Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Г.И. ШУМАН
О.А. ВОЛГИНА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 3

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2009

ББК 22.143
Ш 96

Рецензенты: К.С. Солодухин, канд. экон. наук, доцент каф. ММ ВГУЭС;
Л.Я. Дубинина, ст. преп. ММ ВГУЭС

Шуман, Г.И., Волгина, О.А.
Ш 96 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2009. – 72 с.

Практикум предназначен для студентов I курса экономических специальностей, обучающихся по дополнительной программе. По каждой теме приводится необходимая теоретическая часть, в которой рассматриваются основные понятия и их свойства, а также формулы, необходимые для решения задач, описано подробное решение достаточно большого числа задач. В практикуме содержится большой список задач для самостоятельной работы студентов, контрольные работы и индивидуальные домашние задания.

Практикум может быть рекомендован и студентам заочной формы обучения.

ББК 22.143

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Высшей математики» является основой экономического образования. Знания, приобретаемые студентами в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в институте. Они необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами экономических специальностей.

В пособии предлагаемого объема невозможно полностью осветить весь изучаемый теоретический материал, поэтому в каждом разделе приведены лишь необходимые теоретические сведения и формулы, отражающие количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов, которые сопровождаются подробными решениями типовых задач, без чего невозможно успешное изучение математики.

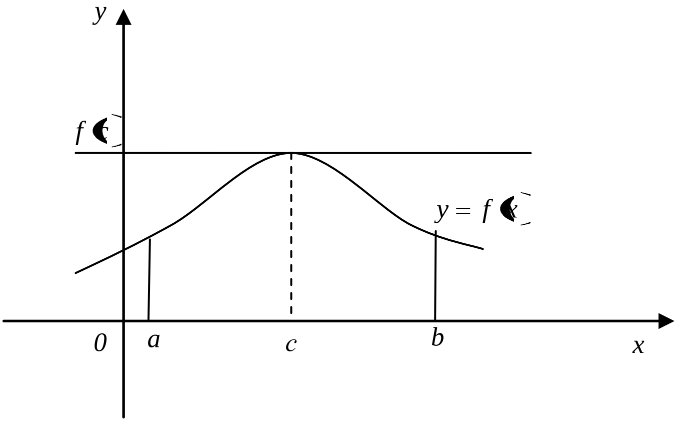
Достоинство практикума состоит в том, что при наличии такого количества задач он может быть использован как задачник, как раздаточный материал для выполнения контрольных работ по соответствующему разделу курса «Высшая математика», а так же содержит 30 различных вариантов индивидуального домашнего задания по двум разделам.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

1.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

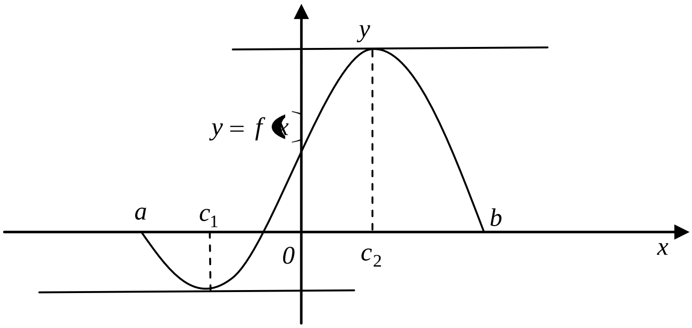
Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a;b)$ и принимает в точке *c* этого интервала наибольшее или наименьшее на $(a;b)$ значение. Если существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема означает, что касательная, проведенная к графику функции в точке $(c; f(c))$, параллельна оси *OX*.



Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает значения равные нулю: $f(a) = f(b) = 0$, то внутри интервала найдется хотя бы одна точка с, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема означает, что если функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Ролля, то найдется хотя бы одна точка $(c; f(c))$, где $c \in (a;b)$, такая, что касательная к графику функции, проведенная в этой точке, параллельна оси *OX*.



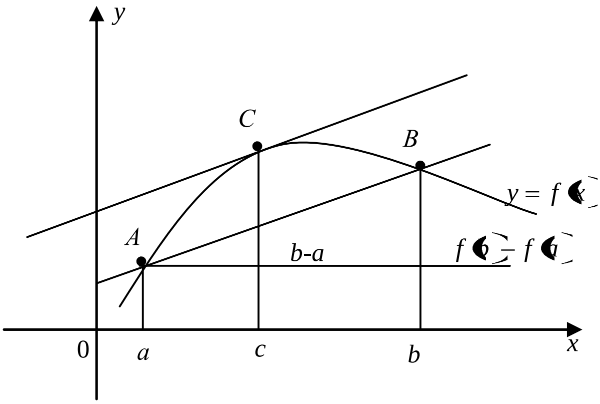
На рисунке таких точек две: c_1 и c_2, где $c_1 \in (a;b)$ и $c_2 \in (a;b)$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, для которой выполняется условие:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ или } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Полученную формулу называют формулой Лагранжа или формулой о конечном приращении.

Геометрически теорема Лагранжа означает, что существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что касательная, проведенная к графику функции в точке $(c; f(c))$, параллельна хорде *AB*, проведенной через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$.



Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

1.2. Интервалы монотонности. Экстремумы

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции по результатам исследования.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если для любых значений $x_2 > x_1$ этого промежутка выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех *x*, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, $x \neq x_0$.

Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности функции.

Теорема 1. (необходимые условия монотонности функции). Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная в каждой точке $(a;b)$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

Геометрически теорема 1 означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси *Ox* или в некоторых точках параллельны оси *Ox*.

Теорема 2 (достаточные условия монотонности функции). Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y' > 0$, то функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

В интервале возрастания (убывания) функции могут быть отдельные точки, в которых $y' = 0$.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ на возрастание и убывание.

Решение. Функция определена при всех $x \in R$. Ее производная $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$ $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in (-\infty;+\infty)$. Таким образом, данная функция возрастает на всей своей области определения.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x + 5$ на возрастание и убывание.

Решение. Областью определения данной функции является все множество действительных чисел, то есть $x \in R$. Производная функции $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$.

$$f'(x) > 0\text{, если } \begin{cases} x+1 > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1 < 0, \\ x-1 < 0, \end{cases} \Rightarrow \; x > 1 \text{ или } x < -1.$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$.

$$f'(x) < 0\text{, если } \begin{cases} x+1 > 0, \\ x-1 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1 < 0, \\ x-1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \; -1 < x < 1.$$

Таким образом, данная функция убывает на интервале $(-1;1)$

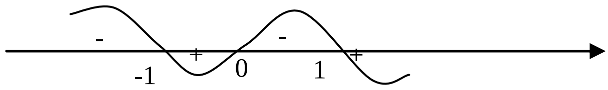
Пример 3. Исследовать функцию $y = \ln(1 - x^2)$ на возрастание и убывание.

Решение. Найдем область определения данной функции: $1 - x^2 > 0$, $x^2 < 1$, $|x| < 1$, $-1 < x < 1$.

Производная функции $y' = \dfrac{1}{1-x^2}(1 - x^2)'$, $y' = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.

$$\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)}.$$

Решим неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$:



$$y'(-2)=\frac{2\cdot(-2)}{(-2+1)(-2-1)}=\frac{-4}{-1\cdot(-3)}=-\frac{4}{3}<0;$$

$$y'(-0{,}5)=\frac{2\cdot(-0{,}5)}{(-0{,}5+1)(-0{,}5-1)}=\frac{-1}{0{,}5\cdot(-1{,}5)}=\frac{1}{0{,}75}>0;$$

$$y'(0{,}5)=\frac{2\cdot 0{,}5}{(0{,}5+1)(0{,}5-1)}=\frac{1}{1{,}5\cdot(-0{,}5)}=-\frac{1}{0{,}75}<0;$$

$$y'(2)=\frac{2\cdot 2}{(2+1)(2-1)}=\frac{4}{3\cdot 1}=\frac{4}{3}>0.$$

Получили, что при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ $y'<0$, а при $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$ $y'>0$.

Учитывая, что область определения функции есть интервал $-1<x<1$, делаем вывод: данная функция возрастает в интервале $(-1;0)$ и убывает в интервале $(0;1)$.

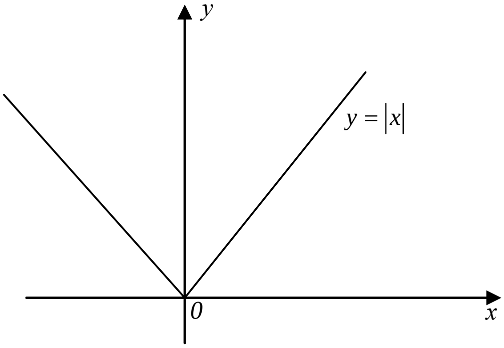
Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума). Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$.

Геометрически равенство $f'(x_0)=0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси *Ox*.

Обратная теорема неверна, то есть если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0 – точка экстремума.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y=|x|$ в точке $x=0$ производной не имеет, но точка $x=0$ – точка минимума.



Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Теорема 4 (достаточное условие существования экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку x_0 (за исключением, может быть, самой этой точки) и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то функция в точке x_0 имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Замечание. Если производная функции $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента через критическую точку, то функция в этой точке не имеет экстремума.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Из теоремы 3 и 4 вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

а) найти критические точки функции $y = f(x)$;

б) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

в) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

д) в соответствии с теоремой 4 (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $y = (1 - x^2)^3$.

Решение. Область определения данной функции – множество всех действительных чисел, то есть $x \in R$.

Согласно правилу исследования функции на экстремум:

а) находим производную функции $y' = 3(1-x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1-x^2)^2$ и критические точки. Полагая $y' = 0$, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, поэтому точки x_1, x_2 и x_3 являются критическими;

б) исследуем критические точки, определяя знак y' слева и справа от каждой точки. Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записать в виде следующей таблицы:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	+	0	-	0	-
y	↗ возр.	нет экстр.	↗ возр.	max	↘ убыв.	нет экстр.	↘ убыв.

В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси, между ними расположены промежутки, на которые критические точки разбивают числовую ось, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в каждом из промежутков, полученные путем вычисления значения производной в какой-либо точке соответствующего промежутка, то есть

$$y'(-2) = -6(-2)\left(1-(-2)^2\right)^2 = 12\cdot(1-4)^2 = 108 > 0,$$

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -6\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = 3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{16} > 0,$$

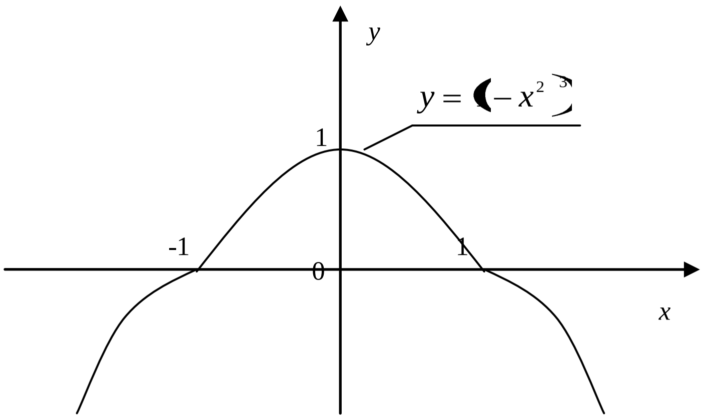
$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -6\cdot\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = -3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{27}{16} < 0,$$

$$y'(2) = -6\cdot 2\cdot(1-2^2)^2 = -12\cdot 9 = -108 < 0.$$

В третьей строке – заключение о проведении функции: возрастание функции (↗), убывание (↘).

Так как производная поменяла свой знак при переходе аргумента x только через точку $x=0$, поэтому данная функция имеет одну точку экстремума $x=0$. Эта точка является точкой максимума, так как знак производной поменялся с плюса на минус.

$Y_{max}(0)=(1-0^2)^3=1$. До точки $x=0$ в интервале $(-\infty;0)$ функция неизменно возрастает, а после нее в интервале $(0;+\infty)$ она неизменно убывает.



Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y=x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Найдем область определения функции: $1-x^2\geq 0$, $x^2\leq 1$, $|x|\leq 1$ или $-1\leq x\leq 1$. Таким образом данная функция определена и непрерывна во всех точках отрезка $[-1;1]$.

а) найдем производную функции:

$$y'=(x)'\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=$$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{1-x}}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная обращается в нуль, если $1-2x^2=0$, $x^2=\frac{1}{2}$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и не существует при $x_{3,4}=\pm 1$.

Однако критическими точками являются только точки x_1 и x_2, они лежат внутри области определения функции, то есть внутри отрезка $[-1;1]$. Точки x_3 и x_4 не являются критическими, так как они лежат не внутри области определения функции y, а на ее границах.

б) исследуем критические точки по знаку производной y' в соседних с ними точках. Составим следующую таблицу:

x	$\left[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$
y'	-	0	+	0	-
y	↘ убывает	min.	↗ возр.	max	↘ убыв.

$$y'(-0{,}9)=\frac{1-2\cdot(-0{,}9)^2}{\sqrt{1-(-0{,}9)^2}}=\frac{-0{,}68}{0{,}44}\approx-1{,}55<0\,,\quad y'(0)=\frac{1-2\cdot 0}{\sqrt{1-0^2}}=\frac{1}{1}=1>0\,,$$

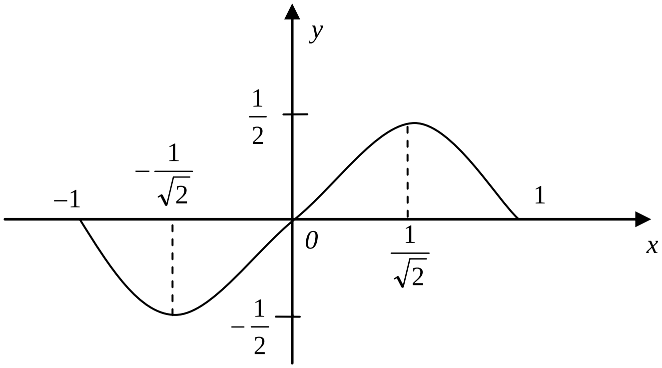
$$y'(0{,}9)=\frac{1-2\cdot 0{,}9^2}{\sqrt{1-0{,}9^2}}=\frac{-0{,}68}{0{,}44}\approx-1{,}55<0\,.$$

Согласно полученной таблице функция y имеет две точки экстремума: точку минимума $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$y_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\,,$$

и точку максимума $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

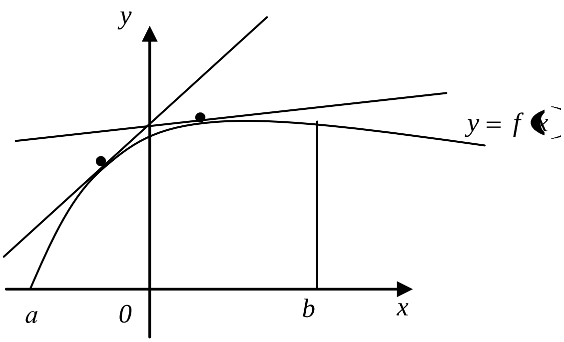
$$y_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\,.$$



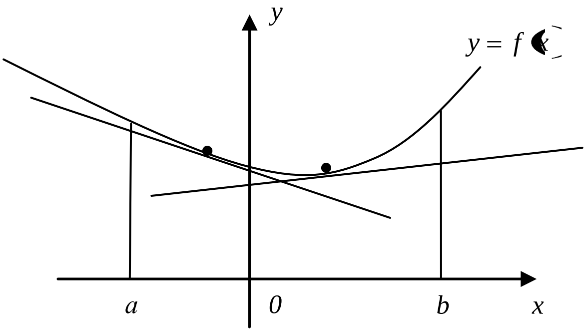
1.3. Выгнутость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вниз (или вогнутым) на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (или просто выпуклым) на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

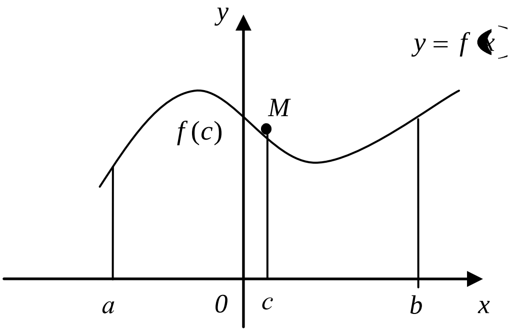
Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.



Кривая $y = f(x)$ выпуклая на интервале $(a;b)$.



Кривая $y = f(x)$ вогнутая на интервале $(a; b)$.



Точка $M(c; f(c))$ – точка перегиба графика функции на интервале $(a; b)$.

Теорема 5 (достаточный признак выпуклости и вогнутости). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в $(a; b)$ выпуклый, если же $f''(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a; b)$ – график функции вогнутый.

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 6 (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции при переходе аргумента через точку x_0, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, меняет знак. То точка графика $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Теорема 7 (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале $(a; b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$ и пусть точка $x_0 \in (a; b)$ является абсциссой точки перегиба графика данной функции. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Могут встречаться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции не существует, однако точка является абсциссой точки перегиба.

Абсциссы точек перегиба графика функции $y = f(x)$, являются точками, в которых меняется поведение производной y'. Поэтому их можно найти по следующему правилу:

а) найти y'' и значения аргумента x, в которых $y'' = 0$ или y'' не существует, а функция непрерывна и которые лежат внутри области ее определения;

б) определить знак y'' слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее y'' имеет разные знаки.

Интервалы, где график функции $y = f(x)$ выпуклый и где он вогнутый, определяются из условия, что их границами могут быть только абсциссы точек перегиба, точки разрыва и граничные точки области определения функции.

Пример 6. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось. Найдем вторую производную функция: $y' = 15x^4 - 20x^3$, $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$.

Согласно правилу найдем точки перегиба:

а) ищем точки, в которых $y'' = 0$ или не существует, а функция непрерывна и которые лежат внутри области определения:

$y'' = 0$, $60x^2(x-1) = 0$, $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки являются искомыми. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду;

б) исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждого из них. Запишем это исследование в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	-	0	-	0	+
y	$\cap$ выпуклая		$\cap$ выпуклая	2	$\cup$ вогнутая.

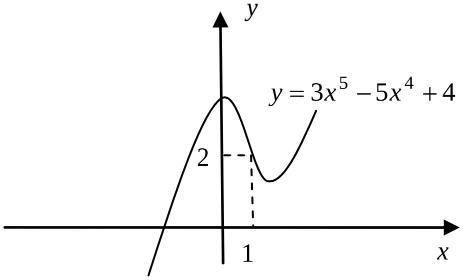
$$y''(-1)=60(-1)^2(-1-1)=60(-2)=-120<0,$$

$$y''(0{,}5)=60(0{,}5)^2(0{,}5-1)=15\cdot(-0{,}5)=-7{,}5<0,$$

$$y''(2)=60\cdot 2^2(2-1)=240>0.$$

Из таблицы следует, что $x=1$ есть абсцисса точки перегиба графика функции: $y(1)=3\cdot 1^5-5\cdot 1^4+4=2$.

Так как данная функция непрерывна, то во всем интервале $(-\infty;1)$ график выпуклый, а во всем интервале $(1;+\infty)$ – вогнутый.



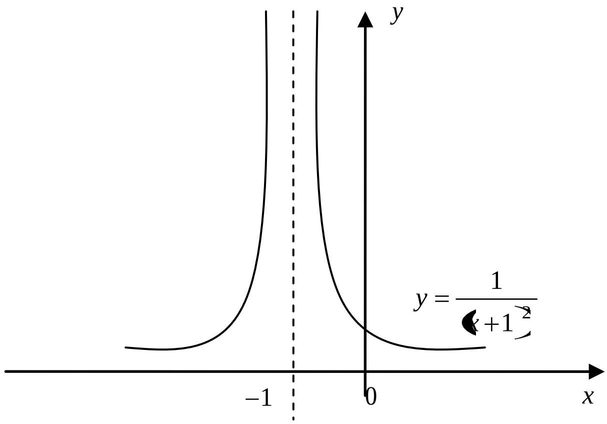
Пример 7. Исследовать на выпуклость и вогнутость функцию $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ и найти точки перегиба графика.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось, кроме точки $x=-1$.

Найдем вторую производную функции:

$$y'=\frac{-2}{(x+1)^3},\ y''=-2\left((x+1)^{-3}\right)'=-2\cdot(-3)(x+1)^{-4}=\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Здесь y'' не может обратиться в нуль, а при $x = -1$ она не существует. Точка $x = -1$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке функция имеет разрыв. При $x < -1$ $y'' > 0$, при $x > -1$ $y'' > 0$, поэтому график данной функции вогнутый на всей своей области определения.



Пример 8. Исследовать на выпуклость и вогнутость и точки перегиба график функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось, значит функция непрерывна всюду.

Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9, \quad y'' = 6x - 6.$$

Найдем критические точки второго порядка, исходя из условия $y'' = 0$: $6x - 6 = 0$, $x = 1$. Других критических точек функция не имеет, так как y'' существует всюду. Исследуем полученную точку на перегиб согласно правилу, для этого составим таблицу:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	-	0	+
y	$\cap$ выпуклая	-2	$\cup$ вогнутая.

$$y''(0) = 6\cdot 0 - 6 = -6 < 0,$$

$$y''(2) = 6\cdot 2 - 6 = 6 > 0.$$

Из таблицы следует, что $x = 1$ есть абсцисса точки перегиба графика функции, который выпуклый при $x \in (-\infty;1)$ и вогнутый при $x \in (1;+\infty)$.

$$y(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 9 = -2.$$

1.4. Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты.

Напомним, что асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на прямой, стремиться к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Если при $x = a$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, то есть если при $x \to a - 0$ или при $x \to a + 0$ функция $f(x)$ стремиться к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x = a$ является ее вертикальной асимптотой, параллельной оси Oy. Если функция не имеет точек разрыва второго рода, то график функции не имеет вертикальных асимптот.

Пример 9. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, если они существуют.

Решение. Найдем область определения функции:

$$x^2 - 4 \neq 0,\ x^2 \neq 4,\ x_{1,2} \neq \pm 2.$$

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{x^2-4} = \lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \left[\frac{1}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \frac{1}{-4\cdot(-б.м.)} = \frac{1}{б.м.} = +\infty \right] = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \left[\frac{1}{(-2+0-2)(-2+0+2)} = \frac{1}{-4\cdot б.м} = -\infty \right] = -\infty.$$

Так как слева от точки $x=-2$ функция стремиться к бесконечности, а справа – к минус бесконечности, то есть в точке $x=-2$ функция имеет разрыв второго рода, тогда прямая $x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\left[\frac{1}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{1}{-б.м.\cdot 4}=-\infty\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\left[\frac{1}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{1}{б.м.\cdot 4}=+\infty\right]=+\infty.$$

Рассуждая аналогично, делаем вывод, что прямая $x=2$ также является вертикальной асимптотой графика данной функции.

Наклонные асимптоты графика функции $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k=\lim_{x\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

при одинаковом в общих формулах поведении x, то есть в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

Если k или b не существуют или равны бесконечности, то график функции не имеет наклонной асимптоты.

В частности, если $k=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Если b -конечное число, тогда $y=b$ – уравнение горизонтальной асимптоты.

Замечание 1. Асимптоты графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении k и b следует отдельно рассматривать случай, когда $x\to+\infty$ и когда $x\to-\infty$.

Замечание 2. Вертикальную асимптоту (если она существует) $x=a$ график функции пересекать не может (т.к. в точке $x=a$ функция имеет разрыв второго рода). Наклонные асимптоты график функции может пересекать.

Пример 10. Найти наклонные асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{x^2-4}$, если они существуют.

Решение. В примере 9 была уже рассмотрена данная функция, и был сделан вывод, график функции имеет две вертикальные асимптоты $x=\pm 2$.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x^2-4)x}=\left[\frac{1}{((-\infty)^2-4)\cdot(-\infty)}=0\right]=0\,,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-4}=\left[\frac{1}{(-\infty)^2-4}=\frac{1}{\infty}=0\right]=0\,.$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x^2-4)x}=\left[\frac{1}{(\infty^2-4)\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0\right]=0\,,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=\left[\frac{1}{\infty^2-4}=\frac{1}{\infty}=0\right]=0\,.$$

Таким образом, при $x\to\pm\infty$, $k=0$ и $b=0$, значит график данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ (прямая совпадает с осью Ox).

Пример 11. Найти асимптоты графика функции $y=x+2arctgx$.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось, функция всюду определена, поэтому вертикальных асимптот у графика функции нет. Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2arctgx}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty};\textit{воспольз. правилом Лопиталя}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2arctgx)'}{x'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{2}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{1+x^2}\right)=$$

$$=\left[1+\frac{2}{\infty}=1+0\right]=1\,,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2arctgx-x)=\lim_{x\to-\infty}2arctgx=$$

$$=\left[2\cdot arctg(-\infty)=2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\pi\,.$$

Поэтому $y=x-\pi$ наклонная асимптота.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2arctgx}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2arctgx)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2arctgx)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+x^2}\right)=1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(x + 2arctgx - x\right) = \lim_{x\to+\infty} 2arctgx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\ .$$

Получим, что $y = x + \pi$ – вторая наклонная асимптота.

Пример 12. Найти асимптоты графика функции $y = x^2 5x + 1$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, поэтому вертикальных асимптот графика функции нет. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+5x+1\right)'}{x'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2x+5\right) = -\infty\ .$$

Так как при $x\to-\infty$ угловой коэффициент асимптоты не существует, поэтому график функции не имеет наклонной асимптоты.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+5x+1\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{1} = +\infty\ .$$

Значит и при $x\to+\infty$ график данной функции не имеет наклонной асимптоты.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти интервалы монотонности функций:

а) $y = 1 - 4x - x^2$;

б) $y = \left(x-2\right)^5\cdot\left(2x+1\right)^6$;

в) $y = x - e^x$;

г) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

2. Найти экстремумы функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2$;

б) $y = -x^2\sqrt{x^2+1}$;

в) $y = x - \ln\left(1+x\right)$;

г) $y = x - \ln\left(1+x^2\right)$.

3. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба:

а) $y = x^5 + 5x - 6$;

б) $y = xe^x$;

в) $y = \left(x+1\right)^8\left(x-2\right)$;

г) $y = x^2\ln x$.

4. Найти асимптоты кривых:

а) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; в) $y=x^2e^{-x}$;

б) $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$; г) $y=\ln(1+x)$.

Ответы: 1. а) $(-\infty;-2)$ – возрастает, $(-2;+\infty)$ – убывает; б) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ – возрастает, $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{18}\right)$ – убывает, $\left(\dfrac{11}{18};+\infty\right)$ – возрастает;

в) $(-\infty;0)$ – возрастает, $(0;+\infty)$ – убывает; г) $(0;1)$ – убывает, $(1;e)$ – убывает, $(e;+\infty)$ – возрастает. **2.** а) $y_{\max}=0$ при $x=0$, $y_{\min}=-1$ при $x=1$; б) $y_{\max}=0$ при $x=0$; в) $y_{\min}=0$ при $x=0$; г) монотонно возрастает. **3** а) $(-\infty;0)$ – выпукла, $(0;+\infty)$- вогнута, $(0;-6)$ – точка перегиба; б) $(-\infty;-2)$ – выпукла, $(-2;+\infty)$ – вогнута, $\left(-2;\dfrac{-2}{e^2}\right)$ – точка перегиба; в) $(-\infty;0)$ – выпукла, $(0;+\infty)$ – вогнута; $(0;-2)$ – точка перегиба; г) $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{e}^3}\right)$ – выпукла, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}};+\infty\right)$ – вогнута, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}};-\dfrac{3}{2e^3}\right)$ – точка перегиба. 4. а) $x=-2$ – вертикальная, $y=x-4$ – наклонная;

б) $x=1$, $x=3$ – вертикальные, $y=0$ – горизонтальная; в) вертикальных нет, $y=0$ – горизонтальная; г) $x=-1$ – вертикальная.

1.5. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y=f(x)$ и построение ее графика удобно выполнять по следующей схеме:

а) найти область определения функции. Точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках;

б) выяснить, является ли функция четной (в этом случае график функции симметричен относительно оси *Oy*), нечетной (график функции симметричен относительно начала координат), общего вида или периодический (через отрезок длинной, равной периоду, график функции повторяется);

в) найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$);

д) найти асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные или наклонные);

е,ж) найти интервалы монотонности (промежутки возрастания и убывания функции, для этого решить неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$) и экстремумы функции (найти точки *max* и *min* и соответствующие значения функции в этих точках). Для удобства составляем таблицу, как в примере 4;

з,и) найти интервалы выпуклости (интервалы, в которых $y'' < 0$), вогнутости (интервалы, в которых $y'' > 0$), точки перегиба графика функции. Для удобства составляем таблицу, как в примере 6.

На основании проведенного исследования построить график функции. Если результатов исследования окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения. Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования.

Пример 13. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

Решение. Проведем исследование функции по общей схеме:

а) областью определения данной функции является вся числовая ось, кроме точки $x = 0$.

Найдем односторонние пределы функции в окрестности точки $x = 0$:

$$\lim_{x\to -0} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{(-0)^3+4}{(-0)^2} = \frac{4}{б.м.} = +\infty \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +0} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{(+0)^3+4}{(+0)^2} = \frac{4}{б.м.} = +\infty \right] = +\infty.$$

В точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный). Во всех других точках числовой оси функция непрерывна;

б) исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}, \quad y(-x) = \frac{-x^3+4}{x^2}.$$

$y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, поэтому данная функция не обладает свойством четности или нечетности, то есть является функцией общего вида. Функция непериодична;

в) найдем точки пересечения графика функции с осями координат: при $x = 0$ y не существует, поэтому с осью Oy график функции не пересекается; при $y = 0$ $x = -\sqrt[3]{4}$, значит график функции пересекает ось Ox в точке $(-\sqrt[3]{4};0)$. Найдем интервалы знакопостоянства функции:

$y > 0$ при $\begin{cases} x^3 + 4 > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3 + 4 < 0, \\ x^2 < 0. \end{cases}$

Вторая система неравенств не имеет решений, так как $x^2 \geq 0$ при любых действительных значениях *x*, поэтому $y > 0$ при $x > -\sqrt[3]{4}$; $y < 0$ при $x^3 + 4 < 0$, $x < -\sqrt[3]{4}$;

д) найдем асимптоты графика функции. В первом пункте исследования получили, что в точке $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв, поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^2 \cdot x} = \lim_{x\to-\infty} = \frac{x^3+4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3+4)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} = \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} =$$

$$= \left[\frac{4}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Прямая $y = x$ – наклонная асимптота.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+4)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} =$$

$$= \left[\frac{4}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Так как при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ и k и b совпали, поэтому прямая $y = x$ – единственная наклонная асимптота;

е.ж) для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции найдем критические точки:

$$y' = \frac{(x^3+4)' \cdot x^2 - (x^3+4)(x^2)'}{x^4} = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(3x^3 - 2x^3 - 8)}{x^4} =$$

$= \dfrac{x^3-8}{x^3}$. $y' = 0$ при $x^3 - 8 = 0$, $x = 2$. При $x = 0$ y' не существует. Полученные значения $x = 0$ и $x = 2$ разбивают числовую ось на три промежутка.

Для наглядности исследования запишем в виде таблицы:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	не сущ.	-	0	+
y	↗ возр.	не сущ	↘ убыв	min	↗ возр.

$$y'(-1) = \frac{(-1)^3 - 8}{(-1)^3} = \frac{-9}{-1} = 9 > 0,$$

$$y'(1) = \frac{1^3 - 8}{1^3} = \frac{-7}{1} = -7 < 0,$$

$$y'(3) = \frac{3^3 - 8}{3^3} = \frac{19}{27} > 0.$$

Критическая точка $x = 2$ (она является внутренней точкой области определения данной функции) является точкой минимума, $y_{\min} = \dfrac{2^3+4}{2^2} = \dfrac{8+4}{4} = 3$.

Точка $x = 0$ не является критической точкой, так как не принадлежит области определения функции. Но при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ $y \to +\infty$.

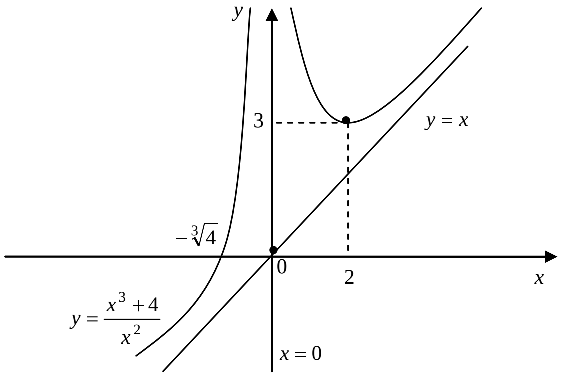
Функция возрастает при $x \in (-\infty;2)$ и $x \in (2;+\infty)$, а при $x \in (0;2)$ – убывает;

з,и) найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба. Найдем y'':

$$y''=\frac{\left(x^3-8\right)'\cdot x^3-\left(x^3-8\right)\left(x^3\right)'}{x^6}=\frac{3x^2\cdot x^3-\left(x^3-8\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{3x^2\left(x^3-x^3+8\right)}{x^6}=$$
$$=\frac{24}{x^4}.$$

Вторая производная в нуль не обращается ни при каких значений x; в точке $x=0$ y'' не существует. Так как $\frac{24}{x^4}>0$ при $\forall x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$, поэтому график функции на всей своей области определения вогнутый. Точек перегиба у графика нет.

Используя полученные результаты исследования, построим график данной функции:



Пример 14. Исследовать функцию $y=x^2e^{1/x}$ и построить ее график.

Решение. а) данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$.

$$\lim_{x\to-0}x^2e^{\frac{1}{x}}=\left[\left(-0\right)^2e^{-1/0}=\frac{0}{e^{\infty}}=0\right]=0;$$

$$\lim_{x\to+0}x^2e^{\frac{1}{x}}=\left[0^2e^{1/0}=0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{\left(\frac{2}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{2} = \left[\frac{e^{+\infty}}{2} = +\infty\right] = +\infty$$

Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный). В остальных точках числовой оси данная функция непрерывна;

б) найдем $y(-x)$:

$y(-x) = (-x)^2 e^{-1/x} = x^2 e^{-1/x}$, $\quad y(-x) \neq y(x)$, $\quad y(-x) \neq -y(x)$, поэтому функция является функцией общего вида, не периодическая;

в) точки пересечения графика функции с осями координат:

при $x = 0$ y не существует, а значит и точек пересечения графика с осью Oy не существует; $y = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции и согласно пункту а) начало координат является предельной точкой левой ветви графика.

Найдем интервалы знакопостоянства функции:

$y > 0$ при всех значениях x из области определения функции, так как $x^2 \geq 0$ для любых значений x, $e^{1/x} > 0$ для любых значений x по свойствам показательной функции. Таким образом данная функция положительна на всей своей области определения;

д) найдем асимптоты графика функции:

вертикальной асимптотой графика функции является прямая $x = 0$, так как при $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв:

$k = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2 e^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x e^{1/x} = \left[-\infty\cdot e^0 = -\infty\cdot 1\right] = -\infty$, значит наклонной асимптоты графика функции при $x \to \infty$ не существует;

$k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 e^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x e^{1/x} = \left[\infty\cdot e^0 = \infty\cdot 1\right] = \infty$. Наклонных асимптот график функции не имеет;

е,ж) исследуем функцию на монотонность и экстремум: найдем

$y' = (x^2)' e^{1/x} + x^2 e^{1/x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = 2xe^{1/x} + x^2 e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xe^{1/x} - e^{1/x} =$

$= e^{1/x}(2x-1)$.

$y''=0$, если $2x-1=0$, $x=\dfrac{1}{2}$. Точка $x=\dfrac{1}{2}$ является критической, так как она является внутренней точкой области определения; y' не существует в точке $x=0$, но она не является критической, так как это точка разрыва. Исследования запишем в виде таблицы:

x	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$
y'	-	не сущ.	-	0	+
y	↘ убыв	не сущ	↘ убыв	min	↗ возр.

$$y'(-1)=e^{-1}(2(-1)-1)=-3e^{-1}<0,$$

$$y'\left(\frac{1}{4}\right)=e^{4}\left(2\cdot\frac{1}{4}-1\right)=e^{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<0,$$

$$y'(1)=e^{1}(2\cdot1-1)=e\cdot1>0.$$

Критическая точка $x=\dfrac{1}{2}$ является точкой минимума, $y_{\min}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}e^{\frac{1}{1/2}}=\dfrac{1}{4}e^{2}$. В интервалах $(-\infty;0)$ и $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ функция убывает, а в интервале $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ она возрастает;

и,к) исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и перегиб.

$$y''=\left(e^{1/x}\right)'\cdot(2x-1)+e^{1/x}(2x-1)'=e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)(2x-1)+e^{1/x}\cdot2=$$

$$=e^{1/x}\left(-\frac{2x}{x^{2}}+\frac{1}{x^{2}}+2\right)=e^{1/x}\left(\frac{-2x+1+2x^{2}}{x^{2}}\right)=e^{1/x}\cdot\frac{2x^{2}-2x+1}{x^{2}};$$

$y''=0$, если $2x^{2}-2x+1>0$ для всех x из области определения функции, так как $D=-4<0$, а старший коэффициент $2>0$, $x^{2}>0$ для всех x из области определения функции, $e^{1/x}>0$ как показательная функция, поэтому y'' не обращается в нуль нигде и существует во всей области определения функции. Делаем вывод,что график функции не имеет точек перегиба; а так как $y'' > 0$ на всей области определения функции, значит график функции всюду вогнутый.

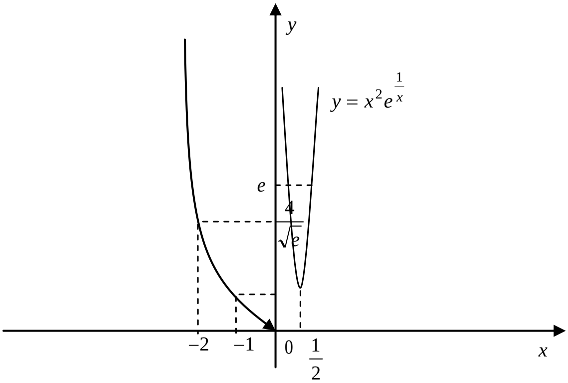
Так как результатов исследований не достаточно для построения графика функции, найдем дополнительные точки, беря подходящие значения y из данного уравнения:

при $x = -2$ $y = (-2)^2 e^{-1/2} = \dfrac{4}{\sqrt{e}}$, то есть точка $\left(-2; \dfrac{4}{\sqrt{e}}\right)$;

при $x = -1$ $y = (-1)^2 e^{-1/1} = \dfrac{1}{e}$, то есть точка $\left(-1; \dfrac{1}{e}\right)$;

при $x = 1$ $y = 1^2 e^1 = e$, то есть точка $(1; e)$.

Строим график функции:



Индивидуальное домашнее задание по теме «Применение производной к исследованию функций»

Исследовать функции и построить их графики:

1. а) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$; б) $y = (x + 3) e^{-2(x+1)}$.

2. а) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$; б) $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

3 а) $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$; б) $y = 3 \ln \dfrac{x}{x - 3} - 1$.

4. а) $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}$; б) $y = (3 - x) e^{x-2}$.

5. а) $y=\frac{12x}{9+x^2}$; б) $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$.

6. а) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$; б) $y=\ln\frac{x}{x+2}+1$.

7. а) $y=\frac{4-x^3}{x^2}$; б) $y=(x-2)e^{3-x}$.

8. а) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$; б) $y=\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

9. а) $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$; б) $y=3-3\ln\frac{x}{x+4}$.

10. а) $y=\frac{x^2-6x+4}{3x-2}$; б) $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$.

11. а) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; б) $y=\frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

12. а) $y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$; б) $y=\ln\frac{x}{x-2}-2$.

13. а) $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$; б) $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

14. а) $y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; б) $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$.

15. а) $y=\frac{-8x}{x^2+4}$; б) $y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$.

16. а) $y=\frac{21-x^2}{7x+9}$; б) $y=(4-x)e^{x-3}$.

17. а) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y=-\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

18. а) $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$; б) $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$.

19. а) $y=\frac{x^2-11}{4x-3}$; б) $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$.

20. а) $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$; б) $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{(x+2)}$.

21. а) $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$; б) $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

22. а) $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$; б) $y=-(x+1)e^{(x+2)}$.

23. а) $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$; б) $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

24. а) $y=\dfrac{1}{x^4-1}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x+3}-1$.

25. а) $y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$; б) $y=-(x+3)e^{2(x+2)}$.

26. а) $y=\dfrac{x^2-32}{x^2}$; б) $y=\dfrac{e^{2(1-x)}}{2(1-x)}$.

27. а) $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$; б) $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$.

28. а) $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$; б) $y=(x+4)e^{-(x+3)}$.

29. а) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{(x+3)^2}$; б) $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

30. а) $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$; б) $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

1.6. Дифференциал функции

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$. Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с

Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 .$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют главной частью приращения функции Δy.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, линейная относительно Δx, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1.1)$$

Дифференциал dy называют также дифференциалом первого порядка. Найдем дифференциал независимой переменной x, то есть дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то согласно формуле (1.1) имеем $dy = dx = \Delta x$, то есть дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (1.1) можно записать так:

$$dy = f'(x)dx , \qquad (1.2)$$

иными словами, дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Из формулы (1.2) следует равенство $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\dfrac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

Пример 15. Найти дифференциал функции $f(x) = \cos 2x + x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x)$:

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot (2x)' + 2x = 2x - 2\sin 2x .$$

По формуле (1.2) находим dy:

$$dy = (2x - 2\sin 2x)dx .$$

Пример 16. Найти дифференциал функции $f(x) = 3^{2x+1} - \ln tgx$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(3^{2x+1}\right)' - \left(\ln tgx\right)' = 3^{2x+1} \cdot \ln 3 (2x+1)' - \frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' = 3^{2x+1} \cdot \ln 3 \cdot 2 -$$

$$- \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot 3^{2x+1} \cdot \ln 3 - \frac{1}{\sin x \cos x} = 2 \cdot 3^{2x+1} \cdot \ln 3 - \frac{2}{\sin 2x}.$$

Тогда согласно формуле (1.2) получаем:

$$dy = \left(2 \cdot 3^{2x+1} \cdot \ln 3 - \frac{2}{\sin 2x} \right) dx.$$

Основные теоремы о дифференциалах

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые в точке x функции, тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяется следующими формулами:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du = u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad (v \neq 0).$$

Теорема 2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По тереме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или

$$y'_x dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx.$$

Так как $u'_x \cdot dx = du$, а $y'_x dx = dy$, тогда получаем: $dy = y'_u du$

Сравнивая формулы $dy = y'_x dx$ и $dy = y'_u du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(a^u)=(a^u)'_u\cdot du=a^u\cdot\ln a\cdot du$.

Таблица дифференциалов

1. $d(u\pm v)=du\pm dv$;
2. $d(u\cdot v)=v\cdot du=u\cdot dv$, в частности, $d(cu)=c\cdot du$;
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\dfrac{c}{u}\right)=-\dfrac{c\cdot du}{u^2}$;
4. $dy=y'_x\cdot dx$, если $y=f(x)$;
5. $dy=y'_u\cdot du$, если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$;
6. $d(c)=0$;
7. $d(u^\alpha)=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot du$;
8. $d(a^u)=a^u\cdot\ln a\cdot du$, в частности, $d(e^u)=e^u du$;
9. $d(\log_a u)=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}du$, в частности, $d(\ln u)=\dfrac{1}{u}du$
10. $d(\sin u)=\cos u\cdot du$;
11. $d(\cos u)=-\sin u\cdot du$;
12. $d(tgu)=\dfrac{1}{\cos^2 u}du$;
13. $d(ctgu)=-\dfrac{1}{\sin^2 u}du$;
14. $d(\arcsin u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$;
15. $d(\arccos u)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$;
16. $d(arctgu)=\dfrac{1}{1+u^2}du$;
17. $d(arcctgu)=-\dfrac{1}{1+u^2}du$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Функции двух переменных. Основные понятия и определения

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.

Определение. Если каждой паре $(x; y)$ значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D, соответствует одно определенное действительное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D.

Переменные x и y называются аргументами, или независимыми переменными, а z – зависимой переменной (функцией). Множество D - область определения функции и обозначается $D(f)$ или $D(z)$. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется областью изменения этой функции и обозначается $E(f)$ или $E(z)$.

Символически функция двух переменных обозначается так:
$z = f(x; y)$, $z = F(x; y)$ и т.д.

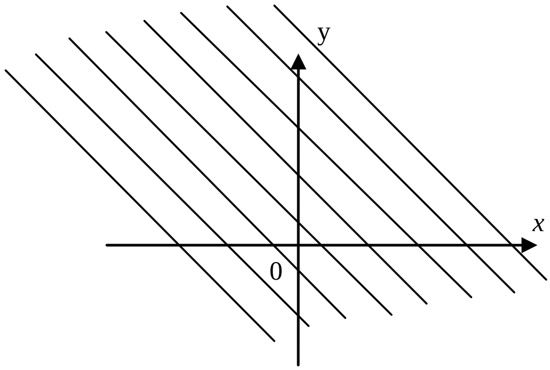
Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0; y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют частным значением функции.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило, аналитическим способом, когда функция задается с помощью формулы.

Если функция z задана с помощью аналитического выражения, то областью ее определения является множество всех точек плоскости Oxy таких, для которых данное выражение имеет смысл (или существует) и определяет действительное значение функции.

Пример 1. Найти область определения функции $z = 2x - 5y + 7$.

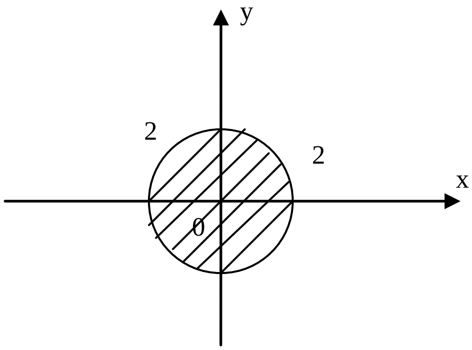
Решение. Аналитическое выражение $2x - 5y + 7$ имеет смысл при любых значениях x и y. Следовательно, областью определения функции является вся плоскость Oxy :



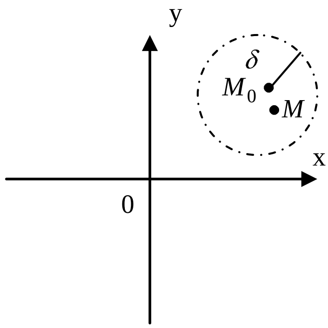
Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Для того, чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, то есть x и y должны удовлетворять неравенству $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$.

Все точки $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству, лежат внутри круга радиуса 2 с центром в начале координат и на границе этого круга.



Определение. Множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)}^2 < \delta$, называется δ – окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$. Другими словами, δ – окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.



Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки.

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $\left|f(x;y) - A\right| < \varepsilon$.

Записывают:

$A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ или $A = \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой её окрестности;

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, то есть

$\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются точками разрыва этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые линии разрыва. Так функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

2.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение переменной y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f_x'(x_0; y_0)$, $\left. f_x' \right|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной), (формулы и правила вычисления производной функции одной переменной см. «Высшая математика», практикум, часть 2).

Пример 3. Найти частные производные функции $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$.

Решение. Считая z функцией только одной переменной x, находим

$$\underset{y-const}{z'_x} = (x^3)'_x + (5xy^2)'_x - (y^3)_x{}' = 3x^2 + 5y^2 - 0 = 3x^2 + 5y^2.$$

Аналогично, считая z функцией только y, получим

$$\underset{x-const}{z'_y} = (x^3)_y{}' + (5xy^2)_y{}' - (y^3)_y{}' = 0 + 5x \cdot 2y - 3y^2 = 10xy - 3y^2.$$

Пример 4. Найти частные производные от функции $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Решение. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, получим

$$\underset{y-const}{z_x{}'} = \left(\frac{x}{y}\right)_x' + \left(\frac{y}{x}\right)_x' = \left(\frac{1}{y} \cdot x\right)_x' + \left(y \cdot \frac{1}{x}\right)_x' = \frac{1}{y} \cdot x' + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{y} \cdot 1 + y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}.$$

$$\underset{x-const}{z_y{}'} = \left(\frac{x}{y}\right)_y' + \left(\frac{y}{x}\right)_y' = \left(x \cdot \frac{1}{y}\right)_y' + \left(\frac{1}{x} \cdot y\right)_y' = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{x} \cdot y' =$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{x} \cdot 1 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$$

Пример 5. Найти частные производные от функции $z = \sqrt[x]{e^y}$.

Решение. Преобразуем данную функцию, используя свойство степеней,

$$z = \sqrt[x]{e^y} = e^{\frac{y}{x}}.$$

Тогда

$$\underset{y-const}{z'_x} = \left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = e^{\frac{y}{x}} \cdot y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{y}{x}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} = -\frac{y}{x^2} \cdot \sqrt[x]{e^y}.$$

$$\underset{x-const}{z'_y} = \left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot y' = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt[x]{e^y}}{x}.$$

Пример 6. Найти частные производные от функции $z = \sin^2(3x + 2y)$.

Решение.

$\underset{y-const}{z'_x} = (\sin^2(3x+2y))'_x = 2\sin(3x+2y) \cdot (\sin(3x+2y))'_x =$

$= 2\sin(3x+2y) \cdot \cos(3x+2y) \cdot (3x+2y)'_x = \sin(6x+4y) \cdot (3+0) =$

$= 3\sin(6x+4y);$ $\underset{x-const}{z'_y} = (\sin^2(3x+2y))'_y = 2\sin(3x+2y) \cdot (\sin(3x+2y))'_y =$

$= 2\sin(3x+2y) \cdot \cos(3x+2y) \cdot (3x+2y)'_y = \sin(6x+4y) \cdot (0+2) =$

$= 2\sin(6x+4y).$

Пример 7. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = x^y$ уравнению $\frac{x}{y} \cdot z_x' + \frac{1}{\ln x} \cdot z_y' = 2z.$

Решение. Найдем частные производные данной функции z:

$$\underset{y-const}{z_x'} = (x^y)_x' = y \cdot x^{y-1}; \quad \underset{x-const}{z_y'} = (x^y)_y' = x^y \cdot \ln x.$$

Полученные правые части подставим в левую часть данного уравнения:

$$\frac{x}{y} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \cdot \ln x = x \cdot x^{y-1} + x^y = x^{y-1+1} + x^y = x^y + x^y = 2x^y;$$

$$2z = 2 \cdot x^y.$$

Сравнивая полученные выражения $2x^y = 2x^y$, делаем вывод, что функция $z = x^y$ удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Частные производные z'_x и z'_y называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции от $(x; y) \in D$.

Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x; y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и так далее порядков.

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной. Например, z''_{xy}, z'''_{xyy}, z'''_{xyx}.

Пример 8. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 2x^2 y + 3y^2$.

Решение. Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\underset{y-const}{z'_x} = (x^3)'_x - (2x^2 y)'_x + (3y^2)'_x = 3x^2 - 4xy + 0 = 3x^2 - 4xy;$$

$$\underset{x-const}{z'_y} = (x^3)'_y - (2x^2 y)'_y + (3y^2)'_y = 0 - 2x^2 + 6y = -2x^2 + 6y.$$

Найдем искомые частные производные второго порядка:

$$\underset{y-const}{z''_{xx}} = (3x^2 - 4xy)'_x = (3x^2)'_x - (4xy)'_x = 6x - 4y;$$

$$\underset{x-const}{z''_{yy}} = (-2x^2 + 6y)'_y = (-2x^2)'_y + (6y)'_y = 0 + 6 = 6;$$

$$\underset{x-const}{z''_{xy}} = (3x^2 - 4xy)'_y = (3x^2)'_y - (4xy)'_y = 0 - 4x = -4x;$$

$$\underset{y-const}{z''_{yx}} = (-2x^2 + 6y)'_x = (-2x^2)'_x + (6y)'_x = -4x + 0 = -4x.$$

Пример 9. Найти z'''_{xyx}, если $z = \sin(xy)$.

Решение. Сначала найдем частную производную первого порядка данной функции по переменной x:

$$\underset{y-const}{z'_x} = (\sin(xy))'_x = \cos(xy)\cdot(xy)'_x = \cos(xy)\cdot y = y\cos(xy).$$

Найдем вторую частную производную по переменной y:

$$\underset{x-const}{z''_{xy}} = (y\cdot\cos(xy))'_y = (y)'_y\cdot\cos(xy) + y\cdot(\cos(xy))'_y = \cos(xy) +$$

$$+\, y\cdot(-\sin(xy))\cdot(xy)'_y = \cos(xy) - y\sin(xy)\cdot x = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

Наконец, найдем искомую частную производную третьего порядка:

$$\underset{y-const}{z'''_{xyx}} = (\cos(xy) - xy\sin(xy))'_x = -\sin(xy)\cdot(xy)'_x - (xy)'_x\sin(xy) -$$

$$-\, xy\cdot(\sin(xy))'_x = -\sin(xy)\cdot y - y\sin(xy) - xy\cdot\cos(xy)\cdot(xy)'_x =$$

$$= -y\sin(xy) - y\sin(xy) - xy\cos(xy)\cdot y = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy).$$

Пример 10. Проверить, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функции $z = arcctg(x+2y)$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = (arcctg(x+2y))'_x = -\frac{1}{1+(x+2y)'_x}\cdot(x+2y)'_x =$$

$$= -\frac{1}{1+(x+2y)^2}\cdot(1+0) = -\frac{1}{1+(x+2y)^2};$$

$$\underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = (arcctg(x+2y))'_y = -\frac{1}{1+(x+2y)^2}\cdot(x+2y)'_y =$$

$$= -\frac{1}{1+(x+2y)^2}\cdot(0+2) = -\frac{2}{1+(x+2y)^2}.$$

Найдем смешанные производные второго порядка:

$$\underset{x-const}{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}} = \left(-\frac{1}{1+(x+2y)^2}\right)'_y = \left(-(1+(x+2y)^2)^{-1}\right)'_y =$$

$$= \left(1+(x+2y)^2\right)^{-2}\cdot\left(1+(x+2y)^2\right)'_y = \left(1+(x+2y)^2\right)^{-2}\cdot\left(2(x+2y)\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{4(x+2y)}{\left(1+(x+2y)^2\right)^2};$$

$$\underset{y-const}{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}} = \left(-\frac{2}{1+(x+2y)^2}\right)'_x = -2\left((1+(x+2y)^2)^{-1}\right)'_x =$$

$$= -2\cdot(-1)\left(1+(x+2y)^2\right)^{-2}\cdot\left(1+(x+2y)^2\right)'_x =$$

$$= 2\left(1+(x+2y)^2\right)^{-2}\cdot 2(x+2y) = \frac{4(x+2y)}{\left(1+(x+2y)^2\right)^2}.$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся в том, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Полученный результат не случаен. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если частные производные высшего порядка непрерывные, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x;y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ или } z''_{xy} = z''_{yx}. \qquad (2.1)$$

Пример 11. Показать, что функция $z = \ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка от данной функции:

$$\underset{y-const}{z'_x} = \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+0) = \frac{2x}{x^2+y^2};$$

$$\underset{x-const}{z'_y} = \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(0+2y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\underset{y-const}{z''_{xx}} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(2x)'_x(x^2+y^2) - 2x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{\substack{yy\\x-const}} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(2y)'_y\cdot(x^2+y^2)-2y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Полученные выражения подставим в данное уравнение:

$$\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Таким образом, функция $z = \ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет данному уравнению.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x;y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A\cdot\Delta z + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y\,, \qquad (2.2)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x;\Delta y)\to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x;\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0.$ Сумма первых двух слагаемых в равенстве (2.2) представляет собой главную часть приращения функции.

Определение. Главная часть приращения функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy называется полным дифференциалом этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y\,. \qquad (2.3)$$

Выражения $A\cdot\Delta x$ и $B\cdot\Delta y$ называют частными дифференциалами. Для независимых переменных x и y $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (2.3) можно переписать в виде:

$$dz = Adx + Bdy. \qquad (2.4)$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A,\ \frac{\partial z}{\partial y} = B.$

Как следствие теоремы, получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (2.4) принимает вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{2.5}$$

или

$$dz = d_x z + d_y z,$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy -$ частные дифференциалы функции $z = f(x;y).$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y),$ то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается формулой (2.5).

Свойства, правила и таблица дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

Дифференциалы высших порядков определяются так же, как и для функции одной переменной: $d^2z = d(dz),\ d^3z = d(d^2z)$ и так далее.

Пример 12. Найти частные и полный дифференциалы функции $z = 3x^2y^5.$

Решение. Найдем частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2y^5)'_x = 3y^5(x^2)'_x = 3y^5 \cdot 2x = 6xy^5,$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} = (3x^2y^5)'_y = 3x^2(y^5)'_y = 3x^2 \cdot 5y^4 = 15x^2y^4.$$

Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получаем частные дифференциалы функции:

$$d_x z = 6xy^5 \cdot dx \text{ и } d_y z = 15x^2y^4dy.$$

Согласно формуле (2.5) получаем полный дифференциал данной функции:

$$dz = 6xy^5dx + 15x^2y^4dy.$$

Пример 13. Найти полный дифференциал функции $z = 2x^y$.

Решение. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^y\right)'_x = 2 \cdot y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^y\right)'_y = 2x^y \cdot \ln x.$$

Частные дифференциалы функции найдем как произведения частных производных на дифференциалы соответствующих аргументов:

$$d_x z = 2yx^{y-1}dx \text{ и } d_y z = 2x^y \ln x dy.$$

Искомый полный дифференциал функции найдем как сумму её частных дифференциалов:

$$dz = d_x z + d_y z = 2yx^{y-1}dx + 2x^y \ln x dy.$$

Пример 14. Найти дифференциал второго порядка функции $z = 5x^2y^3 + x^3 - y^2$.

Решение. Используя свойства и правила нахождения дифференциала функции, преобразуем формулу дифференциала второго порядка:

$$d^2z = d\left(dz\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx +$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy.$$

Так как дифференциалы dx и dy остаются неизменными, поэтому при нахождении частных производных эти величины как постоянные множители выносим за знак производной.

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Согласно формуле (2.1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

поэтому окончательно получаем формулу дифференциала второго порядка:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{2.6}$$

Найдем частные производные первого, а затем и второго порядков данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(5x^2y^3 + x^3 - y^2\right)'_x = 10xy^3 + 3x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(5x^2y^3 + x^3 - y^3\right)'_y = 15x^2y^2 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(10xy^3 + 3x^2\right)'_x = 10y^3 + 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(10xy^3 + 3x^2\right)'_y = 30xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(15x^2y^2 - 3y^2\right)'_y = 30x^2y - 6y.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (2.6), получаем:

$$d^2z = \left(10y^3 + 6x\right)dx^2 + 60xy^2dxdy + \left(30x^2y - 6y\right)dy^2.$$

Пример 15. Найти дифференциал второго порядка функции $z = e^{xy}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.6) дифференциала второго порядка, полученной в предыдущем примере. Для этого сначала найдем частные производные первого и второго порядков данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} \cdot \left(xy\right)'_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} \cdot \left(xy\right)'_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(ye^{xy}\right)'_x = ye^{xy} \cdot \left(xy\right)'_x = ye^{xy} \cdot y = y^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(ye^{xy}\right)'_y = y'e^{xy} + y\left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} + ye^{xy} \cdot x =$$

$$= e^{xy} + xye^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(xe^{xy}\right)'_y = xe^{xy} \cdot \left(xy\right)'_y = xe^{xy} \cdot x = x^2e^{xy}.$$

Тогда дифференциал второго порядка принимает следующий вид:

$$d^2z = y^2e^{xy}dx^2 + 2\left(e^{xy} + xye^{xy}\right)dxdy + x^2e^{xy}dy^2.$$

2.3. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $P_0(x_0; y_0) \in D$.

Определение. Точка $P_0(x_0; y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x; y)$, если существует такая $\delta-$окрестность этой точки, что для каждой точки $P(x; y)$, отличной от $P_0(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$.

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек $P(x; y)$, отличных от $P_0(x_0; y_0)$, из $\delta-$окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ выполняется неравенство: $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют её экстремумами.

В силу определения, точка экстремума лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер: значение функции в точке $P_0(x_0; y_0)$ сравнивают с её значениями в точках, достаточно близких к $P_0(x_0; y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $P_0(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0,\ f'_y(x_0; y_0) = 0.$

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равные нулю, то есть $f'_x = 0,\ f'_y = 0,$ называется стационарной точкой функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой её окрестности функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0; y_0),\ B = f''_{xy}(x_0; y_0),\ C = f''_{yy}(x_0; y_0).$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0,$ то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0,$ минимум, если $A > 0;$

2) если $\Delta < 0,$ то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x; y)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 16. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5.$

Решение. Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют и которые лежат внутри области определения функции:

$$z'_x = (x^3 + 8y^2 - 6xy + 5)'_x = 3x^2 + 0 - 6y + 0 = 3x^2 - 6y,$$

$$z'_y = (x^3 + 8y^2 - 6xy + 5)'_y = 0 + 16y - 6x + 0 = 16y - 6x.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 16y - 6x = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 8y - 3x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ 8 \cdot \dfrac{1}{2}x^2 - 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}x^2; \end{cases} \begin{cases} x(4x - 3) = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}x^2. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 3 = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}x^2; \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{3}{4}, \\ y = \dfrac{9}{32}. \end{cases}$$

Получили две точки $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{9}{32}\right).$ Обе точки являются стационарными, так как функция z определена на всей плоскости $Oxy.$ Других критических точек нет, так как z'_x и z'_y существуют при любых значениях x и $y.$

Исследуем стационарные точки M_1 и $M_2,$ используя достаточное условие экстремума. Найдем частные производные второго порядка функции z:

$$z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x - 0 = 6x, \quad z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = 0 - 6 = -6,$$
$$z''_{yy} = (16y - 6x)'_y = 16 - 0 = 16. \; A = z''_{xx}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0; B = z''_{xy}(M_1) = -6;$$
$$C = z''_{yy}(M_1) = 16.$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 16 - (-6)^2 = 0 - 36 = -36.$$

Так как в точке $M_1(0;0)$ $\Delta < 0,$ следовательно в этой точке экстремума нет.

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5; \quad B = z''_{xy}(M_2) = -6; C = z''_{yy}(M_2) = 16.$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 4{,}5 \cdot 16 - (-6)^2 = 72 - 36 = 36.$$

В точке $M_2\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{32}\right)$ $\Delta > 0,$ следовательно в этой точке экстремум есть, $A > 0,$ поэтому M_2 – точка минимума.

$$z_{\min}(M_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{9}{32}\right) + 5 = \frac{27}{64} + \frac{81}{128} - \frac{81}{64} + 5 =$$
$$= \frac{54 + 81 - 162 + 640}{128} = \frac{613}{128}.$$

Пример 17. Найти экстремум функции $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3.$

Решение. Найдем критические точки, то есть точки, в которых частные производные первого порядка данной функции равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

$$z'_x = \left((x - y)^2 + (y - 1)^3\right)'_x = 2(x - y) + 0 = 2(x - y);$$
$$z'_y = \left((x - y)^2 + (y - 1)^3\right)'_y = 2(x - y)(-1) + 3(y - 1)^2 =$$
$$= -2(x - y) + 3(y - 1)^2.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \begin{cases} 2(x - y) = 0, \\ -2(x - y) + 3(y - 1)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x - y = 0, \\ -2 \cdot 0 + 3(y - 1)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ y - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили единственную критическую точку $M_0(1;1)$, которая является стационарной, так как функция z определена на всей плоскости Oxy; z'_x и z'_y существуют при любых значениях x и y, поэтому других критических точек нет.

Проверим, является ли точка M_0 точкой экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка и определим знак Δ в точке M_0:

$$z''_{xx} = \left(2(x-y)\right)'_x = 2,\ A = z''_{xx}(M_0) = 2,$$

$$z''_{xy} = \left(2(x-y)\right)'_y = 2\cdot(-1) = -2,\ B = z''_{xy}(M_0) = -2,$$

$$z''_{yy} = \left(-2(x-y)+3(y-1)^2\right)'_y = -2\cdot(-1)+6(y-1) = 2+6(y-1),$$

$$C = z''_{yy}(M_0) = 2+6(1-1) = 2.$$

$$\Delta = A\cdot C - B^2 = 2\cdot 2 - (-2)^2 = 4-4 = 0.$$

Оказалось, что $\Delta(M_0)$ не имеет знака.

Чтобы установить, имеет функция z в точке M_0 экстремум, необходимы дополнительные исследования (мы их проводить не будем).

2.4. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных определяются так же, как и для функции одной переменной.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в некоторых точках D своего наибольшего и наименьшего значений (так называемый глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с её значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

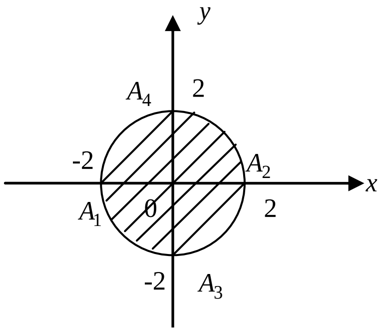
1)найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида);

2)найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D;

3)сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D.

Пример 18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 8$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение. Изобразим заданную область D



Согласно указанному правилу:

1) найдем критические точки функции z, лежащие внутри круга радиуса, равном 2, и центром в начале координат:

$$z'_x = (x^2 - y^2 + 8)'_x = 2x - 0 + 0 = 2x;$$

$$z'_y = (x^2 - y^2 + 8)'_y = 0 - 2y + 0 = -2y.$$

Решая систему уравнений,

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

найдем критическую точку $M_0(0;0)$, которая лежит внутри круга. Других критических точек нет. Найдем значение функции z в этой точке $z(M_0) = 0 - 0 + 8 = 8$;

2) найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области – на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Уравнение окружности связывает между собой переменные x и y. Определяя из этого уравне-

ния одну переменную через другую, например $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, и подставляя в выражение функции z, преобразуем её в функцию одной переменной:

$$z(x) = x^2 - \left(\pm\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + 8 = x^2 - 4 + x^2 + 8 = 2x^2 + 4,$$

где x изменяется на отрезке $[-2; 2]$ (это следует из условия, что под корнем квадратным выражение неотрицательно, то есть $4 - x^2 \geq 0,\ x^2 \leq 4,\ |x| \leq 2,\ -2 \leq x \leq 2$).

Далее ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на отрезке $[-2; 2]$, которые и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции $z(x; y)$ на границе заданной области – на окружности. $z'(x) = (2x^2 + 4)' = 4x,\ z'(x) = 0,\ 4x = 0,\ x = 0.$ Эта единственная критическая точка лежит внутри данного отрезка. Значение $z(x)$ в этой точке $z(0) = 4$.

Вычислим значения функции $z(x)$ на концах данного отрезка:

$$z(-2) = 2(-2)^2 + 4 = 8 + 4 = 12,\ z(2) = 2 \cdot 2^2 + 4 = 8 + 4 = 12.$$

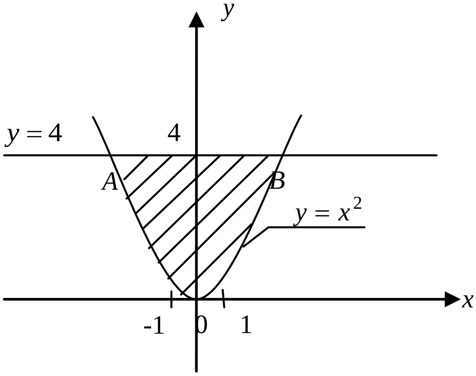
Сравнивая вычисленные значения $z(x)$ во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -2$ и $x = 2$, заключаем: наибольшее значение функции $z(x)$ на отрезке $[-2;2]$ (или, что то же, функция $z(x; y)$ на границе данной области – на окружности $x^2 + y^2 = 4$) равно 12, а наименьшее значение $z(x)$ на данном отрезке (или, что то же, $z(x; y)$ на данной границе) равно 4;

3) сравнивая значение z во внутренней критической точке M_0 с её наибольшим и наименьшим значениями на окружности, делаем вывод: наибольшее значение функции $z(x; y)$ в данной замкнутой области – круге равно 12 и достигается ею в граничных точках $A_1(-2;0)$ и $A_2(2;0)$, а её наименьшее значение в этой области равно 4 и достигается в граничных точках $A_3(0;-2)$ и $A_4(0;2)$. Ординаты точек A_1, A_2, A_3, A_4, которые лежат на окружности, вычислены из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$ по известным их абсциссам $x_1 = -2, x_2 = 2, x_{3,4} = 0$.

Таким образом, $z_{наибольшее} = 12,\ z_{наименьшее} = 4$.

Пример 19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

Решение. Построим замкнутую область, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = 4$:



Руководствуясь указанным правилом:

1) ищем критические точки функции z, лежащие внутри заданной области

$$z'_x = \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy\right)'_x = 6x^2 + 8x + 0 - 2y = 6x^2 + 8x - 2y,$$

$$z'_y = \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy\right)'_x = 0 + 0 + 2y - 2x = 2y - 2x;$$

решая систему уравнений $z'_x = 0,\ z'_y = 0,$ найдем критические точки

$$\begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ 2y - 2x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ 6x^2 + 8x - 2x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ 6x^2 + 6x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ 6x(x + 1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Получили две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-1;-1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Других критических точек функция z не имеет;

2) ищем наибольшее и наименьшее значения функции z на границе заданной области. Она состоит из двух участков AOB и AB, имею-

щих различные уравнения. Поэтому вначале найдем наибольшее и наименьшее значения z на каждом из этих участков, затем, сопоставляя их, найдем наибольшее и наименьшее значения z на всей границе.

На участке AOB $y = x^2$, тогда $z(x) = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 =$ $= 4x^2 + x^4$, где x изменяется на отрезке $[-2;2]$. Отрезок найден как решение системы уравнений $y = x^2$ и $y = 4$, то есть

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4, \\ y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x) = 4x^2 + x^4$ на отрезке $[-2;2]$. $z'(x) = 8x + 4x^3$, $z'(x) = 0$, если $8x + 4x^3 = 0$, $4x(2 + x^2) = 0$, $x = 0$, $2 + x^2 = 0$ - действительных корней нет. Получили одну критическую точку $x = 0$, которая является внутренней точкой указанного отрезка. $z(0) = 0$. Найдем значения функции $z(x)$ на концах отрезка

$$z(-2) = 4 \cdot (-2)^2 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32,$$
$$z(2) = 4 \cdot 2^2 + 2^4 = 16 + 16 = 32.$$

Сравнивая значения функции $z(x)$ во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -2$, $x = 2$, делаем вывод: наибольшее значение $z(x)$ на отрезке $[-2;2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение $z(x)$ на этом отрезке равно 0 (в точке $x = 0$).

На участке AB имеем $y = 4$, $z(x) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x$, где $-2 \le x \le 2$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции z на этом участке. $z'(x) = 6x^2 + 8x + 0 - 8 = 6x^2 + 8x - 8$. Решим уравнение $6x^2 + 8x - 8 = 0$, $3x^2 + 4x - 4 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} = -2; \frac{2}{3}.$$

Внутри данного отрезка $z'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}$, $z\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 16 - 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27} + \frac{16}{9} + 16 - \frac{16}{3} = 16\frac{22}{27}$.

Значения функции на концах отрезка были вычислены ранее $z(-2) = z(2) = 32$.

Наибольшее значение функции z на отрезке $[-2;2]$ равно 32 (в точках $x=\pm2$), а наименьшее значение z на этом отрезке равно $16\frac{22}{27}$ (в точке $x=\frac{2}{3}$).

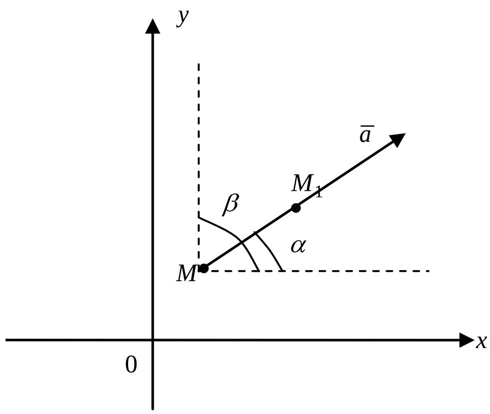
Сравнивая значения z на участках AOB и AB, приходим к выводу: на всей границе $AOBA$ наибольшее значение функции z равно 32 (в точках A и B), а её наименьшее значение равно нулю (в точке O);

3) внутри заданной замкнутой области функция z не имеет точек экстремума, её наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках, лежащих на границе этой области. В граничных точках $A(-2;4)$ и $B(2;4)$ функция z имеет наибольшее значение $z_{наибольшее}=z(A)=z(B)=32$, а в граничной точке $O(0;0)$ она имеет наименьшее значение $z_{наименьшее}=z(O)=0$.

2.5. Производная по направлению. Градиент функции

Для характеристики скорости изменения функции $z=z(M)$, где $M=M(x;y)$ в заданном направлении введем понятие производной по направлению.

Возьмем на плоскости, где задана функция $z=z(x;y)$ некоторую точку M и найдем скорость изменения функции z при движении точки M в произвольном направлении $\bar{a}$. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta$.



Приращение функции z, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\bar{a}$ определяется как

$$\Delta z = z(M_1) - z(M).$$

Тогда $\Delta a = |MM_1|$.

Определение. Производной от функции $z = z(M)$ в точке M по направлению $\bar{a}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial a}\Big/_M = \lim_{\Delta a \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta a} = \lim_{M_1 \to M}\frac{z(M_1) - z(M)}{|MM_1|}$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a}/_M = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta \qquad (2.7)$$

Производная по направлению $\bar{a}$ и характеризует скорость изменения функции в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial z}{\partial a} > 0,$ то функция z возрастает в направлении $\bar{a},$ если $\frac{\partial z}{\partial a} < 0,$ то функция z в направлении $\bar{a}$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial z}{\partial a}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции z в направлении $\bar{a}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial z}{\partial a}\right|,$ тем быстрее изменяется функция z. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Их можно рассматривать как производные от функции z по направлению координатных осей Ox и $Oy.$ Так, если направление $\bar{a}$ совпадает с положительным направлением оси $Oy,$ то, положив в формуле (2.7) $\beta = 0,$ $\alpha = \frac{\pi}{2},$ получим $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial y},$ так как $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$

$$\cos\beta = \cos 0 = 1.$$

Пример 20. Найти производную функции $z = 3x^2 + 5xy - y^2$ по направлению вектора $\bar{a} = 12i - 5j$ в точке $A(1;2).$ Возрастает или убывает данная функция в указанном направлении?

Решение. Найдем частные производные функции z в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2+5xy-y^2\right)'_x=6x+5y,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right/_A=6\cdot 1+5\cdot 2=16,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x^2+5xy-y^2\right)'_y=5x-2y,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right/_A=5\cdot 1-2\cdot 2=1.$$

Вычислим направляющие косинусы вектора $\overline{a}$:

$$|\overline{a}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13,$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}=\frac{12}{13},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}=\frac{-5}{13}.$$

Подставляя найденные значения в формулу (2.7), получаем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right/_A=16\cdot\frac{12}{13}+1\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{192-5}{13}=\frac{187}{13}.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial a}>0,$ то функция z возрастает в направлении вектора $\overline{a}$.

Пример 21. Найти производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(3;4)$:

1) по направлению биссектрисы первого координатного угла;

2) по направлению вектора $\overline{OA}$;

3) по направлению вектора $\overline{a}(4;-3)$.

Решение. Находим частные производные функции z и вычисляем их значения в точке A:

$$z'_x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_x(A)=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}.$$

$$z'_y=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1\cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_y(A)=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (2.7), найдем производную функции z в точке A по любому направлению $\bar{b}(\cos\alpha;\cos\beta)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial b}\right/_A = \frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\cos\beta.$$

Находим далее косинусы углов α и β, образованных заданным направлением дифференцирования с осями координат, и производную функции z по заданному направлению.

1. Для биссектрисы первого координатного угла $\alpha = \beta = 45^\circ$, тогда $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; поэтому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial b}\right/_A = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2. Вектор $\overline{OA}(x_A - x_0; y_A - y_0) = \overline{OA}(3-0;4-0) = \overline{OA}(3;4) = \bar{C}$.

3. Для вектора $\bar{a}(4;3)$ $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, тогда

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right/_A = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = 0.$$

Последний результат говорит о том, что функция z в направлении вектора $\bar{a}$ не изменяется, то есть остается постоянной (стационарной).

Вектор, указывающий направление, в котором производная по направлению имеет наибольшее значение, называется градиентом.

Можно заметить, что правая часть формулы (2.7) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\bar{e}(\cos\alpha;\cos\beta)$ и некоторого вектора $\bar{p}(z'_x; z'_y)$.

Определение. Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $z(x;y)$ в точке $M(x;y)$ называют градиентом функции и обозначают $\overline{grad}\, z$, то есть $\overline{grad}\, z(z'_x; z'_y)$ или

$$\overline{grad}\, z = z'_x \cdot \bar{i} + z'_y \cdot \bar{j}. \qquad (2.8)$$

Отметим, что $\overline{grad}\, z$ есть векторная величина. Равенство (2.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \bar{e}\cdot\overline{grad}\, z,$$

Или

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \left|\overline{grad\ z} \cdot \cos\varphi\right|, \tag{2.9}$$

где φ – угол между вектором $\overline{grad}\, z$ и направлением $\bar{a}$.

Из формулы (2.9) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, то есть при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{a}$, вдоль которого функция меняется быстрее всего, значит градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшая скорость изменения функции z в точке M равна

$$\left|\overline{grad}\, z\right| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента. На указанном свойстве градиента основано его широкое применение в математике и других дисциплинах.

Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overline{grad}\, z$, равна нулю.

Пример 22. Найти градиент функции $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^3}{3}$ в точке $M(2;4)$.

Решение. Найдем частные производные данной функции и вычислим их в точке A:

$$z'_x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)'_x = \frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = x, \ z'_x(M) = 2,$$

$$z'_y = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)'_y = 0 + \frac{1}{3} \cdot 3y^2 = y^2, \ z'_y(M) = 4^2 = 16.$$

Следовательно,

$$\overline{grad}\, z = 2\bar{i} + 16\bar{j}.$$

Пример 23. Найти точки, в которых функция $z = e^x(x - y^3 + 3y)$ стационарна (то есть точки, в которых производная по любому направлению равна нулю).

Решение. Чтобы в некоторой точке M производная функции по любому направлению была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль.

Найдем частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \left(e^x \cdot (x - y^3 + 3y)\right)'_x = (e^x)'_x \cdot (x - y^3 + 3y) + e^x (x - y^3 + 3y)'_x =$$
$$= e^x (x - y^3 + 3y) + e^x \cdot 1 = e^x (x - y^3 + 3y + 1),$$
$$z'_y = \left(e^x \cdot (x - y^3 + 3y)\right)'_y = e^x \cdot (x - y^3 + 3y)'_y = e^x (-3y^2 + 3) =$$
$$= 3e^x (1 - y^2).$$

Решим систему уравнений $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$:

$$\begin{cases} e^x (x - y^3 + 3y + 1) = 0, \\ 3e^x (1 - y^2) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y^3 + 3y + 1 = 0, \\ 1 - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} y = 1, \\ x - 1 + 3 + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -1, \\ x + 1 - 3 + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Получили две точки $M_1(-3;1)$ и $M_2(1;-1)$, в которых данная функция z стационарна.

Пример 24. С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $z = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + 1}$ при переходе точки $M(x;y)$ через точку $M_0(-1;2)$? В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку $M_1(1;0)$, чтобы функция z убывала с наибольшей скоростью?

Решение. Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения (возрастания или убывания) функции z при переходе точки M через точку P численно равна модулю градиента функции в точке P. При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка M при переходе через точку P двигаться по направлению градиента функции в точке P или прямо противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции z и по формуле (2.8) – её градиент в любой точке:

$$z'_x = \left(\frac{10}{x^2 + y^2 + 1}\right)'_x = -\frac{10}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \cdot 2x = -\frac{20x}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$z'_y = \left(\frac{10}{x^2 + y^2 + 1}\right)'_y = -\frac{10}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \cdot 2y = -\frac{20y}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$grad\ z = -\frac{20x}{(x^2+y^2+1)^2}\cdot\bar{i} - \frac{20y}{(x^2+y^2+1)^2}\,\bar{j}.$$

Далее: 1) вычислим частные производные функции z в точке M_0

$$z'_x(M_0) = -\frac{20\cdot(-1)}{((-1)^2+2^2+1)^2} = \frac{20}{(1+4+1)^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9},$$

$$z'_y(M_0) = -\frac{20\cdot 2}{((-1)^2+2^2+1)^2} = -\frac{40}{36} = -\frac{10}{9},$$

тогда $\overline{grad}\ z(M_0) = \frac{5}{9}\bar{i} - \frac{10}{9}\bar{j}$; его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции z при переходе M через точку M_0, будет

$$\left|\overline{grad}\ z(M_0)\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(-\frac{10}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{81}+\frac{100}{81}} = \frac{5\sqrt{5}}{9};$$

2) найдем градиент функции z в точке M_1:

$$z'_x(M_1) = -\frac{20\cdot 2}{(2^2+0^2+1)^2} = -\frac{40}{25} = -\frac{8}{5},$$

$$z'_y(M_1) = -\frac{20\cdot 0}{25} = 0,$$

$$\overline{grad}\ z(M_1) = -\frac{8}{5}\bar{i};$$

искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление, будет $-\overline{grad}\ z(M_1) = \frac{8}{5}\bar{i}$.

Чтобы функция z убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку M_1 точка M должна двигаться в направлении вектора $-\overline{grad}\ z(M_1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти и изобразить область определения функций:

а) $z = 4 - x - 2y$; **б)** $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; **в)** $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; **г)** $z = \arcsin(x+y)$.

2. Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

а) $z = 5x^2 - 6xy + y^3 - 7$; **б)** $z = \arcsin(x + y^2)$; **в)** $z = y\ln 2x$;

г) $z = tg(5x - 4y)$; **д)** $z = y^{3x}$; **е)** $z = \cos\dfrac{x}{y}$; **ж)** $z = arctg(e^{x+y})$.

3. Проверить, удовлетворяет или нет функция z данному уравнению:

а) $z = tg^3(2x - 3y)$; $3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; **б)** $z = \ln(x^3 + 3y^2)$;

$2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$; **в)** $z = \sin^2(x - y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$; **г)** $z = 3^{x^2 - 4y}$;

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

4. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$; **б)** $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

в) $z = 2xy - 2x - 4y$; **г)** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;

д) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; **е)** $z = (x - 1)^2 - 2y^2$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D:

а) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $D:\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$;

б) $z = xy(4 - x - y)$, $D:\ x \ge 1,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 6$;

в) $z = x^2 y$, $D:\ x^2 + y^2 \le 1$;

г) $z = \dfrac{x^2}{2} + xy$, $D:\ y \ge 1,\quad y \le 2 - x^2$.

6. Найти производную от функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60°.

7. Найти производную от функции $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точке $M(2;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5)$. Возрастает или убывает данная функция в указанном направлении?

8. Показать, что в точке $A\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ производная функции $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ в любом направлении стационарна.

9. $z=\arcsin xy$. Найдите угол между градиентами этой функции в точках $A(1;0)$ и $B(0;4)$.

10. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z=arctg\left(xy^2\right)$ в точке $A(2;1)$.

11. Найти точку, в которой градиент функции $z=\ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ равен $\bar{i}-\dfrac{16}{9}\bar{j}$.

12. Сравните скорость изменения функции $z=2x^2+xy$ в точке $A(-1;2)$ в направлении $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$ и в направлении $\bar{b}=-3\bar{i}+4\bar{j}$. Какова наибольшая скорость изменения функции в точке A? Каково направление наибольшего возрастания функции?

Ответы

а) вся плоскость xOy; **б)** все внутренние точки первого и третьего координатных углов; **в)** вся плоскость за исключением точек прямых $x=0$ и $y=0$, то есть за исключением точек, лежащих на осях координат; **г)** все точки плоскости xOy, принадлежащих полосе, ограниченной параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$, включая точки, лежащие на этих прямых.

1. а) $z'_x=10x-6y,\ z'_y=3y^2-6x$; **б)** $z'_y=\dfrac{2y}{\sqrt{1-\left(x+y^2\right)^2}}$;

в) $z'_x=\dfrac{y}{x},\ z'_y=\ln 2x$; **г)** $z'_x=\dfrac{5}{\cos^2(5x-4y)},\ z'_y=\dfrac{-4}{\cos^2(5x-4y)}$;

д) $z'_x=3y^{3x}\ln y,\ \ z'_y=3xy^{3x-1}$; **е)** $z'_x=-\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y},\ \ z'_y=\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}$;

ж) $z'_x=\dfrac{e^{x+y}}{1+e^{2(x+y)}}=z'_y.$

2. а) удовлетворяет; **б)** удовлетворяет; **в)** не удовлетворяет; **г)** удовлетворяет.

3. а) $z_{\min}=z(1;4)=-21$; **б)** $z_{\max}=z(4;4)=15$; **в)** нет экстремума;

г) $z_{\min}=z\left(\sqrt{3};-3\right)=-6\sqrt{3},\ z_{\max}=z\left(-\sqrt{3};-3\right)=6\sqrt{3}$;

д) $z_{\min}=z\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)=z\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=-8$, при $x=y=0$ экстремумов нет;

е) экстремумов нет.

5. **а)** $z_{наиб.} = z(4;0) = z(0;4) = 91,\ z_{наим.} = z(3;3) = 0;$ **б)** $z_{наиб.} = z\left(1;\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4},$

$z_{наим.} = z(3;3) = -18;$ **в)** $z_{наиб.} = z\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9},$

$z_{наим.} = z\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9};$ **г)** $z_{наиб.} = z(1;1) = \frac{3}{2},$

$z_{наим.} = z(-1;1) = -\frac{1}{2}.$

6. $5+\frac{11\sqrt{3}}{2}$. **7.** 9,4; возрастает. **9.** 90°. **10.** 0,82. **11.** $A\left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right), B\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$. **12.** $\upsilon_1 = \frac{\partial z}{\partial a} = -2$ (убывает), $\upsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{2}{5}$ (возрастает), $\upsilon_{наиб} = \sqrt{5}$ в направлении $\bar{c} = -2\bar{i} - \bar{j}$.

Индивидуальное домашнее задание по теме «Функции нескольких переменных»

Задача 1. Дана функция $z = f(x;y)$. Проверить, удовлетворяет или нет эта функция данному уравнению.

1.1. $z = e^{\frac{y}{x}};\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0.$

1.2. $z = e^{xy};\ x^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0.$

1.3. $z = e^{-\cos(ax+y)};\ a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

1.4. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

1.5. $z = \sin^2(y - ax);\ a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}.$

1.6. $z = \frac{y}{x};\ \ x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.7. $z = y\sqrt{\frac{y}{x}};\ \ x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.8. $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.9. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$; $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cdot \dfrac{\partial x}{\partial x}\right) - x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.10. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}.$

1.11. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$

1.12. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

1.13. $z = e^{xy}$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.14. $z = \ln(x + e^{-y})$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

1.15. $z = \dfrac{x}{y}$; $x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1.16. $z = x^y$; $y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \dfrac{\partial z}{\partial x}.$

1.17. $z = xe^{y/x}$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

1.18. $z = \sin(x + ay)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

1.19. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $(x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}.$

1.20. $z = \cos^3(3x - 5y)$; $\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1.21. $z = arctg\,\dfrac{x}{2y}$; $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1.22. $z = y\ln(x^2 - y^2)$; $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}.$

1.23. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$; $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$

1.24. $z = xy + xe^{y/x}$; $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

1.25. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}.$

1.26. $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}.$

1.27. $z = xe^{-y/x}$; $x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

1.28. $z = e^{x/y^2}$; $2x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1.29. $z = y^{y/x}$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = y \cdot z.$

1.30. $z = e^{x/y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$

Задача 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

2.1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $D:$ $x = 0, y = 0,$ $x + y = -3.$

2.2. $z = 2x + y - xy$; $D:$ $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 4.$

2.3. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$; $D:$ $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 3.$

2.4. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $D:$ $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le 3.$

2.5. $z = xy$; $D:$ $x^2 + y^2 \le 1.$

2.6. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $D:$ $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1.$

2.7. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$; $D:$ $x = 0$; $y = 0$; $2x + 3y - 14 = 0.$

2.8. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$; $D:$ $y \cdot \dfrac{1}{3}x^2$; $y = 3.$

2.9. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $D:$ $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 2.$

2.10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; $D:$ $y = 1$; $y = -1$; $x = 0$; $x = 2.$

2.11. $z = xy - 2x - y$; $D:$ $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 4.$

2.12. $z = x^2 + xy$; $D:$ $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 3.$

2.13. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $D:$ $x \le 0$; $y \le 0$; $x + y + 2 \ge 0.$

2.14. $z = 10 + 2xy - x^2$; $D:$ $0 \le y \le 4 - x^2.$

2.15. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$; $D:$ $x \ge -1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1.$

2.16. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$; D: $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

2.17. $z = x^2 + 3xy^2 + x - y$; D: $x \ge 1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1$.

2.18. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$; D: $x \le 1$; $y \ge 0$; $y \le x$.

2.19. $z = x^2 + 2y^2 - 1$; D: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x + y \le 3$.

2.20. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$; D: $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 2$.

2.21. $z = xy - x - 2y$; D: $y = x$; $x = 3$; $y = 0$.

2.22. $z = x^2 + xy - 3x - y$; D: $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le 3$.

2.23. $z = xy - 3x - 2y$; D: $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 4$.

2.24. $z = 3x + y - xy$; D: $y = x$; $y = 4$; $x = 0$.

2.25. $2z = x^2 - 2xy$; D: $y = 2x^2$; $y = 8$.

2.26. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$; D: $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$.

2.27. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$; D: $x = 0$; $y = 0$; $x + y + 2 = 0$.

2.28. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4y$; D: $y = 2x$; $y = 2$; $x = 0$.

2.29. $z = x^2 + xy - 2$; D: $y = 4x^2 - 4$; $y = 0$.

2.30. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$; D: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x + y \le 3$.

Задача 3. Исследовать функцию на экстремум.

3.1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

3.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3.3. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

3.4. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

3.5. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

3.6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

3.7. $z = x^3y^2(6 - x - y)\ (x > 0,\ y > 0)$.

3.8. $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

3.9. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

3.10. $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

3.11. $z = xy^2(1 - x - y)$.

3.12. $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y,\ (x>0,\ y>0)$.

3.13. $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

3.14. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

3.15. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\ (x>0,\ y>0)$.

3.16. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y\ (x>0,\ y>0)$.

3.17. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

3.18. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

3.19. $z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

3.20. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

3.21. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+5x+3$.

3.22. $z=2xy-2x-4y$.

3.23. $z=x^3+xy^2+6xy$.

3.24. $z=(x^2+y)\sqrt{e^y}$.

3.25. $z=3\ln\frac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$.

3.26. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

3.27. $z=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

3.28. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

3.29. $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

3.30. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

Задача 4. Даны: функция $z=z(x,y)$, точка A и вектор $\bar{a}$. Найти 1) $grad\, z$ в $(\cdot)A$; 2) производную в $(\cdot)A$ по направлению вектора $\bar{a}$.

4.1. $z=\ln(5x+3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}$.

4.2. $z=arctg\,\frac{y^2}{x}$; $A(2;1)$; $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$.

4.3. $z=\frac{xy}{x-y}$; $A(2;1)$; $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}$.

4.4. $z=2x^4+8x^2y^3$; $A(2;-1)$; $\bar{a}=-3\bar{i}+4\bar{j}$.

4.5. $z=\ln(2x^2+y^3)$; $A(3;-1)$; $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}$.

4.6. $z = arctg\,\dfrac{x}{y^2};\quad A(3;1);\quad \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}.$

4.7. $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2;\quad A(2;-2);\quad \bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}.$

4.8. $z = \ln(3x^2 + 5y^2);\quad A(2;3);\quad \bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j}.$

4.9. $z = 2x^3y + 3x^2y^2;\quad A(1;-2);\quad \bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}.$

4.10. $z = \ln(5x + 3y);\quad A(2;2);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}.$

4.11. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2;\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}.$

4.12. $z = 3x^2 + 2x^2y^3;\quad A(-1;2);\quad \bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}.$

4.13. $z = \ln(3x^2 + 4y^2);\quad A(1;3);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$

4.14. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y};\quad A(1;2);\quad \bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}.$

4.15. $z = arctg\,(xy^2);\quad A(2;3);\quad \bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}.$

4.16. $z = 5x^2 + 6xy;\quad A(2;1);\quad \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}.$

4.17. $z = \ln(5x^2 + 4y^2);\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$

4.18. $z = \ln(x^2 + 3y^2);\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}.$

4.19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2;\quad A(2;1);\quad \bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}.$

4.20. $z = x^2 + xy + y^2;\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$

4.21. $z = 5x^2 - 2xy + y^2;\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$

4.22. $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2};\quad A(1;-2);\quad \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}.$

4.23. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2);\quad A(1;2);\quad \bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}.$

4.24. $z = arctg\,(xy);\quad A(2;3);\quad \bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}.$

4.25. $z = \dfrac{3x}{y^2};\quad A(3;4);\quad \bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}.$

4.26. $z = 5x^2y + 3xy^2;\quad A(1;1);\quad \bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}.$

4.27. $z = \ln(2x + 3y);\quad A(2;2);\quad \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}.$

4.28. $z = x^3y + xy^2;\quad A(1;3);\quad \bar{a} = -5\bar{i} + 12\bar{j}.$

4.29. $z = arctg\,\dfrac{y}{x};\quad A(-1;1);\quad \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}.$

4.30. $z = \arccos\dfrac{y^2}{x};\quad A(2;1);\quad \bar{a} = 12\bar{i} - 5\bar{j}.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 2001.

2. Солодовников, А.С. Математика в экономике. Ч. 1, 2 / А.С. Солодовников. – М.: Финансы и статистика, 2003.

3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2004.

4. Крамер, И.Ш. Высшая математика для экономистов / И.Ш. Крамер. – М.: ЮНИТИ, 2005.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 / Н.С. Пискунов. – М: Наука, 1999.

6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2005.

7. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: АНХ при правительстве РФ, 2001.

8. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.Ф. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001.

9. Малыхин, В.И. Математика в экономике: учебное пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шуман Галина Ивановна
Волгина Ольга Алексеевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 3

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 30.10.2009. Формат 60×84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86.
Уч.-изд. л. 1,1. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано: множительный участок ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57