Теория принятия решений

Литература

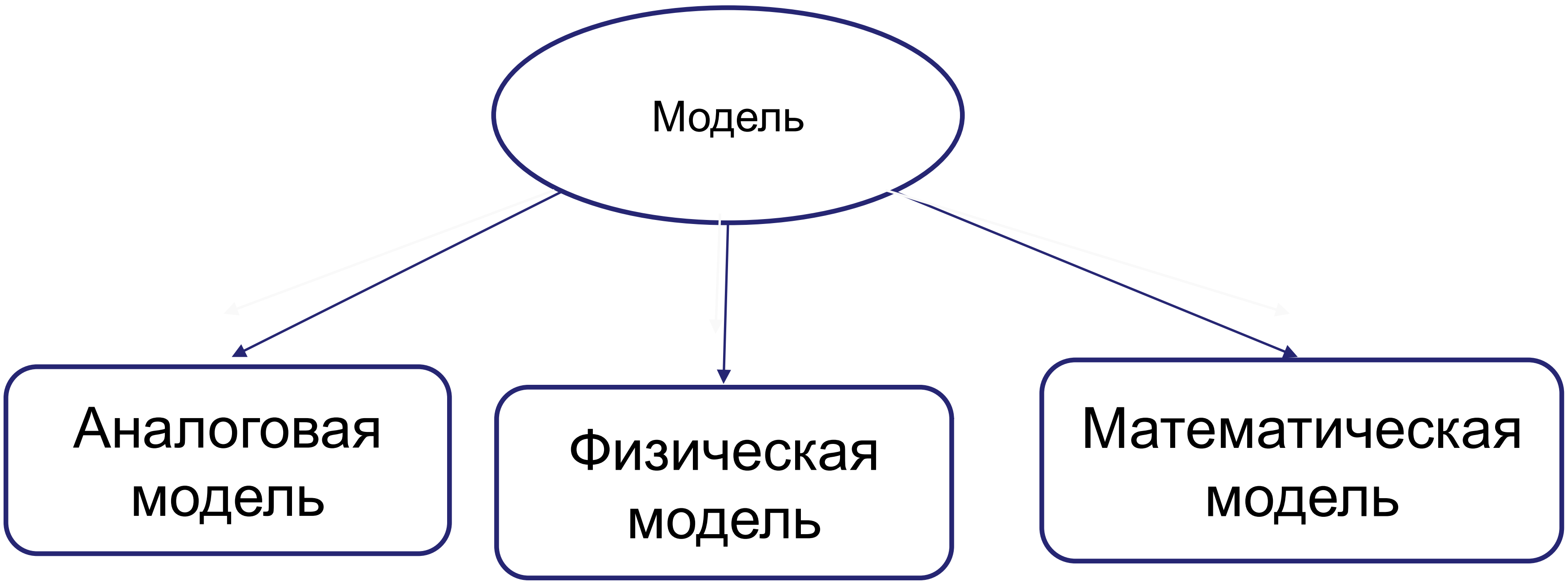
О.И. Ларичев «Теория и методы принятия решений»

А.И. Орлов «Теория принятия решений»

А.Т. Зуб «Принятие управленческих решений»

А.Г. Мадера «Моделирование и принятие решений в менеджменте»

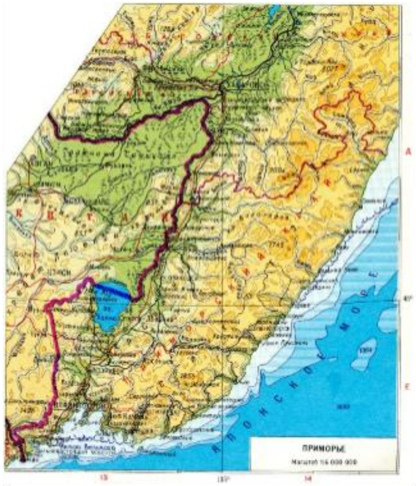
Моделирование в теории принятия решений



Аналоговая модель

Аналоговая модель – это модель, основанная на аналогии или подобии между объектами, операциями или процессами, имеющими различную физическую природу.

Лекарственные препараты сначала проверяют на животных, чтобы понять реакцию человека



Физическая карта-
адекватная аналоговая
модель реальной
местности.

Фотография тоже является
аналоговой моделю.

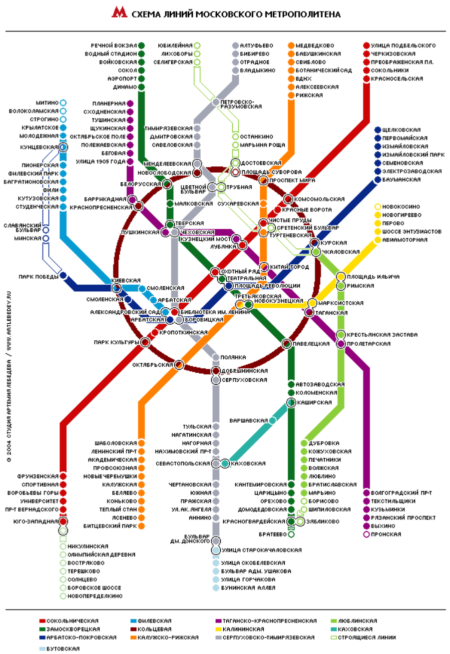


Схема метро

Часы - аналоговая модель течения времени.

Физическая модель

Физическая модель – это уменьшенная в несколько раз материальная копия исследуемого объекта в основных, наиболее существенных чертах, воспроизводящая реальный объект в искусственно созданных условиях, имитирующих реальные окружающие условия и воздействия.

Физическое моделирование

Физическое моделирование – это исследование поведения реального объекта в реальных условиях при реальных воздействиях путём проведения экспериментальных исследований *на его физической модели,* в условиях, имитирующих реальную внешнюю среду и реальные воздействия.

Примеры физических моделей

Моделирование перегрузки или невесомости на специальных установках.

Глобус – физическая модель планеты земля.

Примеры физических моделей

В аэродинамических трубах испытывают небольшие модели, представляющие собой по форме точную копию проверяемого самолёта

Когда применяют физические модели

- исследуемый объект слишком сложен для моделирования другими средствами;
- окружающие условия и воздействия при функционировании объекта не могут быть воспроизведены в реальности или не доступны для проведения исследований;
- изготовление реального объекта и его натурные испытания в реальных условиях сопряжены с огромными рисками, неоправданными затратами ресурсов и потерями, катастрофами и непредвиденными последствиями.

Математическая модель

Математическая модель – это идеализированный образ реального объекта, выраженный в математических понятиях и символах, с определённой степенью адекватности отражающий наиболее существенные свойства и характеристики реального объекта.

Математическое моделирование заключается в исследовании реального объекта с помощью построенной адекватной математической модели.

Классы моделей в ТПР

- Принятие решений в условиях определённости.
- Принятие решений в условиях риска.
- Принятие решений в условиях полной неопределённости.

В ***моделях в условиях полной определённости*** имеется несколько альтернатив (их может быть и бесконечно много), а о природе все точно известно и у неё имеется только одно-единственное состояние.

- ***Модели в условиях риска*** характеризуются наличием нескольких альтернатив и нескольких состояний природы, относительно которых известны вероятности их наступления.

В ***моделях в условиях полной неопределённости*** имеется несколько альтернатив и несколько состояний природы, но о вероятностях их наступления ничего неизвестно.

Теория игр

Теория игр – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

Конфликт – ситуация, разрешение которой происходит в условиях различия интересов нескольких участвующих сторон.

Математические модели конфликтных ситуаций называют ***играми***, участников конфликта – ***игроками***, а решения, которые способны принимать игроки – ***стратегиями***.

ВГУЭС

Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.


стратегические
случайные
игры 1,2, …, n лиц
бескоалиционные
конечные
Игры
коалиционные
бесконечные
в нормальной форме
с нулевой суммой (антагонистические)
динамические
с ненулевой суммой

Матричные игры

- Матричная игра (G) – это игра, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц).

Интерпретация игры

Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают стратегии $x \in X, y \in Y$, после этого первый игрок получает выигрыш, равный $\mathrm{u}(x, y)$, а второй игрок получает выигрыш $-u(x, y)$.

Матрица игры

Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий:

$$X=M=\{1,2,\ldots,m\},\quad Y=N=\{1,2,\ldots,n\}.$$

Тогда игра G полностью определяется заданием матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, где $a_{ij}=u(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) i, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) j (эти стратегии называют **чистыми**).

Матрица A называется ***матрицей игры*** или ***платёжной матрицей***.

Камень, ножницы, бумага

Математическая модель

1. Игроков всего двое. Будем говорить, что множество игроков в этой игре состоит из двух элементов:

$$I = \{1, 2\}.$$

2. Каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, множество стратегий для каждого игрока $i \in I$ будет

$$S_i = \{\text{камень, ножницы, бумага}\}.$$

3. Мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали.

Решение

		2 игрок		
1 игрок		камень	ножницы	бумага
	камень	0	1	-1
	ножницы	-1	0	1
	бумага	1	-1	0

- Матрица игры

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Игроки P_1, P_2 одновременно называют одно из чисел 1, 2, 3. Если сумма названных чисел окажется чётной, выигрывает P_1, если нечётной – выигрывает P_2, при этом выигрыш равен сумме названных чисел. Составить матрицу игры.

Решение

Каждый из игроков имеет по три стратегии: назвать одно из чисел 1, 2 или 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Множество профилей стратегий

Пусть $S_1, \dots, S_N$ множества. Декартовым произведением этих множеств называется

$$S = S_1 \times \cdots \times S_N = \{(s_1, \dots, s_N) | s_1 \in S_1, \dots, s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1, \dots, N\}$ - множество игроков, $S_1, \dots, S_N$ - множества стратегий игроков, то будем говорить, что множество профилей стратегий или множество стратегий в игре есть

$$S = S_1 \times \cdots \times S_N.$$

Пример

- Например, в игре «камень, ножницы, бумага» множество стратегий: S_1= камень, S_2= ножницы, S_3= бумага

- Множество профилей стратегий:

S ={(камень, камень), (камень, ножницы),
(камень, бумага), (бумага, бумага),
(бумага, камень), (бумага, ножницы),
(ножницы, ножницы), (ножницы, камень),
(ножницы, бумага)}.

Максиминные и минимаксные стратегии

Пусть дана матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Цель каждого игрока – *получить как можно больший выигрыш.*

Максимин

Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min_j a_{ij}$.

Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max_i(\min_j a_{ij})$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или ***максимин***, соответствующая стратегия 1-го игрока называется ***максиминной***.

Минимакс

Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min_j(\max_i a_{ij})$, обозначим его – $\overline{v}$ верхняя цена игры, или ***минимакс***, соответствующая стратегия 2-го игрока называется ***минимаксной***.

Схема:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\left.\begin{array}{c} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \dots \\ \min\limits_j a_{mj} \end{array}\right\} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \qquad \max_i a_{i2} \ \dots \qquad \max_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \overline{v}}$$

- Пример,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{v} = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 6 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \bar{v} = 4$$

- Соответствующие стратегии:

i_0=1(максиминная), j_0=1;2 (минимаксная).

Ситуация равновесия

- Ситуация (*i**, *j**) называется **ситуацией равновесия (седловой точкой)**,если для любых $i \in M$ и $j \in N$ выполняется неравенство

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*J}$$

- Соответствующие стратегии i^*, j^* называются ***оптимальными чистыми стратегиями*** 1-го и 2-го игроков, а $v = a_{i^* j^*}$ называется ***ценой игры***

- Элемент $a_{i^* j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце

- Теорема: Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} = \overline{v}$ (это значение и является ценой игры v)

Пример

- Имеет ли матрица игры седловую точку.

$$A = \begin{array}{cccc|c} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \bar{v} = \underline{v} = 4.$$

$$\begin{matrix} 5 & 5 & 4 & 20 \end{matrix}$$

(2,3)-ситуация равновесная, v =4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков.

Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Пример

- Имеет ли матрица игры седловую точку.

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}$$

- Ответ: $\underline{v} = \overline{v} = 22$

Смешанные стратегии

- Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1, 2, \ldots, m$.

- Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Функция выигрыша $K(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

- Если для некоторых $x^* \in S_m$ и $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ выполняется неравенство $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$, то x*, y* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков,

число $v = K(x^*, y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x*, y*) – **стратегической седловой точкой**

тройка x*, y*, v – **решением игры**.

Игры (2x2)

- Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платежная матрица

игры Г.

Если она **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры можно найти решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad x_2 = 1 - x_1$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad y_2 = 1 - y_1$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Пример.

Найти решение игры с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1. Проверим имеет ли платежная матрица седловую точку.

- 2) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v, \\ 2y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v, \\ -x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

- Решив системы, получим:

$$y_1 = \frac{5}{6} \qquad y_2 = \frac{1}{6} \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad v = \frac{7}{3}$$

- то есть $x^* = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ $\mathrm{y}^* = \left(\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$ $v = \frac{7}{3}$ -решение игры,

или $x^* = (0.33;0.67)$ $y^* = (0.83;0.17)$ $v = \frac{7}{3}$

$(2\times n)$ и $(m\times 2)$ - игры

Рассмотрим игру с платежной матрицей

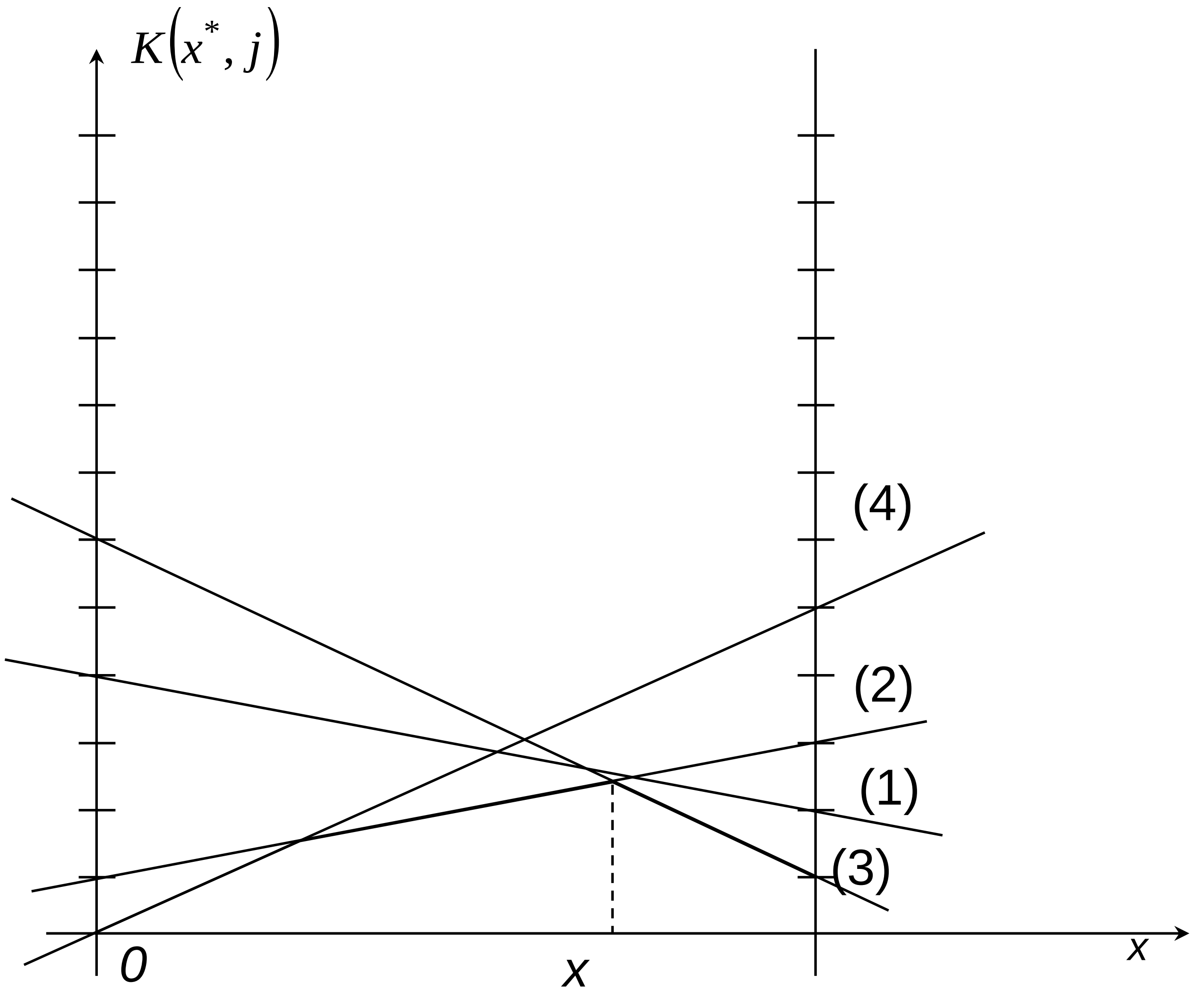
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Составим функции полезности для данных стратегий:

- $K(x^*,1) = 2x + 4(1 - x)$ (1)
- $K(x^*,2) = 3x + 1(1 - x)$ (2)
- $K(x^*,3) = 1x + 6(1 - x)$ (3)
- $K(x^*,4) = 5x + 0(1 - x)$ (4)

$$x \in [0;1]$$

- Построим прямые (1), (2), (3) и (4)


$K\left(x^*, j\right)$
(4)
(2)
(1)
(3)
0
x
x

- Оптимальная стратегия 1-го игрока - его максиминная стратегия, которая соответствует самой высокой точке нижней границы.

- Точка *A* является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Составляем системы уравнений, находим решения

- Решение исходной игры имеет вид

$$x^* = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right) \qquad y^* = \left(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0\right)$$

(номерам столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые

- координаты вектора y^*), $v = \dfrac{17}{7}$.

- Аналогично решаются $(m \times 2)$ - игры.
- Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$y^* = (y, 1 - y)$ – смешанная стратегия 2-го игрока, 1-й игрок выбирает чистые стратегии i=1,2,3.

- Функции полезности:
- (1) $K\left(1, y^*\right) = 3y + 2\left(1 - y\right)$
- (2) $K\left(2, y^*\right) = 1y + 5\left(1 - y\right)$
- (3) $K\left(3, y^*\right) = 4y + 1\left(1 - y\right), \quad y \in \left[0;1\right]$

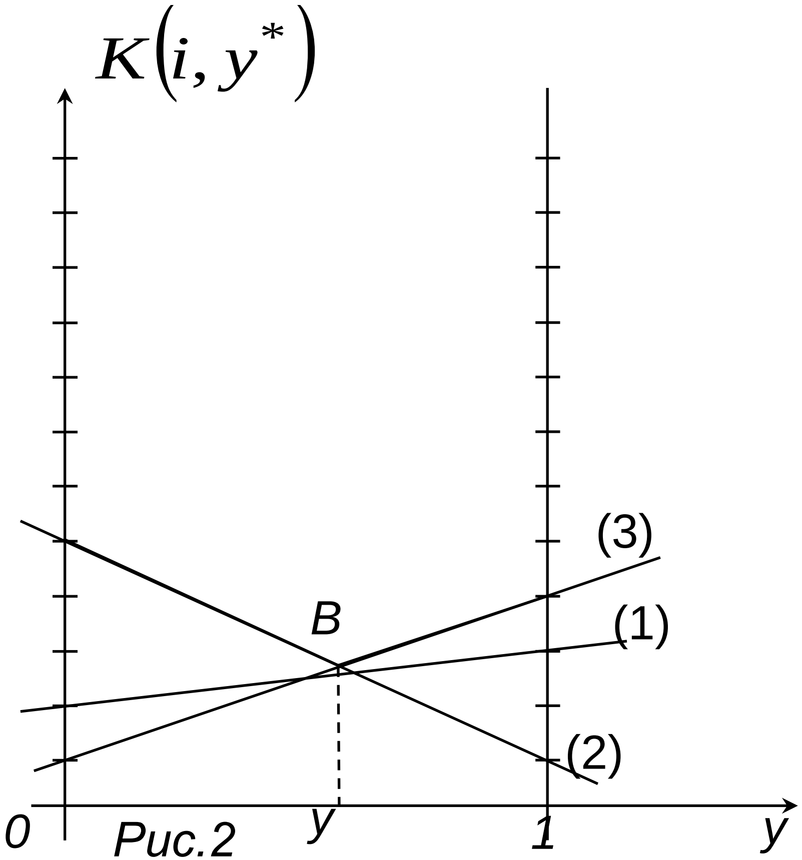


Рис.2

- Оптимальная стратегия 2-го игрока - его минимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке верхней границы – точка В.

- Точка *B* является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ответ

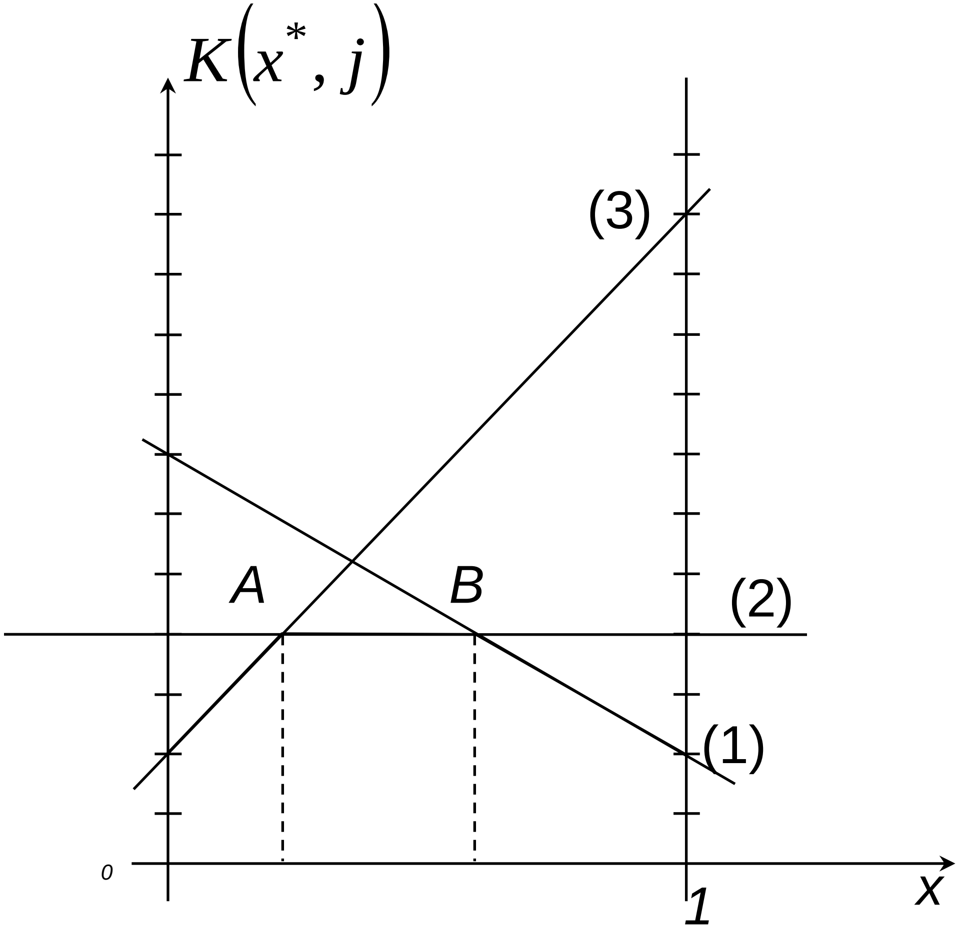
$$x_1 = \frac{3}{7} \qquad x_2 = \frac{4}{7}$$

$$y_1 = \frac{4}{7} \qquad y_2 = \frac{3}{7}$$

$$v = \frac{19}{7}$$

- Пример: найти решение игры с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



$K\left(x^*, j\right)$
(3)
A
B
(2)
(1)
0
1
x

- A – точка пересечения прямых (2) и (3),

Найдем решение игры $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{2}{9} \qquad x_2 = \frac{7}{9}$$

$$y_1 = 1 \qquad y_2 = 0$$

Решение игры для т.А

$$x^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right) \qquad y^* = (0;1;0) \qquad v = 4$$

- *B* – точка пересечения прямых (1) и (2), найдем решение игры

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{3}{5} \qquad x_2 = \frac{2}{5}$

$y_1 = 0 \qquad y_2 = 1$

Решение игры для т.В

$x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \qquad y^* = (0;1;0) \qquad v = 4$

- то есть 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий $x^* = (x_1, x_2)$ где,

$$x_1 \in \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{5}\right] \quad x_2 \in \left[\frac{7}{9}; \frac{2}{5}\right]$$

- 2-й игрок – единственную оптимальную стратегию, это чистая стратегия j=2.

- Решение исходной игры:

$$x^* = (x_1, x_2)\ \text{, где } x_1 \in \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{5}\right],\ x_2 \in \left[\frac{7}{9}; \frac{2}{5}\right],$$

$$y^* = (0;1;0)$$

$$v = 4$$

- Пример. Найти стратегии игроков А, В и цену игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Ответ.

$$x^* = \left(\frac{6}{11}; \frac{5}{11} \right) \qquad y^* = \left(0; \frac{5}{11}; 0; \frac{6}{11} \right)$$

$$v = \frac{25}{11}$$

Множество решений матричной игры

$$A_{m \times n}$$

- Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей A $(m \times n)$, необходимо рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы A.

- Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры Γ_A.

- Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in S_k$ – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на *i*-ом месте будем называть стратегию вида

$$\overline{x_i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_k) \in S_{k+1}$$

- Множество всех решений каждого игрока является линейной комбинацией найденных решений.

- Найдем, например, множество всех решений игры Γ_A с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Подматрицы (1×1) не дадут решений
- Рассмотрим подматрицы (2×2) :

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

- Для *B*: является решением игры Γ_A

$$v_B = 1,\ \ x_B = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ \ y_B = (0;1) \quad \Rightarrow$$

$$v_A = 1,\ \ x_A = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ \ y_A = (0;1;0)$$

- Для C:

$$v_C = 1 \quad x_C = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \quad y_C = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v_A = 1 \quad x_A = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \quad y_A = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$$

– является решением игры Γ_A.

Для D получим такое же решение, как для B.

- Таким образом, в игре Γ_A 1-й игрок имеет единственную оптимальную стратегию

$$x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

2-й игрок имеет множество оптимальных стратегий $y^* = \alpha_1(0;1;0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2; \alpha_1; \frac{1}{2}\alpha_2\right)$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, цена игры $v = 1$.

Доминирование стратегий

- **Опр.** Говорят, что *i*-я стратегия 1-го игрока доминирует его *k*-ю стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \in N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$

- В этом случае говорят также, что *i*-я стратегия (строка) – доминирующая, *k*-я – доминируемая.

- **Опр.** Говорят, что *j*-я стратегия 2-го игрока доминирует его *l*-ю стратегию, если $a_{ij} \le a_{il}$ для всех $i \in M$ и хотя бы для одного j $a_{ij} < a_{il}$

- В этом случае говорят также, что *j*-я стратегию (столбец) называют доминирующей, l-ю – доминируемой.

- Доминируемые стратегии исключаются из матрицы игры.

- Пример.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Ответ.

  1 игрок: 2-я стратегия доминирует 3-ю стратегию,

  2-й игрок: 1-я стратегия доминирует 3-ю стратегию.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача о назначениях

Метод назначений предназначен для оптимального подбора n "предложений" к n "потребностям"

- **Метод назначений применяется при решении задач, имеющих следующие характеристики:**
- Имеется n "предметов", которые должны быть распределены по n "пунктам назначения".
- Каждый "предмет" должен быть назначен единственному "пункту назначения".
- Оптимальный подбор назначений должен быть достигнут за счет максимизации или минимизации определенной меры эффективности назначения: прибыли или стоимости.

- **1 способ решения**

- Задача переформулируется в транспортную задачу по следующему правилу:

  – имеется *n* поставщиков, располагающих единичными ресурсами (*работники)*
  – имеется *n* потребителей с единичным спросом (работы)
  – стоимость перевозок равна добавленной стоимости, взятой со знаком «минус»

- Решается методом потенциалов, как обычно

- «Перевозки единичного объёма груза» интерпретируются как назначение работника *i* на работу *j*

- **2-й способ решения "метод назначений"**

1. В каждой строке найти наименьшее значение и вычесть его из содержимого всех ячеек этой строки матрицы. (Получится по крайней мере один ноль в каждой строке.)
2. В столбце, не содержащем нулевых ячеек, найти наименьшее значение и вычесть его из содержимого всех ячеек этого столбца матрицы.

3. "Линейный тест". В матрице назначений провести минимальное число линий (горизонталей (по строкам) и/или вертикалей (по столбцам)), вычеркивающих все нулевые ячейки матрицы.

- Если минимальное число вычеркнутых строк и столбцов равно n, оптимальное решение найдено.

- В противном случае, если минимальное число вычеркнутых строк и столбцов < n, перейти к шагу 4.

4. Среди невычеркнутых строк и столбцов найти ячейку с наименьшим значением.

Вычесть это значение из содержимого всех невычеркнутых ячеек и добавить это значение к содержимому всех ячеек, находящихся на пересечении линий. Повторить шаг 3.

- Пример. Необходимо назначить 5 видов работ любой из 5 машин (минимизировать затраты)
- Матрица назначений, содержащая затраты на выполнение работ каждой машиной:

Машины					
Работа	A	B	B	D	E
1	$5	$6	$4	$8	$3
2	$6	$4	$9	$8	$5
3	$4	$3	$2	$5	$4
4	$7	$2	$4	$5	$3
5	$3	$6	$4	$5	$5

- **Шаг 1**: приведение строк

Машины					
Работы	A	B	B	D	E
1	$2	$3	$1	$5	$0
2	$2	$0	$5	$4	$1
3	$2	$1	$0	$3	$2
4	$5	$0	$2	$3	$1
5	$3	$6	$4	$5	$5

- **Шаг 2**: приведение столбцов

Машины					
Работы	A	B	C	D	E
1	$2	$3	$1	$3	$0
2	$2	$0	$5	$2	$1
3	$2	$1	$0	$1	$2
4	$5	$0	$2	$1	$1
5	$0	$3	$1	$0	$2

- **Шаг 3**: выполнение "линейного теста"

Машины					
Работы	A	B	C	D	E
1	\$2	\$3	\$1	\$3	\$0
2	\$2	\$0	\$5	\$2	\$1
3	\$2	\$1	\$0	\$1	\$2
4	\$5	\$0	\$2	\$1	\$1
5	\$0	\$3	\$1	\$0	\$2

- число линий, вычеркивающих все нулевые ячейки, равно 4 < n = 5, то переходим к шагу 4.

- **Шаг 4**: Наименьшее значение среди содержимого невычеркнутых ячеек равно 1, 1 вычитается из содержимого всех невычеркнутых ячеек матрицы, 1 добавляется к содержимому ячеек, находящихся на пересечении линий

Машины					
Работы	A	B	C	D	E
1	$1	$3	$0	$2	$0
2	$1	$0	$4	$1	$1
3	$2	$2	$0	$1	$3
4	$4	$0	$1	$0	$1
5	$0	$4	$1	$0	$3

- Повторяем шаг 3 – "линейный тест«

Машины					
Работы	A	B	C	D	E
1	$1	$3	$0	$2	$0
2	$1	$0	$4	$1	$1
3	$2	$2	$0	$1	$3
4	$4	$0	$1	$0	$1
5	$0	$4	$1	$0	$3

- число линий, вычеркивающих все нулевые ячейки, равно 5 < n = 5, найдено оптимальное решение

- Оптимальные назначения и их стоимости
- работа 1 - машине E $3
- работа 2 - машине B $4
- работа 3 - машине C $2
- работа 4 - машине D $5
- работа 5 - машине A $3
- Суммарная стоимость $17

Недостатки метода назначений:

Метод решения задачи назначений требует, чтобы количество должностей и кандидатов было равным.

Если это условие не выполняется, необходимо увеличить матрицу так, чтобы она стала квадратной.

Например, если 5 работников претендуют на 4 должности, необходимо увеличить матрицу до размера 5*5 за счет введения фиктивной должности.

Все значения стоимостей для фиктивной должности должны полагаться равными нулю.

- Пример. Имеется 4 должности для 5 кандидатов

Матрица назначений:

Должности					
Кандидаты		1	2	3	4
	1	16	9	14	17
	2	7	19	8	14
	3	15	6	9	10
	4	19	17	11	4
	5	14	11	18	16

- Расширенная матрица назначений

Должности						
Канди даты		1	2	3	4	5
	1	16	9	14	17	0
	2	7	19	8	14	0
	3	15	6	9	10	0
	4	19	17	11	4	0
	5	14	11	18	16	0

- Пример. Имеется 6 должностей для 4 кандидатов

Матрица назначений:

Должности							
Кандидаты		1	2	3	4	5	6
	1	16	9	14	17	8	11
	2	7	19	8	14	13	18
	3	15	6	9	10	17	5
	4	19	17	11	4	9	14

- Расширенная матрица назначений

Должности							
Канди даты		1	2	3	4	5	6
	1	16	9	14	17	8	11
	2	7	19	8	14	13	18
	3	15	6	9	10	17	5
	4	19	17	11	4	9	14
	5	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

- **Пример.** Назначить четыре из пяти должностей пятерым работникам таким образом, чтобы минимизировать стоимость.

Должности						
		1	2	3	4	5
Кандидаты	1	1	9	8	19	21
	2	17	4	17	11	26
	3	16	19	7	10	4
	4	8	22	12	23	17