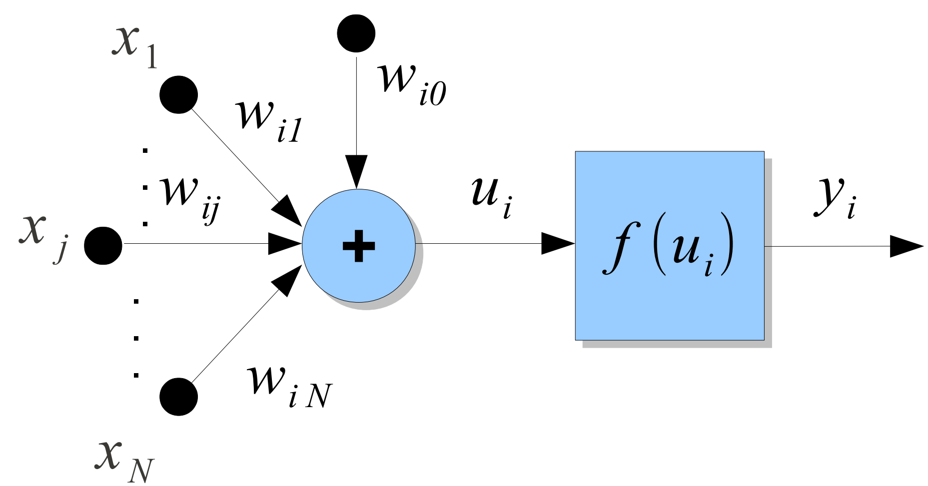


Рис. 4. Модель нейрона

В последнем случае в правиле Хебба

Используется фактическое значение y_i выходного сигнала нейрона. При обучении с учителем вместо значения y_i выходного сигнала используется значение ожидаемой реакции d_i. В этом случае правило Хебба запишется в виде: $\Delta w_{ij} = \eta y_j d_i$

Правило Хебба характеризуется тем, что в результате его применения веса могут принимать произвольно большие значения, поскольку в каждом цикле обучения происходит приращение веса:

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)+\Delta w_{ij}$$

Один из способов стабилизации процесса обучения по правилу Хебба состоит в учёте последнего внячения , уменьшенного на „коэффициент забывания“ .

Тогда правило Хебба запишется в виде:

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)(1-\gamma)+\Delta w_{ij}$$

Значение γ выбирается, как правило, из интервала (0, 1) и часто составляет некоторый процент скорости обучения η .

Большие значения γ приведут к забыванию большей части того, чему нейрон обучался на ранних выборках.

Рекомендуемые значения $\gamma<0.1$, которые позволяют сохранить опыт обучения на ранних выборках и застабилизировать значения весов на определённом уровне.

Модели нейронов и методы их обучения

В соответствии с принципами функционтрования биологических нейронов созданы различные математичские модели, которыми в большей или меньшей степени реализуются свойства нервной клетки.

Обобщённая схема большинства таких моделей основана на модели МакКаллока-Питтса, содержащей сматор взвешенных входных сигналов и нелинейный блок выработки выходного сигнала нейрона, функционально зависящего от выходного сигнала сумматора.

Свойства этой нелинейной функции, особенно её непрерывность оказывают определяющее влияние на выбор способа обучения нейрона.

Другим важным фактором становится стратегия обучения. Выделяют два подхода:

- обучение с учителем (*supervised learning*)
- обучение без учителя (*unsupervised learning)*

При **обучении с учителем** предполагается, что **помимо входных сигналов**, составляющих вектор $\vec{x}$, **известны также и ожидаемые выходные сигналы** нейрона d_i, составляющие вектор $\vec{d}$ (*destination*).

Подбор весовых коэффициентов входных сигналов должен быть организован таким образом, чтобы фактические выходные сигналы нейрона принимали бы значения, как можно близкие к ожидаемым значениям .

Если такой подход невозможен, то остаётся выбирать стратегию обучения без учителя. В этом случае подбор весовых коэффициентов проводится на основании либо конкуренции нейронов между собой например:

- стратегия *Winner Takes All — WTA* (победитель получает всё)
- стратегия *Winner Takes Most — WTM* (победитель получает больше)

либо с учётом корреляции обучающих и выходных сигналов (**принцип Хебба**)

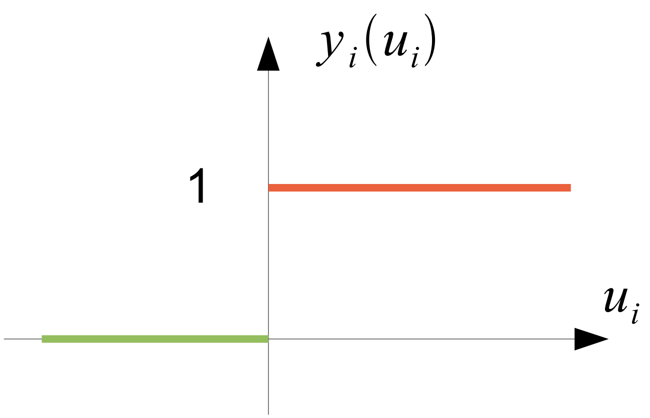
Обучение перцептрона

Перцептрон реализует модель МакКаллока-Питтса, а его схема приведена на рис.6.2

Весовые коэффициенты входов сумматора, на которые поступают входные сигналы x_j, обозначаются w_{ij}, а пороговое значение, поступающее с т.н. **поляризатора** - w_{i0}

Нелинейная функция активации перцептрона представляет собой дискретную функцию ступенчатого типа:

$$y_i(u_i) = \begin{cases} 1, u_i \geq 0, \\ 0, u_i < 0. \end{cases}$$



Где u_i - обозначен выходной сигнал сумматора:

$$u_i = \sum_{j=0}^{N} w_{ij} x_j(t)$$

в приведённой формуле стоит обратить внимание на диапазон суммирования: подразумевается что входной вектор $\vec{x}$, имеющий длину *N*, дополнен нулевым компонентом $x_0 = 1$, формирующим сигнал поляризации:

.

$$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Обучение перцептрона требует наличия учителя и состоит в подборе весов w_{ij}, чтобы выходной сигнал y_i был наиболее близок к заданному значению . d_i Наиболее популярный метод обучения перцептрона описывается слудующим алгоритмом:

1. При первоначально (как правило, случайным образом) выбранных значениях весов w_{ij} на вход нейрона подаётся обучающий вектор $\vec{x}$ и рассчитывается значение выходного сигнала y_i . По результатам сравнения фактически полученного значения y_i с заданным (ожидаемым) значением d_i уточняются значения весов.

2. Если y_i совпадает с ожидаемым значением d_i , то весовые коэффициенты не изменяются.

3. Если $y_i = 0$, а соответствующее заданное значение $d_i = 1$, то значения весов уточняются в соответствии с формулой $w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + x_j$, где *t* обозначает номер предыдущей итерации, а (*t*+1) - номер текущей.

4. Если $y_i = 1$, а соответствующее заданное значение $d_i = 0$, то значения весов уточняются в соответствии с формулой $w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - x_j$, где *t* обозначает номер предыдущей итерации, а (*t*+1) - номер текущей.

По завершении уточнения весовых коэффициентов представляется очередной обучающий вектор $\vec{x}$ и связанное с ним ожидаемое значение d_i, и значения весов уточняются заново.

Это процесс многократно повторяется на всех обучающих выборках, пока не будут минимизированы различия между всем выходными значениями y_i и соответствующими им ожидаемми значениями d_i
.

Правило обучения перцептрона является частным случаемпредложенного позже **правила Видроу-Хоффа**.

В соответствии с этим правилом подбор весовых коэффициентов нейрона прводится по формулам:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = x_j (d_i - y_i)$$

Аналогичные соотношения используются при подборе веса поляризатора w_{i0} , для которого входной сигнал всегда равен 1. Следовательно:

$$\Delta w_{i0} = (d_i - y_i)$$

Как видно, если сигналы y_i и d_i принимают только двоичные значения 0 и 1, то правило Видроу-Хоффа сводится к правилу обучения перцептрона.

Минимизация различий между фактическими реакциями нейрона y_i и ожидаемыми значениями d_i обычно представляется как процедура минимизации целевой функции (функции погрешности), обычно но методу наименьших кадратов:

$$E = \sum_{k=1}^{p} (y_i^{(k)} - d_i^{(k)})^2$$

где *p* - количество предъявляемых обучающих выборок.

Поскольку активационная функция перцептрона является разрывной, то минимизация этой функции является безградиентной.

При этом эффективность метода прибольшом количестве обучающих выборок невелика, а количество циклов обучения и длителность этого процесса возрастают очень быстро и без какой-либо гарантии достижения минимума целвой функции.

Устранить эти недостатки можно в случае использования непрерывной функции активации, при которой целевая функция *E* также становится непрерывной, что даёт возмодность при обучении использовать величину градиента.

Сигмоидальный нейрон

Нейрон **сигмоидального типа** имеет структуру, аналогичную модели МакКаллока-Питтса с той разницей, что функция активации нейрона является **непрерывной** функцией, в качестве которой используются функции **класса сигмоид**:

Функция Ферми:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}}$$

Гиперболический тангенс:

$$f(x) = th(\beta x) = \frac{sh(\beta x)}{ch(\beta x)} = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}$$

В обеих этих функциях параметр β подбирается пользователем под конкретные условия задачи. Значение этого параметра определяет форму функции активации.

При малых значениях β график более пологий. При $\beta \to \infty$ функция приближается к ступенчатой функции. Часто на практике для упрощения принимается $\beta = 1$.

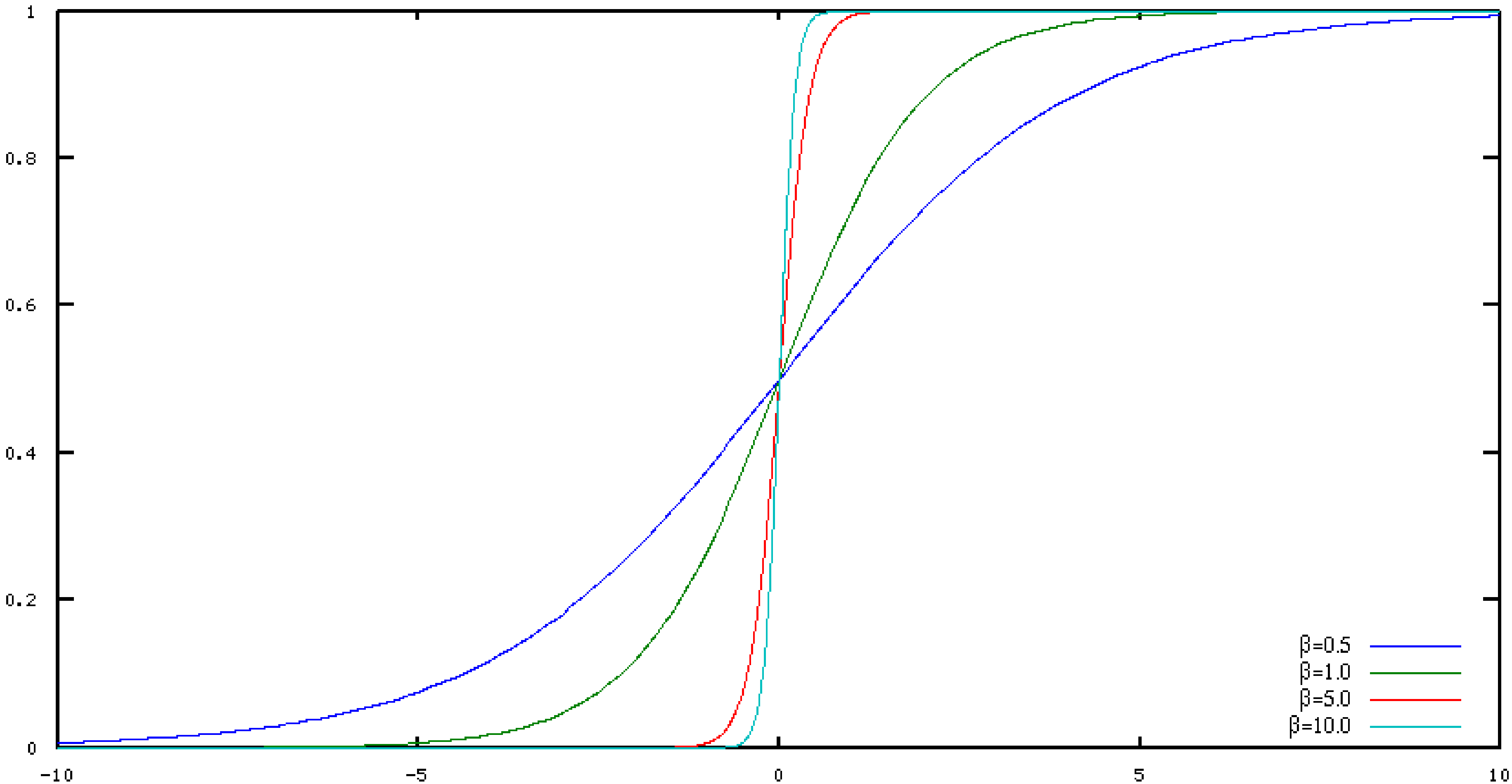


Рис. 5. Графики функции Ферми для различных значений β

Аналогичные условия и следствия для функции гиперболического тангенса:

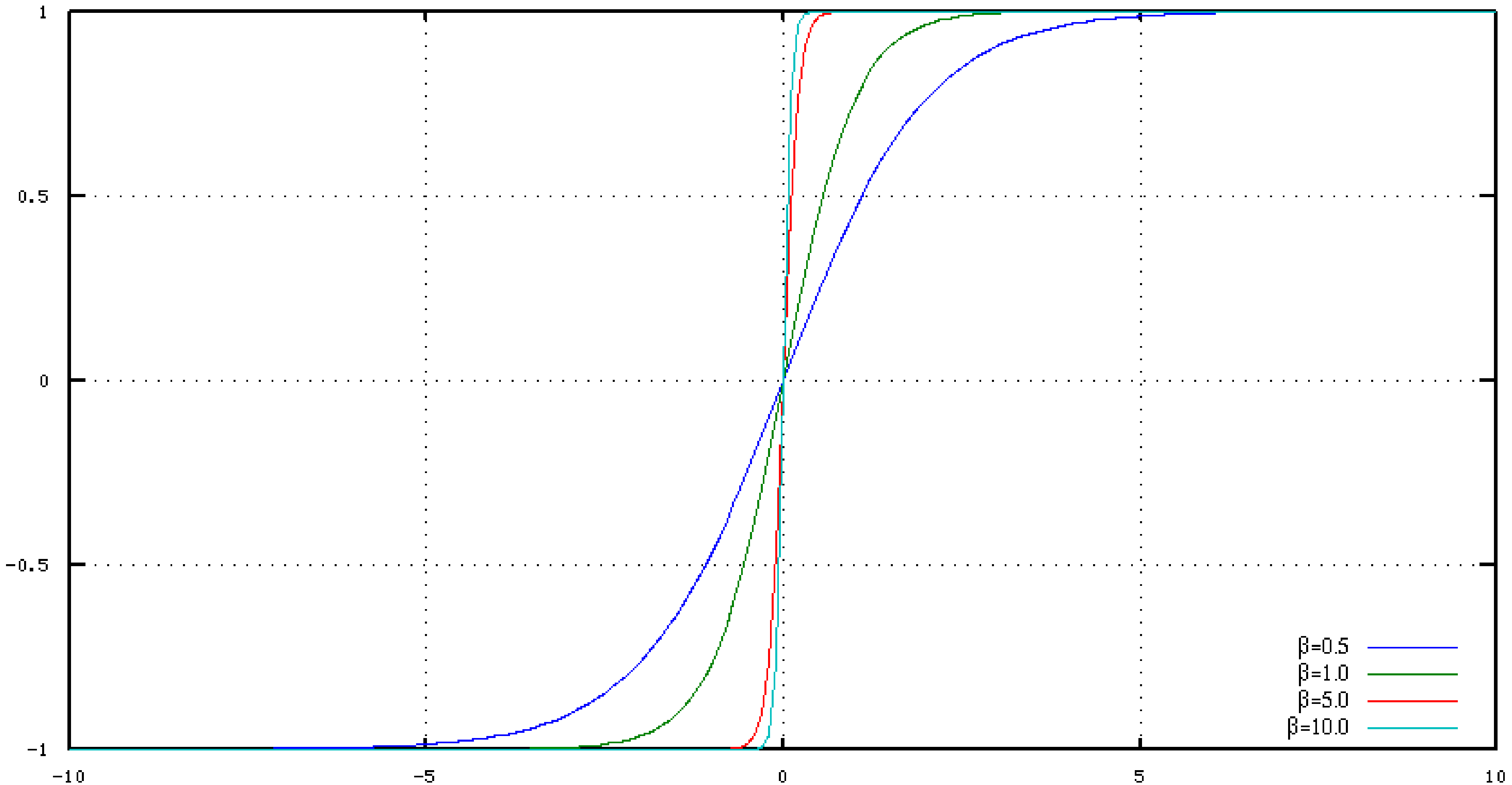


Рис. 6. Графики функции гиперболического тангенса для различных значений β

Основным **важным свойством сигмоидальных функций**, помимо их формы, является их дифференцируемость и вид производной функции.

Например, **производная функции Ферми** будет иметь вид:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-\beta x}}\right)=\frac{\beta e^{-\beta x}}{(1+e^{-\beta x})^2}=\beta\frac{1}{1+e^{-\beta x}}\frac{e^{-\beta x}+1-1}{1+e^{-\beta x}}=\beta\frac{1}{1+e^{-\beta x}}\left(1-\frac{1}{1+e^{-\beta x}}\right)=$$

$$=\beta f(x)(1-f(x))$$

Производная гиперболического тангенса:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}\right)=\frac{\beta(e^{\beta x}+e^{-\beta x})(e^{\beta x}+e^{-\beta x})-\beta(e^{\beta x}-e^{-\beta x})(e^{\beta x}-e^{-\beta x})}{(e^{\beta x}+e^{-\beta x})^2}=$$

$$=\beta\frac{(e^{\beta x}+e^{-\beta x})^2-(e^{\beta x}-e^{-\beta x})^2}{(e^{\beta x}+e^{-\beta x})^2}=\beta\left(1-\left(\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}\right)^2\right)=\beta(1-f^2(x))$$

Графики производной функции Ферми имеют колоколообразную форму:

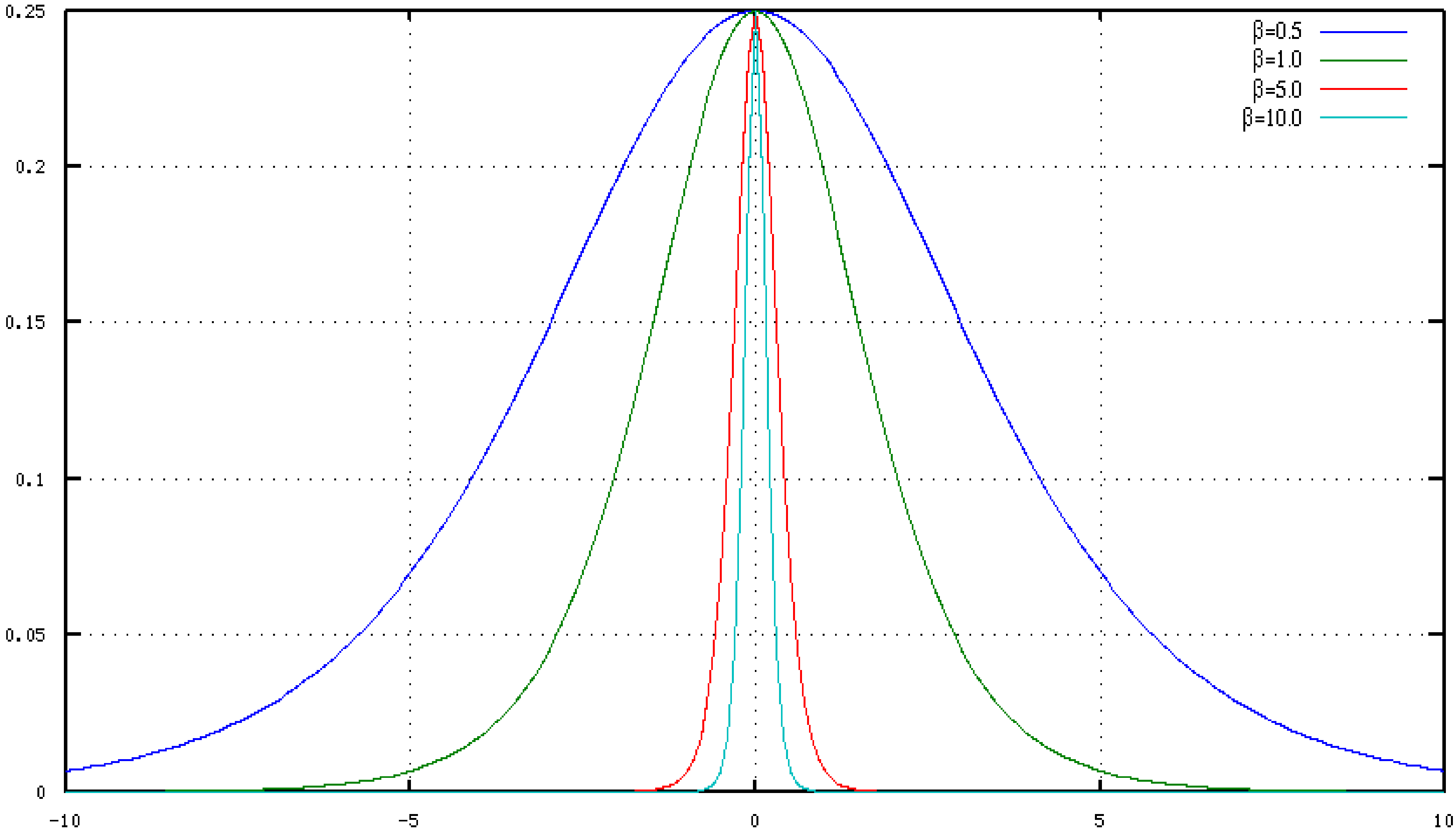


Рис. 7. Графики производной функции Ферми для различных значений β

Сигмоидальный нейрон обучается учителем по принципу минимизации целевой функции, которая для векторов $\vec{x}$, $\vec{d}$ i-го нейрона имеет вид:

$$E=\frac{1}{2}(y_i-d_i)^2$$

$$y_i=f(u_i)=f\left(\sum_{j=0}^{N} w_{ij}x_j\right)$$

Функция $f(u_i)$ является сигмоидальной, $\vec{x}$ - входной вектор $\vec{x}=(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ со значением $x_0=1$ при наличии поляризации и $x_0=0$ при её отсутствии, а $\vec{d}$ - соответствующее ему значение на выходе *i*-го нейрона.

Использование непрерывной функции в качестве активационной позволяет применять градиентные методы при обучении. Наиболее простым является метод наискорейшего спуска, при котором уточнение вектора

$$\vec{w}_i=(w_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, w_{\mathrm{iN}})^T$$

выполняется в направлении отрицательного градиента целевой функции:

$$(\nabla_0 E, \nabla_1 E, \nabla_2 E, \dots, \nabla_N E)^T, \text{ где } \nabla_j E=\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$$

Градиентный **метод наискорейшего спуска** заключается в следующем:

Требуется решить задачу минимизации функции, т.е. для заданной функции $f(\vec{x})$ найти точку $\vec{x}^{(*)}$ такую, что достигается

$$f(\vec{x}^{(*)}) = \min_{\vec{x}} f(\vec{x})$$

на некотором заданном множестве значений $\vec{x}$.

1. Поиск начинается из некоторой начальной точки $\vec{x}^{(0)}$

   Для примера пусть $f(\vec{x}) = x^2, \quad x^{(0)} = 2$

2. Следующая точка выбирается следующим образом:

$$\vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(0)} - \eta \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^{(0)}), x_2^{(0)} - \eta \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}^{(0)}), \dots, x_n^{(0)} - \eta \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^{(0)}) \right)^T$$

$$x_1$$

   Применительно к примеру $x^{(1)}$ *выбирается следующим образом:*

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \eta \frac{df}{dx}(x^{(0)}) = x^{(0)} - \eta 2 x^{(0)} = 2 - 0.75 \cdot 4 = -1, \quad \eta = 0.75$$

3. Процесс повторяется до тех пор пока не будет достигнута точность:

$$|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^{(n-1)}| \leq \epsilon$$

Следующими точками в приведённом примере будут:

- $x^{(2)} = x^{(1)} - \eta \cdot 2x^{(1)} = -1 - 0.75 \cdot 2 \cdot (-1) = -1 + 1.5 = 0.5$
- $x^{(3)} = x^{(2)} - \eta \cdot 2x^{(2)} = 0.5 - 0.75 \cdot 2 \cdot 0.5 = 0.5 - 0.75 = -0.25$
- $x^{(4)} = x^{(3)} - \eta \cdot 2x^{(3)} = -0.25 - 0.75 \cdot 2 \cdot (-0.25) = -0.25 + 0.375 = 0.125$
- $x^{(5)} = x^{(4)} - \eta \cdot 2x^{(4)} = 0.125 - 0.75 \cdot 2 \cdot 0.125 = 0.125 - 0.1875 = -0.0625$

Иллюстрация к работе этого метода для приведённого примера:

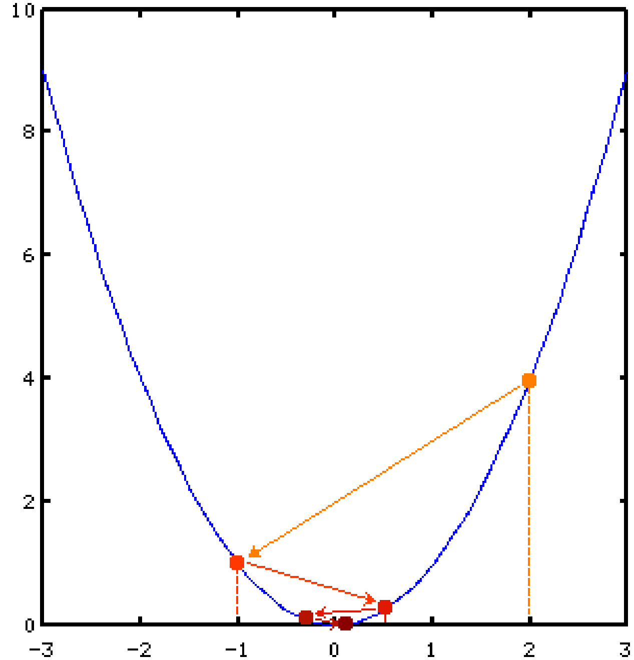


Рис. 8. Наглядный пример работы метода градиентного спуска

Возвращаясь к задаче минимизации целевой функции

$$E=\frac{1}{2}(y_i-d_i)^2$$

путём выбора весов w_{ij} , используем градиент этой функции:

$$\left(\nabla_0 E, \nabla_1 E, \nabla_2 E, \dots, \nabla_N E\right)^T, \quad \nabla_j E=\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} \quad \forall\ j=1,2,\dots,N$$

Частная производная $\dfrac{\partial E}{\partial w_{ij}}$ имеет следующий смысл (производная сложной функции):

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{du_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial w_{ij}}$$

Где $\dfrac{\partial E}{\partial y_i} = \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\dfrac{1}{2}(y_i-d_i)^2\right) = \left(y_i-d_i\right)$. Обозначим $\dfrac{\partial E}{\partial y_i} = \left(y_i-d_i\right) = e_i$

$\dfrac{dy_i}{du_i} = \dfrac{df(u_i)}{du_i}$ - производная активационной функции нейрона

$$\frac{\partial u_i}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}}\left(\sum_{j=0}^{N} w_{ij}x_j\right) = x_j$$

Таким образом,

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{du_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial w_{ij}} = e_i \frac{df(u_i)}{du_i} x_j$$

Если ввести обозначение : $e_i \dfrac{df(u_i)}{du_i} = \delta_i$

То выражение, определяющее j -ю составляющую градиента, имеет вид :

$$\nabla_j E = \delta_i x_j$$

Тогда, согласно методу градиентного спуска подбор весов выполняется:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - \eta \delta_i x_j$$

Где η - коэффициент скорости обучения ($0 < \eta < 1$)

Приведённое уравнение определеяет алгоритм обчения нейрона. На эффективность обучения оказывает сильное влияние подбор коэффициента скорости обучения. В различных приложениях его величина может являться константой, а может быть переменной величиной, изменяющейся в процессе обучения адаптивным способом или подбираться на каждом шаге по принципу направленной минимизации.

Нейрон типа „Адалайн“

Нейрон типа „адалайн“ (англ. ADALINE: ADAptive LInear NEuron – адаптивный линейный нейрон) была предложены Бернардом Видроу (Widrow). Его структурная схема представлена ниже:

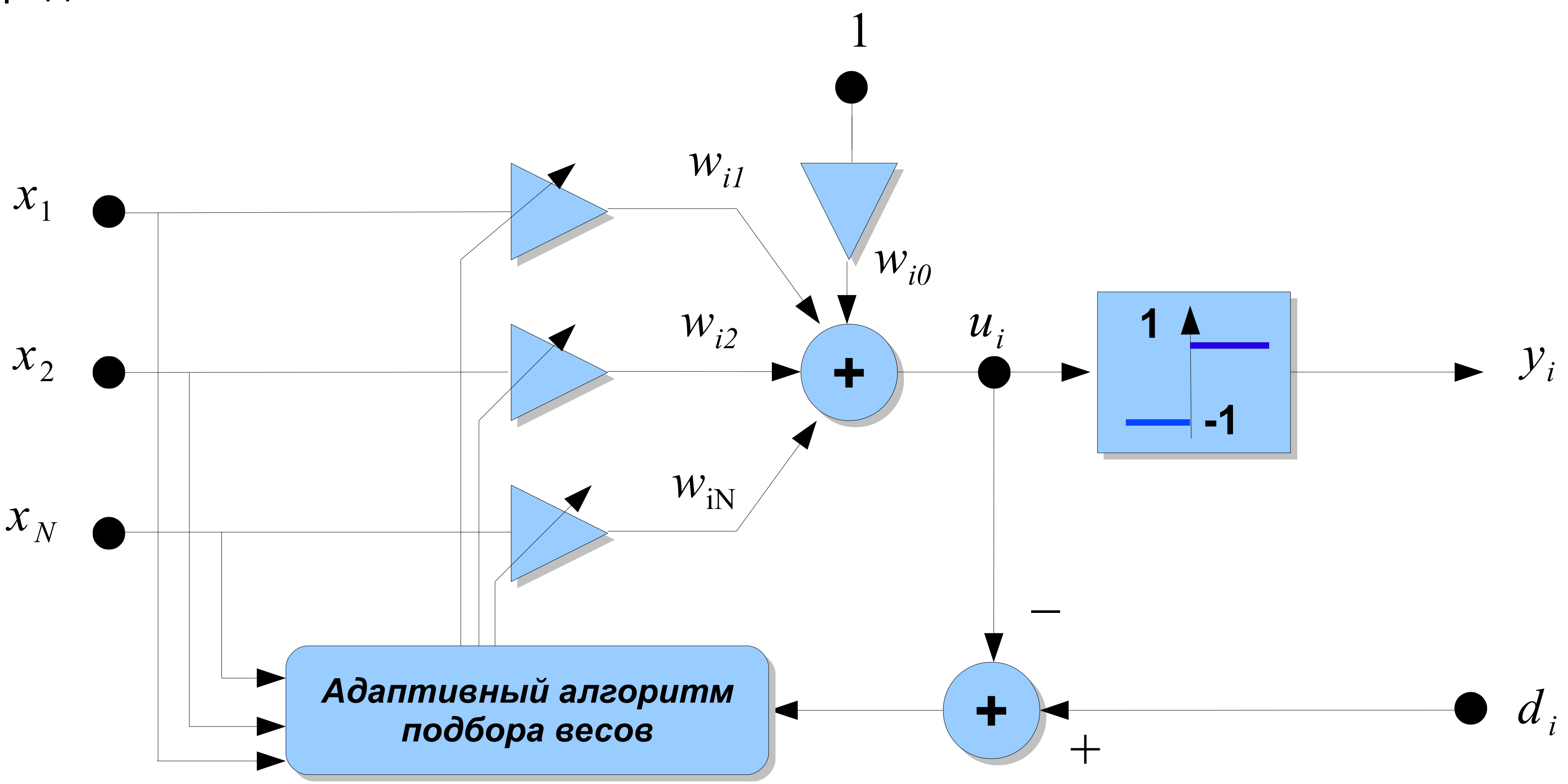


Рис. 9. Структурная схема типа „адалайн“

По методу весового суммирования сигналов нейрон типа „адалайн“ аналогичен представленным ранее моделям нейронов.

Его функция активации имеет вид, аналогичный $sign(x)$:

$$y_i(u_i)=\begin{cases}1, & u_i > 0,\\ -1, & u_i \le 0\end{cases}$$

Подбор весовых коэффициентов осуществляется в процессе минимизации квадратичной ошибки:

$$E(w) = \frac{1}{2}e_i^2 = \frac{1}{2}\left[d_i-\left(\sum_{j=0}^{N} w_{ij}x_j\right)\right]^2$$

Несмотря на нелинейный характер модели, в целевой функции присутствуют только линейные члены, представляющие собой сумму взвешенных входных сигналов, т.е. в обучении не используется выходное значение нейрона.

В связи с выполнением условия непрерывности целевой функции, стало возможным применение алгоритмов градиентного обучения. Как и в случае с сигмоидальным нейроном, применяется метод наискорейшего спуска. Значения весов уточняются либо дискретным способом по формуле:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij} + \eta e_i x_j$$

Либо аналоговым способом – путём решения разностных уравнений вида:

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \mu e_i x_j$$

Где $e_i = \left(d_i - \sum_{j=0}^{N} w_{ij} x_j \right)$

η, μ - коэффициенты скорости обучения

Нейрон типа «адалайн» имеет относительно простую практическую реализацию как в случае аналогового подхода, так и в дискретном варианте.

Основные компоненты модели:

- В первом случае — вычислительные элементы (интеграторы и сумматоры),
- Во втором случае — элементы задержки, описываемые оператором запаздывания z^{-1} и также интеграторы и сумматоры

Обе адалайн-модели могут служить базой для компьютерного моделирования нейрона этого типа.

В практических приложениях нейроны типа «адалайн» всегда используются группами, образуя слои, называемые «**мадалайн**» (MADALINE — Multiple ADALINE).

Каждый входящий в слой нейрон обучается по принципу «адалайн». Входные сигналы отдельных нейронов такого слоя могут формироваться различными способами. Б. Видроу предложил три основных типа межнейронных соединений: **OR**, **AND** и **мажоритарное**.

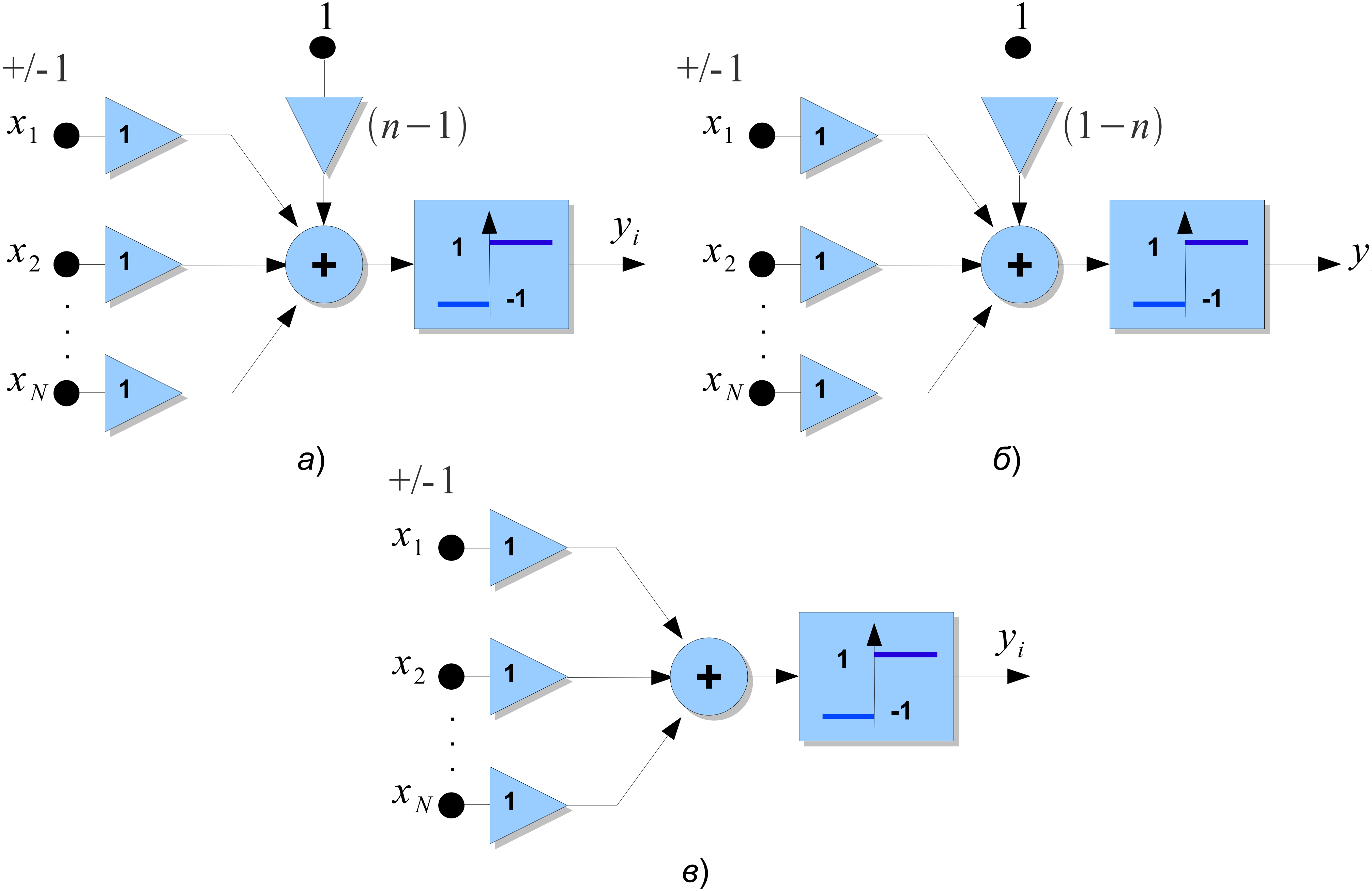


Рис. 10. Нейронные сети с выходами типов: *а*) OR; *б*) AND; *в*) мажоритарный

Конкретные сигналы x_j суммируются с учётом порогового значения, устанавливаемого раздельно для каждого типа связи.

Для схемы OR используется значение $(n-1)$

Для схемы AND пороговое значение устанавливается равным $(1-n)$

Для мажоритарной схемы пороговое значение равно нулю.

Благодаря функции активации типа $sign$ выходной сигнал y_i

- принимает значение «+1», когда хотя бы один из входных сигналов имеет значение «+1» для схемы OR или
- когда все входные сигналы имеют значения «+1» для схемы AND.
- Для мажоритарного соединения выходной сигнал равен «+1», когда большинство входных сигналов имеют значение «+1».

Инстар и аутстар Гроссберга

Нейроны типа **инстар** и **аутстар** — взаимодополняющие элементы.

Инстар адаптирует веса сигналов, поступающих на сумматор нейрона

Аутстар согласовывает веса выходящих из нейрона связей с узлами, в которых формируются значения выходных сигналов.

Нейрон типа инстар был описан Гроссбергом (Stephen Grossberg), его структурная схема приведена на рисунке ниже:

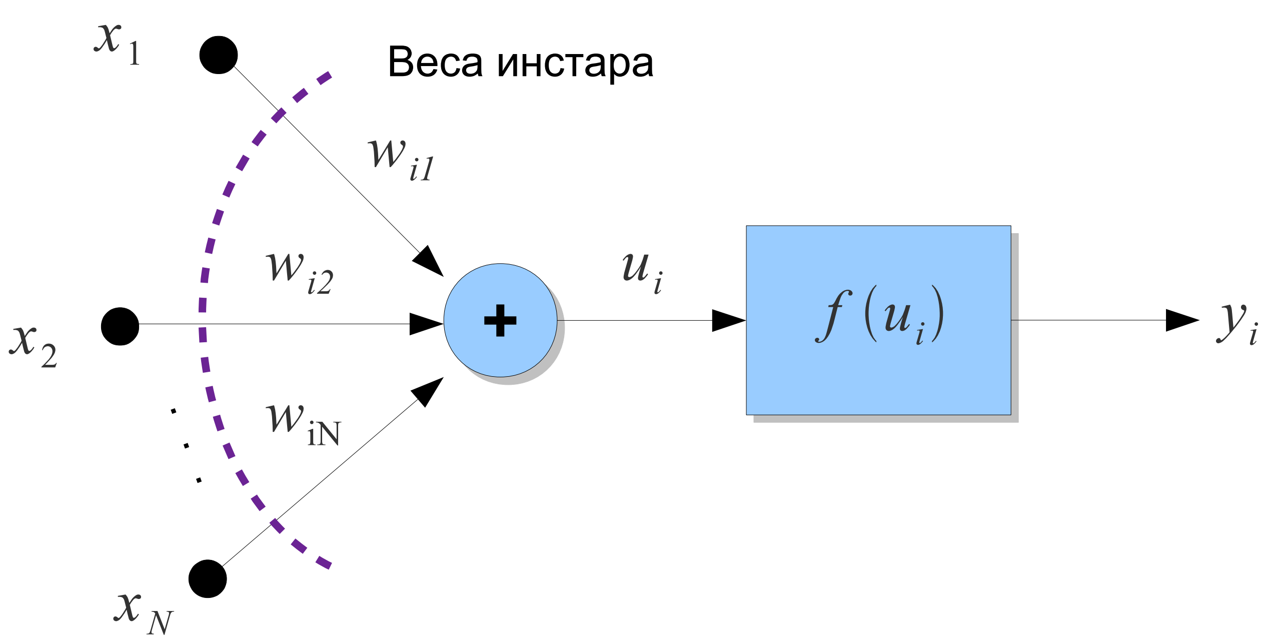


Рис. 11. Структурная схема инстара

Входные сигналы x_j, подаваемые с весовыми коэффициентами w_{ij} на вход суммируются в соответствии с выражением:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j$$

В соответствии с функцией активации на выходе нейрона вырабатывается выходной сигнал

$$y_i = f(u_i)$$

Часто в инстаре применяется линейная форма функции активации:

$$y_i = u_i$$

Обучение инстара производится по правилу Гроссберга, в соответствии с которым:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta y_i [x_j - w_{ij}(t)]$$

Где η - коэфициент скорости обучения, значение которого выбирается, как правило, из интервала (0, 1).

Входные сигналы, представляемые в виде вектора $\vec{x}$, выражены чаще всего в нормализованной форме, т. е. $\|\vec{x}\| = 1$. Нормализация вектора выполняется по формуле:

$$x_j{}' = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}}$$

Результаты обучения по методу Гроссберга в значительной степени зависят от коэффициента η скорости обучения. При $\eta = 1$ веса w_{ij} становятся равными значениям x_j уже после первой итерации.

Ввод очередного входного вектора $\vec{x}$ вызовет адаптацию весов к новому вектору и полное «забывание» предыдущих значений.

При $\eta < 1$ в результате обучения w_{ij} принимают усреднённые значения обучающих векторов $\vec{x}$.

Нейрон типа **аутстар** представляет собой комплементарное дополнение инстара. Если инстар обучается с целью распознавать вектор, подаваемый на его вход, то аутстар должен генерировать вектор, необходимый связанным с ним нейронам.

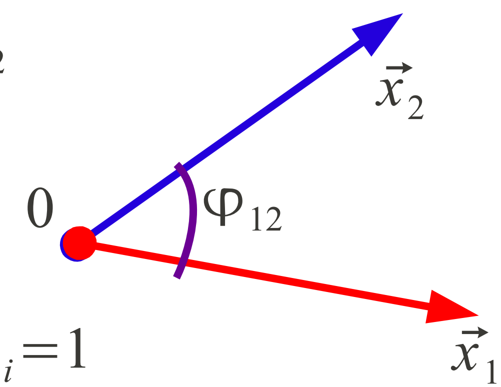
Предположим, что инстар обучился на векторе $\vec{x}_1$

Таким образом, согласно правилу Гроссберга, веса входов приняли значения:

$$\vec{w} = (w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iN}) = \vec{x}_1$$

При указании входного вектора $\vec{x}_2$ инстар вырабатывает сигнал u_i, равный

$$u_i = (\vec{x}_2, \vec{w}) = (\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \|\vec{x}_1\| \ \|\vec{x}_2\| \ \cos\varphi_{12}$$



При нормализации входных векторов, получим:

$$u_i = \cos\varphi_{12}$$

При выполнении условия $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ рекция инстара будет равна $u_i = 1$

В ином случае его реакция будет пропорциональная косинусу угла между векторами.
Для ортогональных векторов рекция инстара $u_i = 0$

Таким образом, обученный инстар функционирует как векторный классификатор, сопоставляющий поданный на его вход вектор с вектором, сформированным в процессе обучения: при их максимальной близости реакция будет близкой к 1.

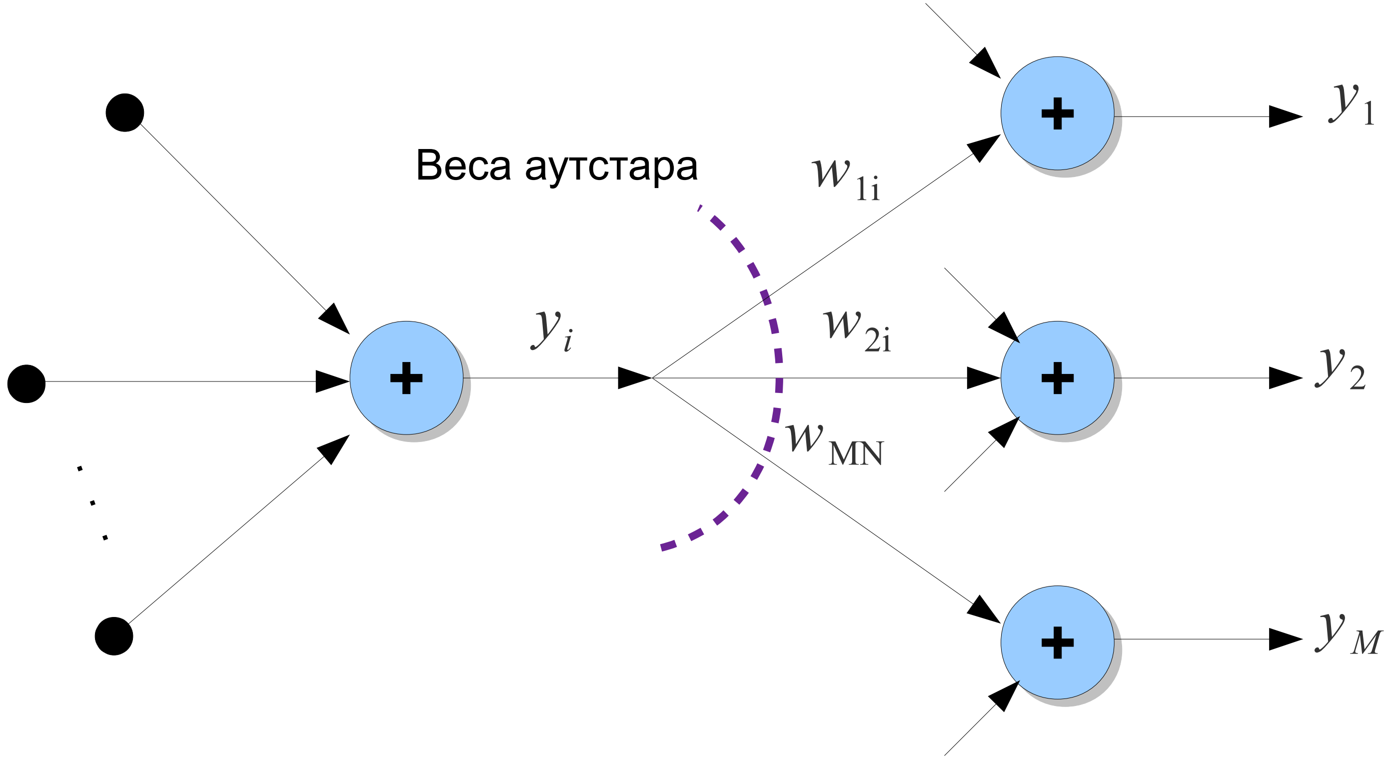


Рис. 12. Структурная схема аутстара

i — й нейрон-источник посылает свой выходной сигнал y_i взаимодействующим с ним нейронам, выходные сигналы которых обозначены как $y_j, \; j = 1,2,\ldots,M$

Аутстар, как правило, является линейным нейроном. Его обучение состоит в подборе таких весов w_{ij}, чтобы выходные сигналы аутстара были равны ожидаемым значениям взаимодействующих с ним нейронов.

Обучение аутстара согласно правилу Гроссберга проводится в соответствии с выражением:

$$w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + \eta y_i \left(y_j - w_{ji}(t) \right)$$

где η - коэффициент скорости обучения, y_i - выходной сигнал *i* - го нейрона, выступающего в роли источника.

Выражение, согласно которому обучается аутстар, аналогично выражению для инстара. В режиме распознавания в момент активации нейрона-источника аутстар будет генерировать сигналы, соответствующие ожидаемым значениям y_j .

Нейроны типа инстар и аутстар существенным образом отличаются от нейронов рассмотренных ранее типов.

При обучении инстара и аутстара весовые коэффициенты подстраиваются под входные или выходные векторы.

Обучение может проводиться как с учителем, так и без него.

Нейроны типа WTA

Нейроны типа WTA (Winner Takes All — победитель получает всё) имеют входной модуль в виде стандартного сумматора, выходной сигнал которого вычисляется по формуле:

$$u_i = \sum_{j=0}^{N} w_{ij} x_j$$

Группа конкурирующих между собой нейронов получает одни и те же входные сигналы x_j В зависимости от значений весов суммарные сигналы u_i различных нейронов могут различаться.

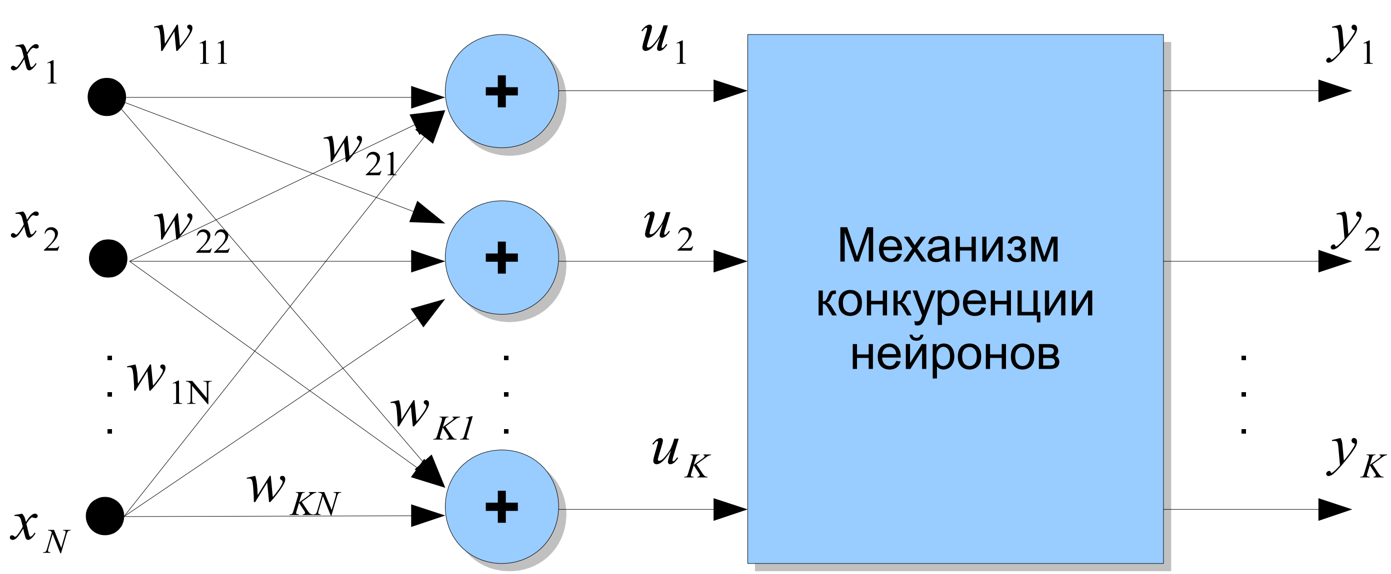


Рис. 13 Схема соединенения нейронов типа WTA

По результатам сравнения победителем считается нейрон с наибольшим значением u_i . Нейрон-победитель вырабатывает на своем выходе состояние 1, а остальные нейроны переходят в состояние 0.

Для обучения нейронов типа WTA учитель не требуется. Оно протекает аналогично обучению инстара, с использованием нормализованных входных векторов $\vec{x}$

Начальные весовые коэффициенты выбираются случайно и нормируются относительно единицы.

После подачи первого входного вектора определяется победитель. Победитель переходит в состояние 1, что позволяет ему провести уточнение весов входящих в него сигналов по правилу Гроссберга.

Проигравшие нейроны формируют на выходах состояние 0, что блокирует возможность уточнения весовых коэффициентов.

В следствие бинарности значений выходных сигналов конкурирующих нейронов правило Гроссберга может быть упрощено:

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)+\eta[x_j-w_{ij}(t)]$$

На функционирование нейронов типа WTA оказывает существенное влияние нормализация входных векторов и весовых коэффициентов.

Выходной сигнал *i*-го нейрона может быть описан следующим соотношением (в соответствии с формулой выхода инстара):

$$u_i=\vec{w}^T\vec{x}=\|w\|\|x\|\cos\phi_i$$

Поскольку $\|w\|=\|x\|=1$ значение u_i определяется углом между векторами $\vec{x}$ и $\vec{w}$ $u_i=\cos\phi_i$.

Поэтому победитилем оказывается нейрон, вектор весов которого оказывается наиболее близким текущему обучающему вектору $\vec{x}$.