

**ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА**

**ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ, ИННОВАЦИЙ И БИЗНЕС
СИСТЕМ**

КАФЕДРА ЭЛЕКТРОНИКИ

**И.А. Белоус
Ю.А. Левашов**

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Учебное пособие

ВГУЭиС
Владивосток, 2014

Белоус И.А., Левашов Ю.А.

Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие. – Владивосток: Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, 2014. - 143 С.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор **Игнатюк В.А.**;
к.т.н., профессор **Павликов С. Н.**

В учебном пособии изложен материал по большинству разделов вузовской программы одноимённой дисциплины. Рассматриваются основы теории по передаче и приёму сообщений с помощью радиосигналов, по спектральной теории сигналов и их генерированию, усилению, преобразованию, модуляции, демодуляции и обработке. Излагается теория линейных радиоэлектронных цепей аналогового и цифрового типа. Приведены примеры использования программного пакета NI Multisim для анализа и синтеза радиотехнических сигналов и цепей.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 210400.62 «Радиотехника» на базе ФГОС ВПО.

Утверждена на заседании кафедры электроники от 22.04.2014 г., протокол № 8.

Рекомендована к изданию учебно-методической комиссией Института информатики, инноваций и бизнес систем ВГУЭС.

© Издательство Владивостокского государственного университета экономики и сервиса, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Словарь терминов	6
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	11
1.1 Обобщённая структурная схема радиотехнической системы	11
1.2 Классификация сигналов	14
Контрольные вопросы	18
Глава 2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ	19
2.1 Тригонометрический ряд Фурье. Спектр периодического сигнала	19
2.2 Амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов	23
2.3 Гармонический анализ периодических сигналов в программном пакете NI Multisim	31
2.3.1 Расчётно-практическое задание	37
2.3.2 Выполнение гармонического анализа сигнала «меандр» в пакете NIMultisim	38
2.3.3 Компьютерный практикум	47
2.4 Синтез сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim	50
2.4.1 Расчётно-практическое задание	50
2.4.2 Выполнение синтеза сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim	51
2.4.3 Компьютерный практикум	53
Контрольные вопросы	53
Глава 3. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ	54
3.1 Теорема Котельникова	54
3.2 Аналогово-цифровое и цифро-аналоговое преобразование сигналов	64
Контрольные вопросы	70
Глава 4. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ	72
4.1 Классификация видов модуляции	72
4.2 Сигналы с непрерывной амплитудной модуляцией	74
4.3 Сигналы балансной и однополосной амплитудной модуляции	79
4.4 Сигналы с непрерывной угловой модуляцией	83
4.4.1 Обобщенное представление сигналов с угловой модуляцией	83
4.4.2 Сигналы с частотной модуляцией	86

4.5 Изучение характеристик модулированных колебаний в программном пакете NI Multisim	93
4.5.1 Расчётно-практическое задание	93
4.5.2 Компьютерный практикум	94
Контрольные вопросы	98
Глава 5. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	100
5.1 Классификация радиотехнических цепей	100
5.2 Характеристики линейных радиотехнических цепей	102
5.3 Инерционные линейные цепи	104
Контрольные вопросы	107
Глава 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫМИ ЦЕПЯМИ	108
6.1 Пассивные аperiodические цепи	108
6.2 Преобразование периодических сигналов линейными цепями	113
6.3 Преобразование узкополосных сигналов частотно- избирательными цепями	115
6.4 Прохождение АМ колебания через частотно- избирательные цепи	121
6.4.1 Расчётно-практическое задание	124
6.4.2 Компьютерный практикум	126
6.5 Прохождение ЧМ колебания через частотно- избирательные цепи	129
6.5.1 Расчётно-практическое задание	131
6.5.2 Компьютерный практикум	132
6.6 Исследование характеристик линейных систем	136
6.6.1 Расчётно-практическое задание	142
6.6.2 Компьютерный практикум	143
Контрольные вопросы	145
ЛИТЕРАТУРА	145
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА	146

Предисловие

Дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы» занимает одно из центральных мест среди общепрофессиональных дисциплин, определяющих своим содержанием профессиональную подготовку радиоинженеров. В отличие от других общепрофессиональных и специальных дисциплин, посвященных изучению конкретных систем и устройств, дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы» дает студентам набор знаний и умений для математического описания самых различных радиоэлектронных систем и устройств.

В соответствии с принятым в 2009 г. ФГОС ВПО третьего поколения по направлению подготовки бакалавров 210400.62 «Радиотехника» и переходом к компетентносному формированию структур учебных дисциплин, возникает необходимость обеспечения учебного процесса соответствующими учебно-методическими материалами.

Предлагаемое учебное пособие обеспечивает формирование: знаний методов анализа цепей постоянного и переменного тока во временной и частотной областях, основных видов детерминированных и случайных сигналов в радиотехнике и методы их преобразования, основ теории дискретных и цифровых сигналов и систем; владений спектральными методами анализа детерминированных и случайных сигналов и их преобразований в электрических цепях.

Основное внимание в учебном пособии уделено описанию методик изучения характеристик, измерения основных параметров сигналов и цепей, анализу результатов измерений и сравнению их с ожидаемыми величинами.

Материалы учебного пособия могут быть использованы для проведения практических занятий в интерактивной форме, предусматривающей дискуссии и анализ конкретных ситуаций для лучшего усвоения материала.

Для закрепления и самооценки самостоятельного изучения дисциплины в соответствующих разделах приведены контрольные вопросы.

В связи с тем, что аппаратные методы исследования радиотехнических цепей и сигналов требуют больших затрат времени и средств, предлагаются методики исследования с использованием современного программного пакета компьютерного моделирования и проектирования NI Multisim.

Словарь терминов

Термин	Определение
Измерительный радиотехнический сигнал	Электрическое напряжение или ток, изменяющиеся во времени, с заранее известными характеристиками, используемые для измерения характеристик радиотехнических цепей и их контроля
Мгновенное значение сигнала (Отсчет сигнала)	Значение сигнала в заданный момент времени
Максимальное значение сигнала (Амплитуда)	Наибольшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Минимальное значение сигнала	Наименьшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Постоянная составляющая сигнала	Среднее значение сигнала
Переменная составляющая сигнала (Центрированный сигнал)	Разность между сигналом и его постоянной составляющей
Пиковое отклонение «вверх»	Наибольшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени
Пиковое отклонение «вниз»	Наименьшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени, взятое по модулю
Размах сигнала	Разность между максимальным и минимальным значениями сигнала на протяжении заданного интервала времени
Средневыпрямленное значение сигнала (Среднее значение сигнала)	Среднее значение модуля сигнала

Среднеквадратичное значение сигнала (Среднеквадратичное значение. Действующее значение. Эффективное значение)	Корень квадратный из среднего значения квадрата сигнала
Средняя мощность сигнала, выделяемая на сопротивлении 1 Ом	Среднее значение квадрата сигнала
Энергия сигнала, выделяемая на сопротивлении 1 Ом	Интеграл из квадрата сигнала по всей оси времени
Период периодического сигнала (Период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала
Частота периодического сигнала (Частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала
Амплитудный спектр периодического сигнала (Спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала
Фазовый спектр периодического сигнала	Функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении

	аргумента
Одномерная плотность вероятности (Дифференциальный закон распределения вероятности. Распределение амплитуд)	Функция, равная пределу отношения вероятности пребывания случайного сигнала в некотором интервале значений к ширине этого интервала при стремлении его к нулю, причем ее аргументом является значение, к которому стягивается интервал
Корреляционная функция (Автокорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей случайного сигнала и такой же переменной составляющей, но запаздывающей на заданное время.
Нормированная корреляционная функция (Коэффициент корреляции)	Функция, равная отношению корреляционной функции случайного сигнала к его дисперсии
Энергетический спектр (Спектральная плотность)	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от корреляционной функции, аргументом которой является частота
Отношение сигнал-помеха	Отношение величин, характеризующих интенсивности сигнала и помехи.
Коэффициент модуляции «вверх» (Коэффициент глубины модуляции «вверх»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вверх» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции
Коэффициент модуляции «вниз» (Коэффициент глубины модуляции «вниз»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вниз» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции.
Девиация частоты «вверх»	Пиковое отклонение «вверх» закона модуляции при частотной модуляции
Девиация частоты «вниз»	Пиковое отклонение «вниз» закона

	модуляции при частотной модуляции.
Индекс угловой модуляции (Индекс модуляции)	Пиковое отклонение закона модуляции фазо-модулированного сигнала при гармоническом законе модуляции
Взаимокорреляционная функция (Кросскорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей одного случайного сигнала и запаздывающей на заданное время переменной составляющей другого случайного сигнала.
Взаимный энергетический спектр	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от взаимокорреляционной функции, аргументом которой является частота
Время запаздывания	Параметр, равный значению временного сдвига одного из сигналов, при котором достигается тождественное равенство его другому сигналу с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого.
Фазовый сдвиг (Сдвиг фаз)	Модуль разности начальных фаз двух гармонических сигналов одинаковой частоты
Коэффициент гармоник (Коэффициент нелинейных искажений. Клирфактор)	Коэффициент, характеризующий отличие формы данного периодического сигнала от гармонической, равный отношению среднеквадратического напряжения суммы всех гармоник сигнала, кроме первой, к среднеквадратическому напряжению первой гармоники
Относительное отклонение сигнала от линейного закона	Коэффициент, равный отношению абсолютного отклонения данного сигнала от прямой линии, соединяющей мгновенные значения сигнала,

	соответствующие началу и концу заданного интервала времени к максимальному значению сигнала на этом же интервале
Коэффициент нелинейности сигнала	Коэффициент, равный отношению размаха производной сигнала на заданном интервале времени к максимальному значению производной на этом же интервале
Абсолютное отклонение сигналов	Максимальное значение разности мгновенных значений сигналов, взятых в один и тот же момент времени на протяжении заданного интервала времени

Глава 1. Элементы общей теории радиотехнических сигналов

1.1 Обобщённая структурная схема радиотехнической системы

Научно-технический прогресс в различных областях общественной жизни сопровождается резким увеличением потоков передаваемой и принимаемой информации [1]. Основную роль в решении проблемы повышения эффективности передачи информации играют радиотехнические информационные системы (РТИС), к которым относятся системы радиосвязи, телевидения, радиолокации, радионавигации, радиотелеметрии и многие другие. Несмотря на различия, обусловленные целевым назначением, перечисленные системы характеризуются общими чертами, позволяющими изучать их с общих позиций. В связи с этим рассмотрим обобщённую структурную схему РТИС, представленную на рис. 1.1.

В состав РТИС входят:

- источник сообщений;
- преобразователь сообщений в первичный сигнал;
- передающее устройство;
- линия связи;
- приёмное устройство;
- преобразователь первичного сигнала в сообщение;
- получатель сообщения.

Помимо этого в структурной схеме РТИС фигурирует источник помех.

Источник сообщений формирует сообщение $\lambda(t)$, подлежащее передаче. В качестве сообщений могут выступать речевое сообщение, изображение какого-либо объекта, температура или давление в узлах летательного аппарата и т.д. Поскольку сообщения отображаются в процессах различной физической природы (изменение давления, температуры, интенсивности светового потока и др.), эти процессы при передаче по РТИС необходимо преобразовать в электрические сигналы. Эту задачу решает преобразователь сообщения $\lambda(t)$ в первичный электрический сигнал $s(t)$.



12

Рис. 1.1 Структурная схема радиотехнической системы

Операцию такого преобразования можно описать символическим выражением

$$\underline{s(t)} = W_{cnc} [\underline{\lambda(t)}], \quad (1.1)$$

где W_{cnc} – оператор (правило) преобразования сообщения в первичный сигнал.

В подавляющем большинстве случаев энергия первичного сигнала сосредоточена в низкочастотной области. При передаче сообщений по РТИС энергия сигнала должна располагаться в области радиодиапазона. Операцию преобразования первичного сигнала $\underline{s(t)}$ в радиосигнал $u(t)$ осуществляет передающее устройство в соответствии с выражением

$$u(t) = W_{cnc} [\underline{s(t)}], \quad (1.2)$$

где W_{cnc} – оператор преобразования первичного сигнала в радиосигнал.

Перенос первичного сигнала в соответствующий радиодиапазон на практике осуществляется при помощи операции модуляции, т.е. изменения одного из параметров высокочастотного колебания соответствующего радиодиапазона в соответствии с изменением $\underline{s(t)}$. Поэтому сигнал $\underline{s(t)}$ называют управляющим (модулирующим), а сигнал $u(t)$ – модулированным сигналами.

Радиосигналы $u(t)$ распространяются по линии связи, в качестве которой могут выступать: свободное пространство, кабельные, оптические, волноводные и другие линии. В линии связи действуют помехи $\underline{\zeta(t)}$, искажающие сигнал $\hat{u}(t)$. Передачу сигнала по линии связи в операторной форме можно записать:

$$\hat{u}(t) = W_{лс} [\hat{u}(t) \cdot \underline{\zeta(t)}]. \quad (1.3)$$

Приёмное устройство осуществляет обратную операцию преобразования радиосигнала $\hat{u}(t)$ в первичный сигнал $\hat{s}(t)$, который будет отличаться от исходного сигнала $s(t)$, т.е.

$$\hat{s}(t) = W_{npm} [\hat{u}(t)]. \quad (1.4)$$

где $W_{прм}$ – оператор преобразования сигнала приёмным устройством.

Преобразователь первичного сигнала $\hat{u}(t)$ в сообщение $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = W_{нсс}[\hat{s}(t)] \quad (1.5)$$

и осуществляет преобразование $\hat{s}(t)$ в форму, удобную для восприятия сообщения получателем. Здесь $W_{нсс}$ – оператор преобразования первичного сигнала в сообщение.

Таким образом, передача сообщений в РТИС характеризуется цепочкой преобразований различных сигналов различными радиотехническими устройствами.

Принципы и методы формирования и преобразования электрических сигналов и электромагнитных волн радиодиапазона и их использование для передачи информации составляют предмет теоретической радиотехники. Исходя из этого, можно выделить две основные задачи, решаемые радиотехникой.

Первой задачей является изучение различных видов сигналов, их свойств и характеристик с целью их использования в радиотехнических системах. Эту задачу решает теория радиотехнических сигналов.

Процесс передачи сообщений в радиотехнической информационной системе, как подчёркивалось выше, состоит в последовательности преобразований сигналов, которые осуществляются посредством соответствующих физических устройств – радиотехнических цепей. Поэтому, второй задачей радиотехники является изучение и практическое использование принципов и методов преобразования сигналов в различных цепях. Эту задачу решает теория радиотехнических цепей.

1.2 Классификация сигналов

В настоящее время практическая радиотехника использует множество различных сигналов. Прежде, чем приступить к их изучению, необходимо определить понятие «сигнал» и охарактеризовать его общие свойства.

Назовём сигналом изменяющуюся физическую величину, отображающую передаваемое сообщение. В качестве таких величин могут выступать ток, напряжение, электромагнитное поле, световой поток и др. Иными словами, сигнал выступает как материальный носитель информации.

При теоретических исследованиях используют математические модели сигналов. В самом общем виде математическая модель сигнала

представляет собой функцию $s(t)$ аргумента времени t . Следует отметить, что математическая модель не учитывает конкретную физическую природу сигнала. Одной и той же математической моделью может быть описано изменение во времени и напряжения, и интенсивности светового потока, и напряжённости электромагнитного поля.

Все сигналы как физические процессы являются материальными и описываются вещественными функциями. Вместе с тем, при теоретических исследованиях часто удобно описывать сигналы комплексными функциями.

Вид функции $s(t)$ определяет форму сигнала.

Как функция времени сигнал может быть определён как на конечном, так и на бесконечном интервале времени. Реальные сигналы всегда конечны. Если сигнал $s(t)$ определён на интервале $[0, T_c]$, то величина T_c называется длительностью сигнала. Такие сигналы получили название финитных сигналов. При теоретическом анализе сигнал может быть определён как на бесконечном $[-\infty, \infty]$, так и на полубесконечном $[0, \infty]$ интервале времени.

Т.к. сигнал является материальным носителем информации, он обладает энергетическими характеристиками. К основным энергетическим характеристикам относится энергия сигнала

$$\mathcal{E}_c = \int_0^{T_c} s^2(t) dt, \quad (1.6)$$

и средняя мощность

$$P_c = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} s^2(t) dt. \quad (1.7)$$

Если $s(t)$ представляет собой изменение напряжения во времени, энергия сигнала, выделяемая при нагрузке в 1 Ом имеет размерность $[B^2 \cdot c]$, а средняя мощность в $[B^2]$.

В общем случае сигнал характеризуется формой, длительностью, энергией и средней мощностью.

Изменение сигнала во времени может происходить неслучайным (детерминированным) или случайным образом. В соответствии с этим сигналы подразделяются на детерминированные и случайные.

К детерминированным сигналам относятся сигналы, значения которых в любой момент времени t полностью известны. Детерминированным сигналом, например, является гармоническое

колебание с постоянными на интервале $(0, T_c)$ амплитудой, частотой и начальной фазой. Детерминированные сигналы не переносят информации и являются вспомогательными при различных преобразованиях сигналов и являются удобной моделью при анализе радиотехнических систем.

Случайные сигналы – это сигналы, значения которых в любой момент времени точно предсказать невозможно. Математическими моделями случайных сигналов являются случайные процессы. Собственно говоря, информация содержится в случайных изменениях физических величин. Моделями случайных процессов описываются и помехи в линии связи.

Сигнал $s(t)$ представляет собой изменяющуюся во времени величину и с этой точки зрения характеризуется множеством $\{S\}$ значений и множеством моментов времени $\{t\}$, которые она может принимать эти значения. Как множество $\{S\}$, так и множество $\{t\}$ может быть непрерывным (континуальным) или дискретным (счётным). Положим эти два признака в основу классификации сигналов.

На рис. 1.2 представлены графики изменения величины S в зависимости от моментов времени t в координатах (S, t) .

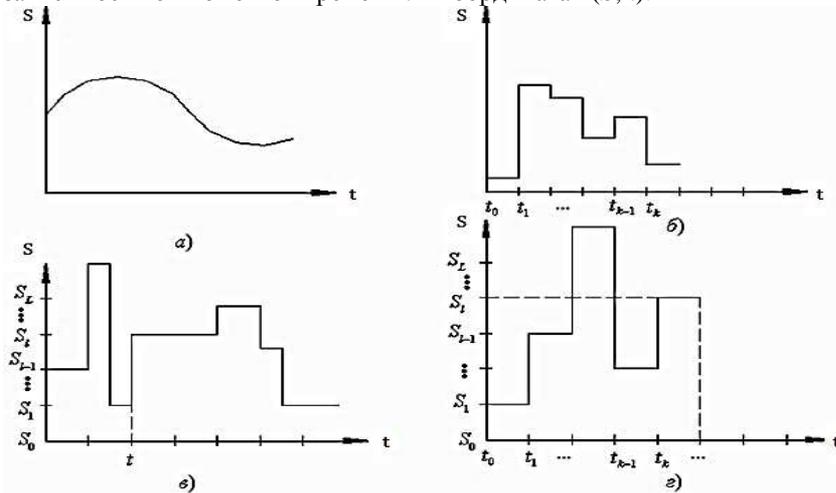


Рис. 1.2. Графики изменения величины S в зависимости от моментов времени t в координатах (S, t)

Если множества $\{S\}$ и $\{t\}$ являются непрерывными множествами, т.е. в любой момент времени t сигнал может принимать любое значение

из множества $\{S\}$, то такие сигналы называют аналоговыми (непрерывными) сигналами (рис. 1.2, а).

Если множество $\{S\}$ непрерывно, а множество $\{t\} = \{t_k\}, k = \overline{0, \infty}$ дискретно, т.е. сигнал может принимать любое значение из множества $\{S\}$ но в строго фиксированные моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k$, или $s_{д}(t) = s(t_k)$, то такие сигналы называются дискретными (рис 1.2, б). Здесь черта обозначает, что k принимает значения от 0 до ∞ . Примером дискретного сигнала может служить отражённый от цели сигнал на входе приёмника радиолокационной станции. Действительно, моменты времени t_k определяются временем оборота антенны, а значения S сигнал может принимать любые, т.к. цель может иметь произвольное положение в пространстве.

Если множество значений $\{S\} = \{S_l\}, l = \overline{0, L}$ дискретно, а множество моментов времени $\{t\}$ непрерывно, т.е. сигнал принимает строго фиксированные значения S_l в любой произвольный момент времени t , или $S_{KB} = s_l(t)$, то такие сигналы называются квантованными (рис. 1.2, в).

Если множества $\{S\} = \{S_l\}, l = \overline{0, L}$ и $\{t\} = \{t_k\}, k = \overline{0, \infty}$ дискретны, то такие сигналы $s_{ц}(t) = s_l(t_k)$ называются цифровыми (рис. 1.2г). Своё название такие сигналы получили ввиду того, что значения S_l сигнала и моменты t_k времени изменений значений могут быть представлены числами натурального ряда.

Если на интервале времени $(0, T_c)$ сигнал описывается одной элементарной функцией времени, то такой сигнал называется простым (элементарным) сигналом (рис. 1.2а).

Если же на этом интервале времени сигнал описывается совокупностью простых сигналов, например,

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t),$$

где $s_i(t)$ имеет длительность $T_{Ci} = \frac{T_c}{N}$, то такие сигналы называют составными (или сложными).

На рис. 1.2б изображён составной сигнал, образованный совокупностью трёх простых сигналов описываемых гармоническими функциями.

И, наконец, в связи с широким использованием цифровых сигналов в современных РТИС, остановимся на понятии ансамбля сигналов. Ввиду того, что в цифровых РТИС число значений первичных сигналов $s(t)$ ограничено, для их передачи можно использовать конечное число сигналов $u(t)$. Совокупность таких сигналов образуют ансамбль сигналов. Важнейшей характеристикой ансамбля сигналов является его объем M , т.е. число сигналов, входящих в ансамбль. От этого показателя зависит информативность каждого сигнала в отдельности и ансамбля в целом, способность противостоять помехам, время доведения сообщений до получателя т.е. все то, что определяет эффективность радиотехнической информационной системы.

Контрольные вопросы

1. Приведите структурную схему радиотехнической информационной системы.
2. Какие числовые характеристики применяются для описания моделей сигналов?
3. В чем состоит разница между видеосигналом и радиосигналом?
4. Сформулируйте принцип динамического представления сигнала.
5. Какими свойствами обладает дельта-функция?
6. Перечислите основные свойства линейного пространства.
7. Что такое координатный базис пространства?
8. Какие функции называются ортогональными?
9. Запишите выражение для обобщенного ряда Фурье.
10. Дайте определение спектра сигнала.
11. Как связаны между собой энергия сигнала и его спектральные составляющие?

Глава 2. Детерминированные сигналы

2.1 Тригонометрический ряд Фурье. Спектр периодического сигнала

Рассмотрение методов спектрального анализа радиотехнических сигналов необходимо с детерминированных периодических сигналов. Детерминированные сигналы характеризуются тем, что в любой наперед заданный момент времени t его значения можно точно определить. Периодическим детерминированным сигналом является сигнал известной формы, периодически повторяющийся через интервал времени T , называемый периодом повторения [1]. Математически периодический сигнал описывается выражением

$$s_n(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} s(t - \ell T), \quad (2.1)$$

К периодическим сигналам относятся гармоническое колебание, определенное на бесконечном интервале времени, последовательность импульсов с известной амплитудой, длительностью и периодом повторения и другие.

Спектральный анализ предусматривает выбор системы базисных функций. На практике наибольшее распространение получили тригонометрические функции. Это обусловлено тем, что при преобразовании сигналов такой формы, например, линейными радиотехническими цепями их форма сохраняется, а меняются только амплитуда и фазы колебаний. Кроме этого, формирование таких сигналов осуществляется достаточно простыми техническими средствами.

Сигналы, описываемые тригонометрическими функциями, называются гармоническими сигналами, а спектральный анализ в системе базисных тригонометрических функций – гармоническим анализом.

Выберем в качестве базисных функций систему

$$\{n_k(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \dots \\ \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin k\omega_1 t, \dots \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Нетрудно убедиться, что функции, образующие систему (2.2) являются ортогональными на интервале времени $(0, T)$ и удовлетворяют условию периодичности (2.1). Тогда в соответствии с (1.36) можно записать

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (2.3)$$

где $\omega_k = k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T}$.

Нормы базисных функций в соответствии с (1.26) равен

$$\|\eta_0(t)\| = \|1\| = \sqrt{T}; \quad \|\cos \omega_k t\| = \|\sin \omega_k t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

тогда из (1.39) вытекает

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad (2.4)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos \omega_k t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \omega_k t dt. \quad (2.5)$$

Выражение (2.3) называется тригонометрическим рядом Фурье и представляет собой разложение сигнала $s(t)$ на составляющие в системе тригонометрических функций.

В радиотехнической практике часто оказывается удобнее иное представление ряда (2.3). Если выделить из (2.3) k -тую составляющую

$s_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ то представить можно в виде

$$s_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \omega_k t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \omega_k t \right), \quad (2.6)$$

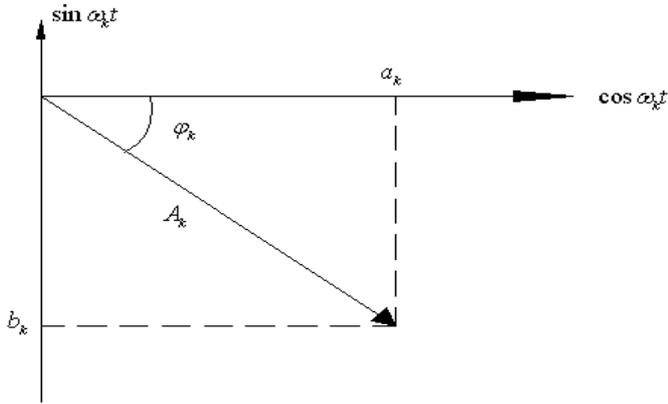


Рис. 2.1.

С геометрической точки зрения составляющую $s_k(t)$ можно рассматривать как вектор в системе координат $\{\cos \omega_k t, \sin \omega_k t\}$ (рис. 2.1). Длина вектора $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а φ_k -угол, на который повернут вектор относительно оси $\cos \omega_k$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k, \quad -\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k.$$

Тогда выражение (2.6) принимает вид

$$s_k(t) = A_k (\cos \varphi_k \cos \omega_k t - \sin \varphi_k \sin \omega_k t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (2.7)$$

где $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$.

С учетом (2.7), ряд Фурье (2.3) можно переписать следующим образом

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (2.8)$$

Составляющая

$$s_n(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2.9)$$

называется k -той гармонической составляющей или просто k -той гармоникой.

В соответствии с определением спектра, данным в предыдущем разделе, совокупность $\frac{a_0}{2}$ и A_k составляют амплитудный спектр, а совокупность φ_k – фазовый спектр сигнала. Таким образом, амплитудный спектр периодического сигнала содержит постоянную составляющую $\frac{a_0}{2}$ и бесконечное число амплитуд A_k соответствующих гармоник. То же самое относится и к фазовому спектру.

При спектральном анализе спектры удобно представлять в виде спектральных диаграмм.

На рис.2.2а изображен периодический сигнал в координатах S и t . Проведем еще одну ось, перпендикулярную осям S и t и отложим на этой оси значения $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Изобразим гармонические составляющие сигнала на этих частотах, а на оси частот отложим значения $\frac{a_0}{2}$ и A_k в виде отрезков прямой и развернуть всю систему координат вокруг оси S на 90° в направлении стрелки, то получим диаграмму амплитудного спектра сигнала (рис. 2.2, б). Таким же образом можно построить спектральную диаграмму фазового спектра, примерный вид которой показан на рис. 2.2, в.

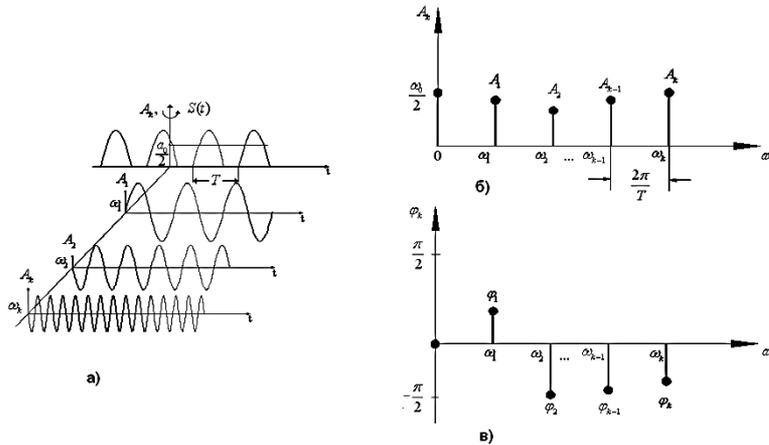


Рис. 2.2. Периодический сигнал в координатах S и t (а), диаграмма амплитудного спектра (б), спектральная диаграмма фазового спектра (в).

2.2 Амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов

Разложение в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой S_0 , длительностью τ_u и периодом следования T , симметричной относительно нуля, т.е.

$$s(t) = S_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau_u}\right), \quad (2.10)$$

Здесь
$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}, \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Разложение такого сигнала в ряд Фурье даёт

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right], \quad (2.11)$$

где $q = \frac{T}{\tau_u}$ – скважность.

Для упрощения записи можно ввести обозначение

$$\frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} = \text{sinc} \frac{\omega_k \tau_u}{2} = \text{sinc} \frac{2\pi k \tau_u}{2T} = \text{sinc} \frac{k\pi}{q}, \quad (2.12)$$

Тогда (2.11) можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \frac{k\pi}{q} \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right], \quad (2.13)$$

На рис. 2.3 изображена последовательность прямоугольных импульсов. Спектр последовательности, как впрочем, и любого другого периодического сигнала, носит дискретный (линейчатый) характер.

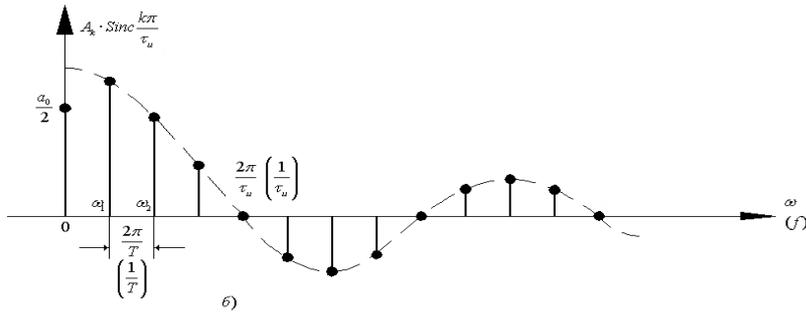
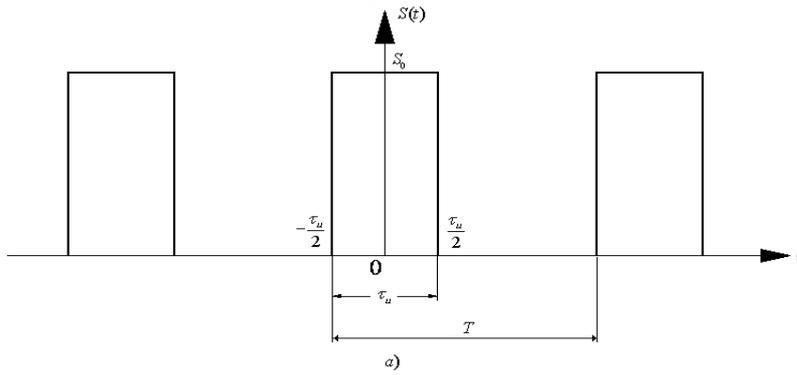


Рис. 2.3 а, б. Последовательность прямоугольных импульсов (а), огибающая спектра последовательности прямоугольных импульсов (б).

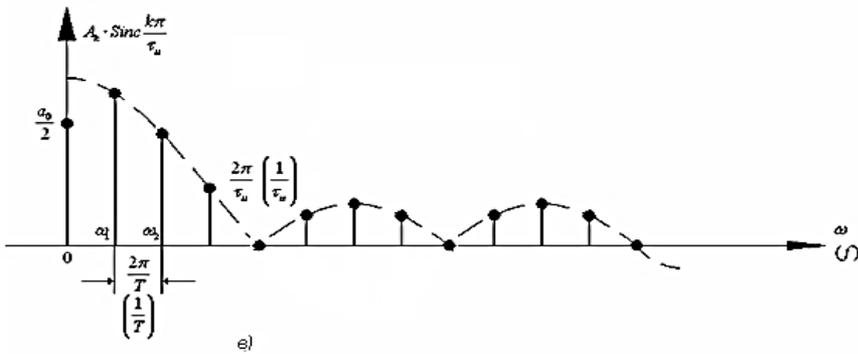


Рис. 2.3 в. Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов.

Огибающая спектра (рис. 2.3, б) пропорциональна $\text{sinc} \frac{k\pi}{q}$.

Расстояние по оси частот между двумя соседними составляющими спектра равно $\frac{2\pi}{T}$, а между двумя нулевыми значениями (ширина лепестка спектра) – $\frac{2\pi}{\tau_u}$. Число гармонических составляющих в пределах одного лепестка, включая правое по рисунку нулевое значение, составляет $\lfloor q \rfloor$, где знак $\lfloor \]$ означает округление до ближайшего целого числа, меньшего q (если скважность – дробное число), или q (при целочисленном значении скважности). При увеличении периода T основная частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ уменьшается, спектральные составляющие на диаграмме сближаются, амплитуды гармоник также уменьшаются. При этом форма огибающей сохраняется.

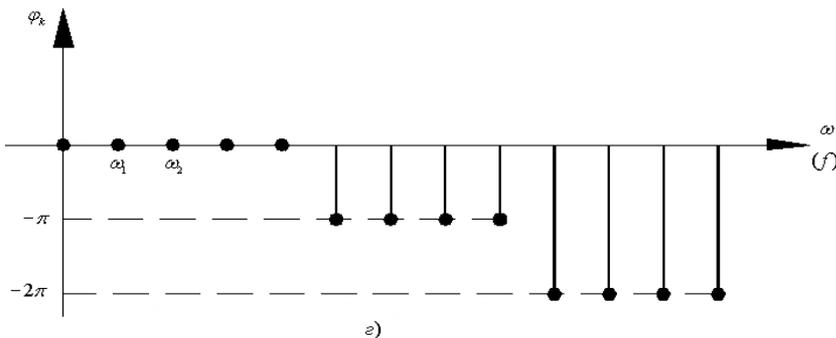


Рис. 2.3 г. Фазовый спектр последовательность прямоугольных импульсов.

При решении практических задач спектрального анализа вместо угловых частот ω_k используют циклические частоты $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{T}$, измеряемые в Герцах. Очевидно, расстояние между соседними гармониками на диаграмме составит $\frac{1}{T}$, а ширина одного лепестка

спектра $-\frac{1}{\tau_u}$. Эти значения представлены на диаграмме в круглых скобках.

В практической радиотехнике в большинстве случаев вместо спектрального представления (рис. 2.3, б) используют спектральные диаграммы амплитудного и фазового спектров. Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2.3, в.

Очевидно, огибающая амплитудного спектра пропорциональна $\left| \sin c \frac{k\pi}{q} \right|$.

Что же касается фазового спектра (рис. 2.3, г), то полагают, что начальные фазы гармонических составляющих изменяются скачком на величину $-\pi$ при изменении знака огибающей $\sin c k\pi/q$. Начальные фазы гармоник первого лепестка, полагаются равными нулю. Тогда начальные фазы гармоник второго лепестка составят $\varphi = -\pi$, третьего лепестка $\varphi = -2\pi$ и т.д.

Рассмотрим еще одно представление сигнала рядом Фурье. Для этого воспользуемся формулой Эйлера

$$\cos x = \frac{1}{2} [e^{jx} + e^{-jx}].$$

В соответствии с этой формулой k -ю составляющую (2.9) разложения сигнала в ряд Фурье можно представить следующим образом

$$s_k(t) = \frac{A_k}{2} [e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)}] = \dot{C}_k e^{j\omega_k t} + \dot{C}_{-k} e^{-j\omega_k t}, \quad (2.14)$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k}; \quad \dot{C}_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}. \quad (2.15)$$

Здесь величины \dot{C}_k и \dot{C}_{-k} являются комплексными и представляют собой комплексные амплитуды составляющих спектра. Тогда ряд

Фурье (2.8) с учетом (2.14) примет следующую форму

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\omega_k t}, \quad (2.16)$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-j\omega_k t} dt, \quad (2.17)$$

Нетрудно убедиться в том, что разложение (2.16) проводится по базисным функциям $\{e^{j\omega_k t}\}$, $k = (-\infty, \infty)$, которые также являются ортогональными на интервале $(0, T)$, т.е.

$$\int_0^T e^{j\omega_k t} e^{j\omega_l t} dt = \begin{cases} T, & \text{при } k = l, \\ 0, & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Выражение (2.16) представляет собой комплексную форму ряда Фурье, которая распространяется на отрицательные частоты. Величины \dot{C}_k и $\dot{C}_{-k} = C_k^*$, где C_k^* означает комплексную сопряженную с \dot{C}_k величину, называются комплексными амплитудами спектра. Т.к. \dot{C}_k является комплексной величиной, из (2.15) следует, что

$$|\dot{C}_k| = \frac{A_k}{2} \text{ и } \arg \dot{C}_k = \varphi_k.$$

Тогда совокупность $|\dot{C}_k|$ составляет амплитудный, а совокупность φ_k – фазовый спектр сигнала $S(t)$.

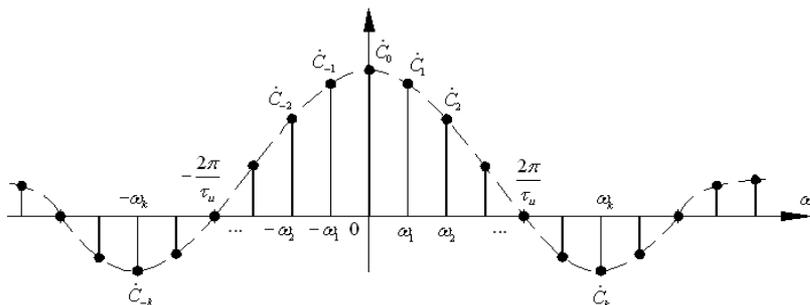


Рис. 2.4. Спектральная диаграмма спектра рассмотренной выше последовательности прямоугольных импульсов, представленного комплексным рядом Фурье.

На рис. 2.4 представлена спектральная диаграмма спектра рассмотренной выше последовательности прямоугольных импульсов, представленного комплексным рядом Фурье

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \frac{S_0}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{k\pi}{q} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Спектр также носит линейчатый характер, но в отличие от ранее рассмотренных спектров определяется как в области положительных, так и в области отрицательных частот. Поскольку \dot{C}_k является чётной функцией аргумента k , спектральная диаграмма симметрична относительно нуля.

Исходя из (2.15) можно установить соответствие между $|\dot{C}_k|$ и коэффициентами a_k и b_k разложения (2.3). Так как

$$|\dot{C}_k| = \frac{A_k}{2} \text{ и } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

то в результате получим

$$|\dot{C}_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (2.18)$$

Выражения (2.5) и (2.18) позволяют найти значения $|\dot{C}_k|$ при практических расчетах.

Дадим геометрическую интерпретацию комплексной формы ряда Фурье. Выделим k -тую составляющую спектра сигнала. В комплексной форме k -я составляющая описывается формулой

$$s_k(t) = \dot{C}_k e^{j\omega_k t} + \dot{C}_{-k} e^{-j\omega_k t}, \quad (2.19)$$

где \dot{C}_k и \dot{C}_{-k} определяются выражениями (2.15).

В комплексной плоскости каждое из слагаемых в (2.19) изображается в виде векторов длиной $|\dot{C}_k| = |\dot{C}_{-k}| = \frac{A_k}{2}$, повернутых на угол φ_k и $-\varphi_k$ относительно вещественной оси и вращающихся в противоположных направлениях с частотой ω_k (рис. 2.5).

Очевидно, сумма этих векторов дает вектор, расположенный на вещественной оси, длина которого составляет A_k . Но этот вектор соответствует гармонической составляющей $s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$.

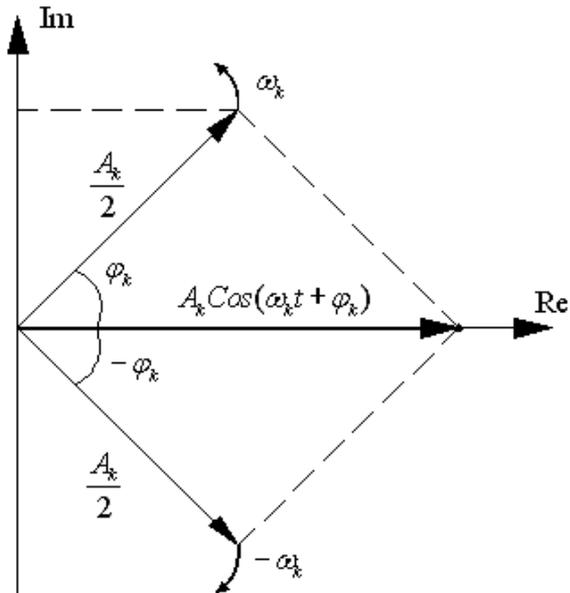


Рис. 2.5

Проекции векторов на мнимую ось имеют равную длину, но противоположные направления и в сумме дают ноль. Это значит, что сигналы, представленные в комплексной форме (2.16) в действительности являются вещественными сигналами. Иными словами, комплексная форма ряда Фурье является математической абстракцией, весьма удобной при решении целого ряда задач спектрального анализа. Поэтому, иногда спектр, определяемый тригонометрическим рядом Фурье, называют физическим спектром, а комплексной формой ряда Фурье – математическим спектром.

И в заключение рассмотрим вопрос распределения энергии и мощности в спектре периодического сигнала. Для этого воспользуемся равенством Парсеваля (1.42). При разложении сигнала в тригонометрический ряд Фурье выражение (1.42) принимает вид

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k .$$

Энергия постоянной составляющей

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 dt = \frac{a_0^2 T}{4},$$

а энергия k -той гармоники

$$\mathcal{E}_k = \int_0^T A_k^2 \cos^2(\omega_k t + \varphi_k) dt = \frac{A_k^2 T}{2}.$$

Тогда энергия сигнала

$$\mathcal{E}_c = \frac{a_0^2 T}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 T}{2}. \quad (2.20)$$

Т.к. средняя мощность сигнала

$$P_c = \frac{\mathcal{E}_c}{T},$$

то с учетом (2.18)

$$P_c = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}. \quad (2.21)$$

При разложении сигнала в комплексный ряд Фурье выражение (1.42) имеет вид

$$\mathcal{E}_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_k,$$

где $\mathcal{E}_k = \int_0^T \left(\frac{A_k}{2} \right)^2 \left(e^{j\omega_k t} \right)^2 dt = \frac{A_k^2 T}{4}$ - энергия k -той

гармоники.

Энергия сигнала в этом случае

$$\mathcal{E}_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2 T}{4},$$

а его средняя мощность

$$P_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2}{4}.$$

Из приведенных выражений следует, что энергия или средняя мощность k -той спектральной составляющей математического спектра вдвое меньше энергии или мощности соответствующей спектральной составляющей физического спектра. Это обусловлено тем, что \mathcal{E}_k

физического спектра распределяется поровну между \mathcal{E}_k и \mathcal{E}_{-k} математического спектра.

Выражения (2.20) – (2.12) позволяют рассчитать и построить спектральные диаграммы распределения энергий или мощностей, т.е. энергетические спектры периодического сигнала.

2.3 Гармонический анализ периодических сигналов в программном пакете NI Multisim

Периодическую функцию $S(t)$ с периодом T можно представить рядом Фурье:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \quad (2.23)$$

$$A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}; \quad (2.24)$$

$$\varphi_n = -\arcsin \frac{b_n}{\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}}; \quad (2.25)$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) dt; \quad (2.26)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (2.27)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} S(t) \sin(n\omega_1 t) dt; \quad (2.28)$$

Коэффициенты a_n , b_n зависят от значения начальной точки интервала $(t_1, t_1 + T)$. Обычно выбирают $t_1 = -\frac{T}{2}$ или $t_1 = 0$. В дальнейшем будем использовать интервал разложения $(0, T)$. Простейшими периодическими функциями являются «меандр» (рис.2.6), последовательность пилообразных импульсов (рис. 2.7), последовательность треугольных импульсов (рис. 2.8).

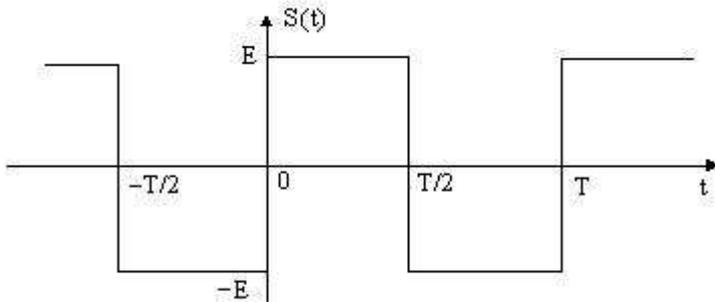


Рис. 2.6. График прямоугольного колебания «меандр».

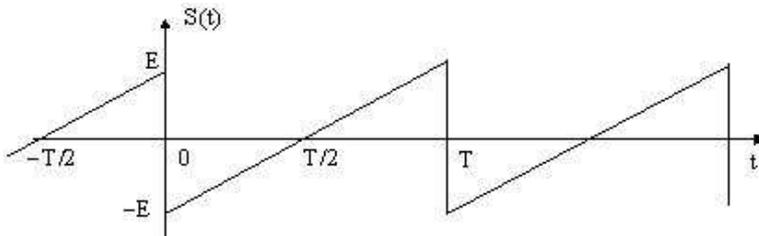


Рис. 2.7а. График пилообразного колебания. $\varphi = \pi/2$.

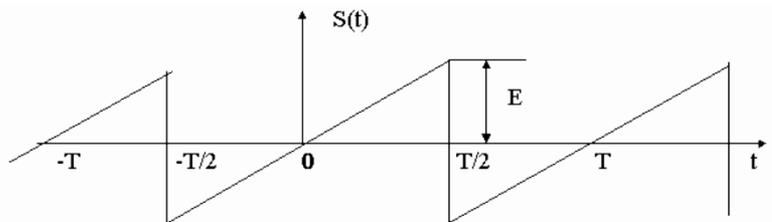


Рис. 2.76. График пилообразного колебания. $\varphi=0$.

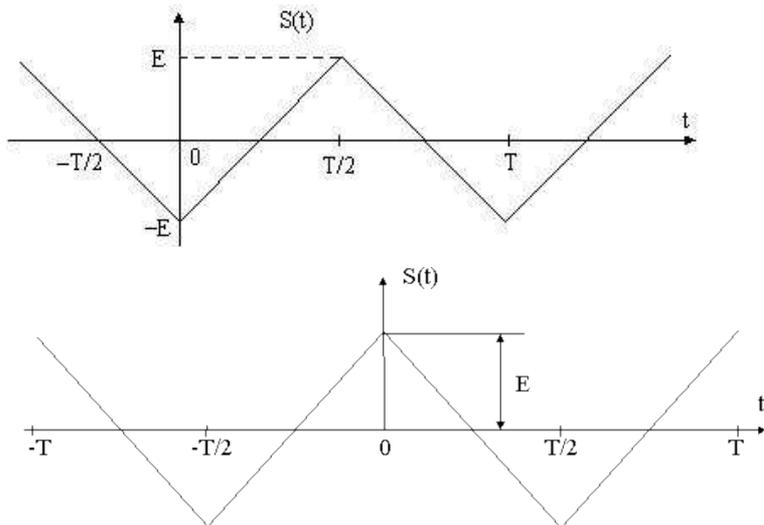


Рис. 2.8. График последовательности треугольных импульсов.
 $\varphi=\pi/2$ (а), $\varphi=0$ (б).

Их разложение в ряд Фурье имеет вид: «меандр» (рис. 2.6)

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 0 + \frac{4E}{\pi} \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2E}{3\pi} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \\
 & + \frac{2E}{(2k+1)\pi} \cos\left[(2k+1)\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right] + \dots,
 \end{aligned}$$

$k=0, 1, \dots$ (2.29)

последовательность пилообразных импульсов (рис. 2.7а)

$$S(t) = 0 + \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{2E}{2\pi} \cos(2\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) +$$

$$+ \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \dots + \frac{2E}{n\pi} \cos(n\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \dots,$$

n=1, 2, ... ; (2.30)

последовательность пилообразных импульсов (рис. 2.7б)

$$S(t) = 0 + \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_1 t) + \frac{2E}{2\pi} \cos(2\omega_1 t) +$$

$$+ \frac{2E}{3\pi} \cos(3\omega_1 t) + \dots + \frac{2E}{n\pi} \cos(n\omega_1 t) + \dots,$$

n=1, 2, ..., (2.30*);

последовательность треугольных импульсов (рис. 2.8а)

$$S(t) = \frac{8E}{\pi^2} \cos(\omega_1 t + \pi) + \frac{8E}{9\pi^2} \cos(3\omega_1 t - \pi) + \dots$$

$$+ \frac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos[(2k+1)\omega_1 - \pi] + \dots,$$

k=0, 1, 2, ... (2.31)

последовательность треугольных импульсов (рис. 2.8б)

$$S(t) = \frac{8E}{\pi^2} \cos(\omega_1 t) + \frac{8E}{9\pi^2} \cos(3\omega_1 t) + \dots$$

$$+ \frac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos[(2k+1)\omega_1] + \dots,$$

k=0, 1, 2, ... (2.31*)

Относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации периодической функции S(t) конечным числом членов ряда Фурье N можно определить по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{P - \sum_{n=0}^N P_n}{P}}, \quad (2.32)$$

для (2.29, 2.30 и 2.31):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt, \quad (2.33)$$

для (2.30* и 2.31*):

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt, \quad (2.33^*)$$

$$P_0 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2, \quad (2.34)$$

$$P_n = \frac{1}{2} A_n^2, \quad (2.35)$$

где P – средняя мощность сигнала;

P_n – средняя мощность n -й гармоники сигнала.

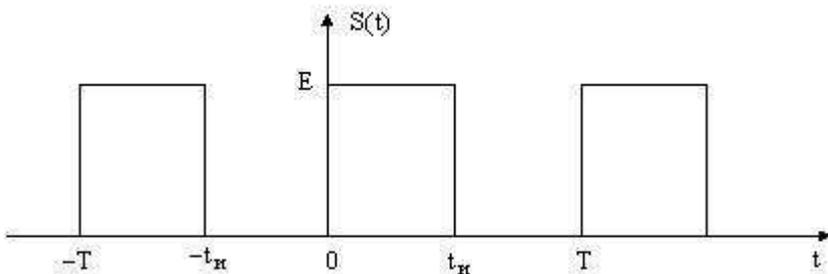


Рис. 2.9. График последовательности видеоимпульсов

Рассмотрим спектр последовательности прямоугольных однополярных импульсов (рис. 2.9).

Важным параметром подобных сигналов является отношение $q = T/t_{и}$, называемое скважностью импульсной последовательности и имеющее в практических приложениях диапазон значений от нескольких единиц до нескольких тысяч. Параметр $K_3 = 1/q$ называется коэффициентом заполнения.

По формулам (2.22–2.28) находим

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E \cdot t_u}{T} = \frac{E}{q} = E \cdot K_3, \quad (2.36)$$

$$a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\omega_1 t_u}{2} = \frac{2E}{q} \frac{\sin(\frac{n\pi}{q})}{\frac{n\pi}{q}}, \quad (2.37)$$

$b_n=0$ следовательно, $A_n=|a_n|$.

Таким образом,

$$S(t) = E \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos n\omega_1 t \right), \quad (2.38)$$

Спектр амплитуд рассматриваемого сигнала имеет лепестковую структуру (рис. 2.10).

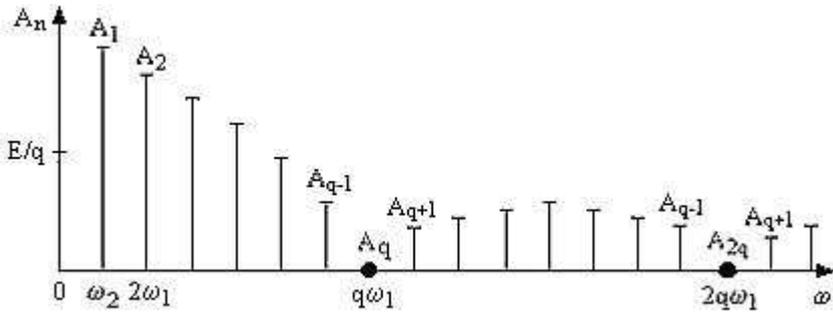


Рис. 2.10. Амплитудный спектр периодической последовательности.

Из спектральной диаграммы видно, что амплитуды гармоник с частотами $Kq\omega_1$, где $K = 1, 2, 3, \dots$, равны нулю. То есть ширина лепестка определяется как произведение скважности на частоту первой гармоники. Количество гармоник в лепестке $n_1 = q - 1$. Отсюда ясно, что при $q \gg 1$ спектр содержит очень большое число гармоник. В этом

случае амплитуды соседних гармоник близки по величине и при малых

значениях n : $A_n \approx \frac{2E}{q} = a_0$.

2.3.1 Расчётно-практическое задание

1. Рассчитать и построить спектр амплитуд первых семи гармоник периодического прямоугольного колебания– «меандра» (рис. 2.6) для заданных преподавателем T и E . Результаты занести в табл. 2.2-2.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

2. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых восьми гармоник периодического пилообразного колебания (рис. 2.7) для заданных преподавателем T и E . Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала четырьмя, пятью, шестью, семью и восемью гармониками.

3. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых семи гармоник периодической последовательности треугольных импульсов (рис. 2.8). Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

4. Рассчитать и построить спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис. 2.9) для заданных преподавателем E , T и t_u . При расчетах ограничиться тремя «лепестками» спектра.

Таблица 2.1

Данные для расчета, анализа и синтеза периодических сигналов

№ варианта	E , В	T , мс	t_u , мс
1	5	0,2	0,05
2	6	0,25	0,05
3	7	0,3	0,1
4	8	0,35	0,07
5	9	0,4	0,1

6	10	0,45	0,15
7	11	0,5	0,1
8	12	0,6	0,15
9	13	0,65	0,13
10	14	0,75	0,25
11	15	0,8	0,2
12	16	0,9	0,3
13	17	1,0	0,25
14	18	1,2	0,4
15	19	1,2	0,3
16	20	1,4	0,45
17	10	1,5	0,3
18	11	1,6	0,4
19	15	1,8	0,6
20	8	2,0	0,4

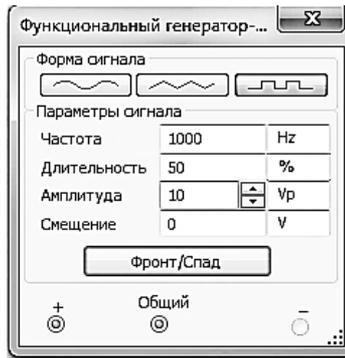
2.3.2 Выполнение гармонического анализа сигнала «меандр» в пакете NI Multisim

Перед началом выполнения компьютерного практикума необходимо изучить основную и дополнительную литературу по программному пакету NI Multisim.

Функциональный генератор

Лицевая панель функционального генератора показана на рисунке. Управление генератором осуществляется следующими органами управления[14]:

- выбор формы выходного сигнала: синусоидальной (установлен по умолчанию), треугольной и прямоугольной;
- установка частоты выходного сигнала;
- установка коэффициента заполнения в %: для импульсных сигналов это отношение длительности импульса к периоду повторения - величина, обратная скважности, для треугольных сигналов - соотношение между длительностями переднего и заднего фронта;

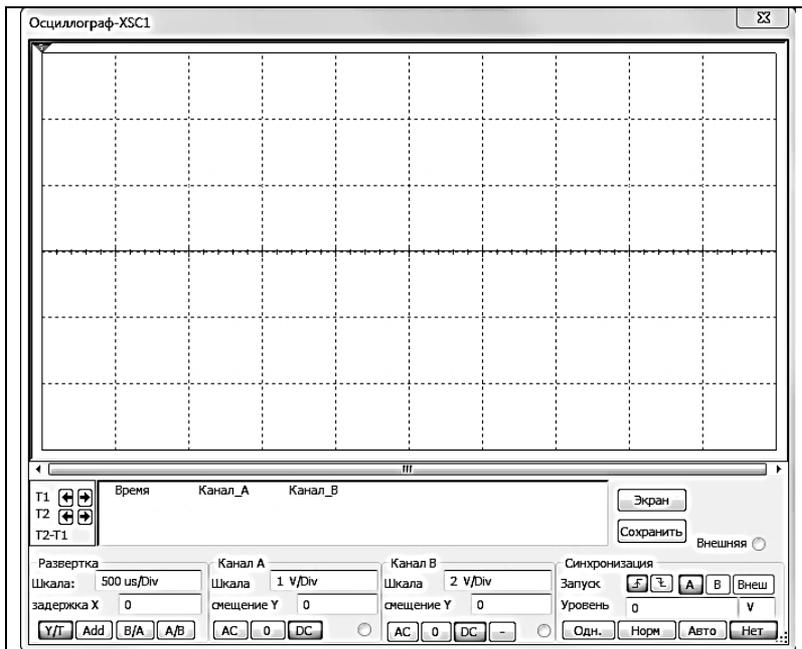


- установка амплитуды выходного сигнала;
- установка смещения (постоянной составляющей) выходного сигнала;
- выходные клеммы; при заземлении клеммы COM (общий) клеммах "-" и "+" получается парафазный сигнал.

Осциллограф

Осциллограф имеет два канала (CHANNEL) А и В (в случае двухканального осциллографа; в арсенале приборов Multisim имеется также и 4-х канальный осциллограф, а также виртуальный осциллограф фирмы Agilent) с отдельной регулировкой чувствительности в диапазоне от 10 мкВ/дел (mV/Div) до 5 кВ/дел (kV/Div) и регулировкой смещения по вертикали (YPOS). При этом каждый канал имеет два вывода обозначенные как «+» и «-». Подавая сигнал на один из выводов, другой целесообразно заземлять.

Выбор режима по входу осуществляется нажатием кнопок AC, 0, DC. Режим AC предназначен для наблюдения только сигналов переменного тока (его еще называют режимом «закрытого входа», поскольку в этом режиме на входе усилителя включается разделительный конденсатор, не пропускающий постоянную составляющую). В режиме 0 входной зажим замыкается на землю. В режиме DC (включен по умолчанию) можно проводить осциллографические измерения как постоянного, так и переменного тока. Этот режим еще называют режимом «открытого входа», поскольку входной сигнал поступает на вход вертикального усилителя непосредственно. С правой стороны от кнопки DC расположен входной зажим.



Режим развертки выбирается кнопками Y/T, B/A, A/B. В режиме Y/T(обычный режим, включен по умолчанию) реализуются следующие режимы развертки:

- по вертикали - напряжение сигнала, по горизонтали,
- время; в режиме B/A: по вертикали - сигнал канала B, по горизонтали,
- сигнал канала A; в режиме A/B: по вертикали - сигнал канала A, по горизонтали - сигнал канала B.

Анализатор спектра

Описание элементов управления и настройки прибора

Анализатор спектра:

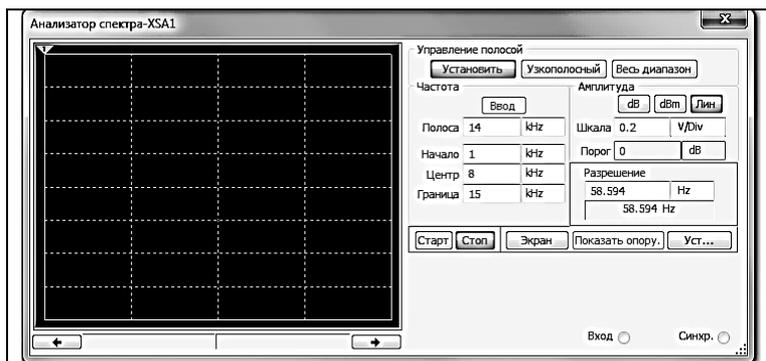
а) *Управление частотой.*

Режим «**Узкополосный**» - спектральный анализ сигнала с максимальным разрешением.

Режим «**Весь диапазон**» - спектральный анализ сигнала в пределах полосы частот, реализуемой программным пакетом.

Режим «**Установить**» - ручная установка границ спектрального анализа.

Кнопка **Ввод** – применение введенных значений.



б) *Частота.*

Полоса – полоса анализируемого спектра,

Начало – начальная частота анализа,

Центр – частота, отображаемая в центре рабочего окна,

Граница – конечная частота анализа.

в) *Амплитуда.*

Установка единиц отображения амплитуды и цены деления.

г) *Разрешение.*

Установка минимального шага анализа. Отображение достигнутого шага анализа при моделировании.

д) *Общие настройки и управление.*

Старт – запуск процесса спектрального анализа сигнала,

Стоп – остановка процесса спектрального анализа сигнала,

Уст... - установки (**рекомендуется установить число точек**

FFT - 32768). FFT – Быстрое преобразование Фурье.

4. Анализ «Фурье»

На примере анализа прямоугольной периодической последовательности импульсов с параметрами: амплитуда = 10 В, **T** (период)=1мс, **t_ц** (длительность)=0,5мс рассмотрим работу необходимых инструментальных средств пакета NI Multisim.

Порядок выполнения:

1. Подключение источников и измерительных приборов

Используя команду **Моделирование/Приборы**, расположим

источники и измерительные приборы и соединим их в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2.11. Источник – **Функциональный генератор (XFG1)**; Измерительные приборы – **Осциллограф (XSC1)** и **Анализатора спектра (XSA1)**.

2. Установка параметров исследуемой последовательности

Вызовем свойства источника **Функциональный генератор** (двойной щелчок по изображению источника на рабочем поле или из контекстного меню «Свойства»), рис. 2.12. Установим требуемые параметры: форму («меандр» = прямоугольные импульсы), частоту ($f=1/T$) и амплитуду сигнала.

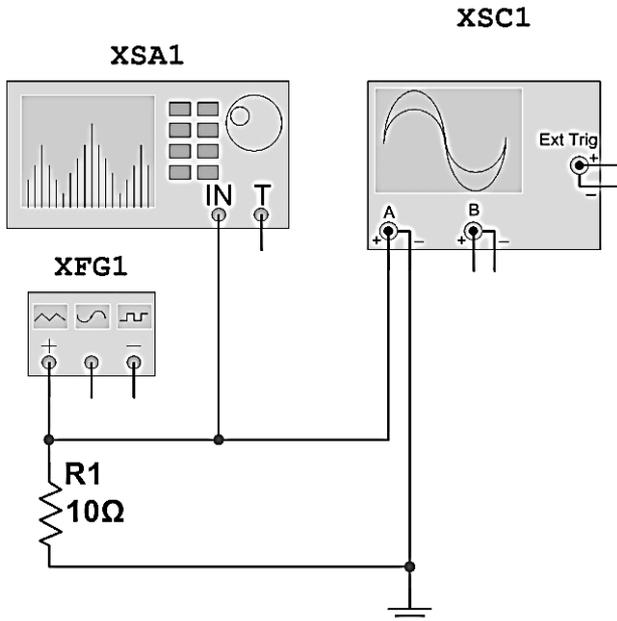


Рис. 2.11. Схема подключения источников и измерительных приборов для изучения прямоугольной периодической последовательности импульсов.

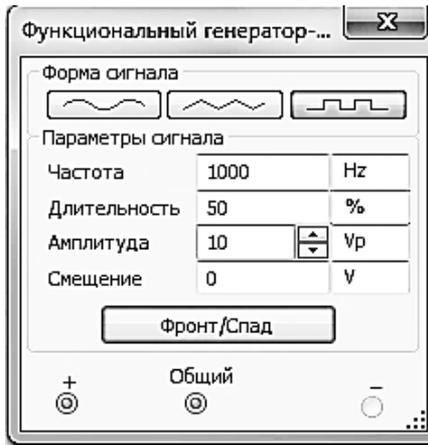
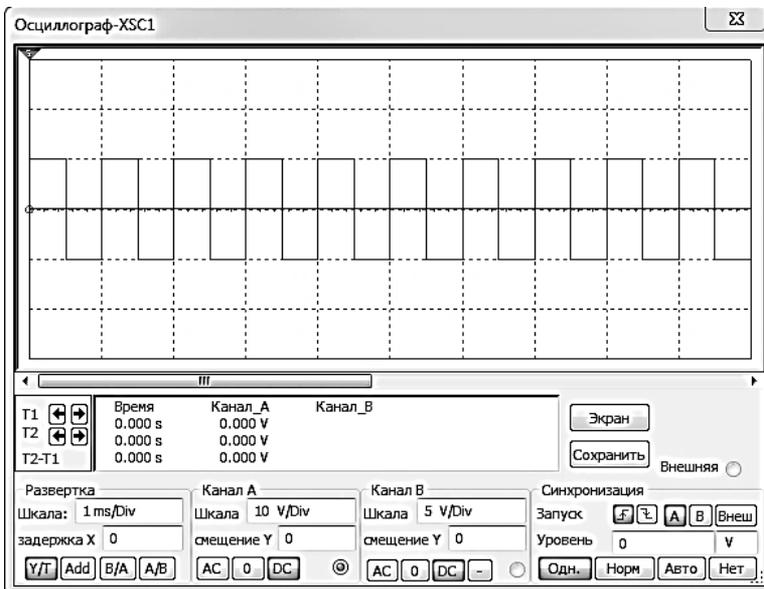


Рис. 2.12. Вид окна «Свойства» функционального генератора XFG.



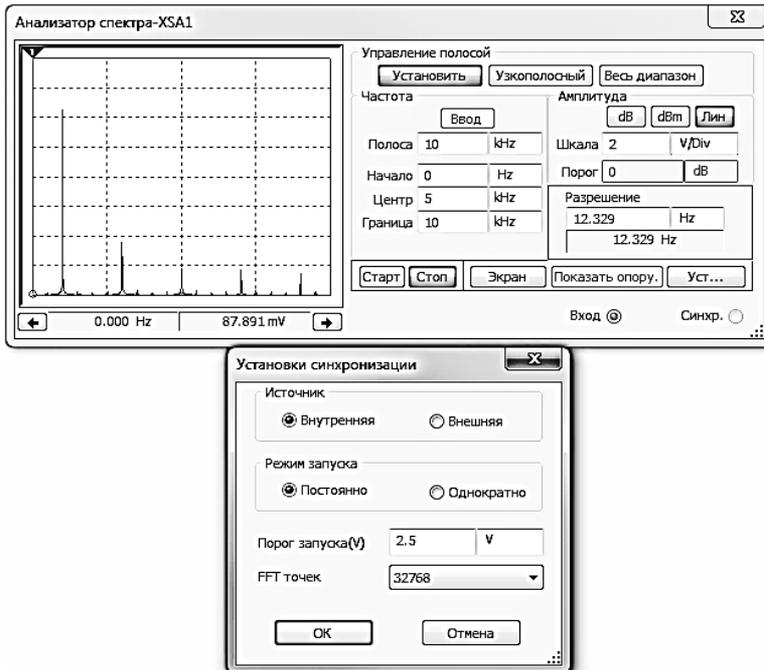


Рис. 2.13. Вид окон **Осциллограф** и **Анализатора спектра**.

3. Анализ исследуемой последовательности

Вызовем свойства прибора **Осциллограф** (двойной щелчок по изображению источника на рабочем поле или из контекстного меню «Свойства»). Установим удобные значения горизонтальной и вертикальной развёрток. Вид окна **Осциллограф** исследуемой прямоугольной периодической последовательности импульсов показан на рис. 2.13.

Используя **Анализатор спектра**, произведём анализ частотного спектр периодической последовательности импульсов, рис. 2.13.Используем следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... - установки (**установим число точек FFT - 32768**).

Выполним Фурье анализ периодической последовательности импульсов, для этого воспользуемся командой **Моделирование/Вид анализа/Фурье...**. Во вкладке **Переменные**. окна **Анализ Фурье**. установим переменные для анализа - (V1), выделив переменную в поле **Выходные переменные** и нажав кнопку **Добавить** (рис. 2.14).

Произведём **Анализ Фурье** положительной части «меандра» (амплитуда от 0 до 10В) - запуск по нажатию на кнопку **Моделировать**.

Результаты анализа будут представлены программой в табличном и графическом видах (рис. 2.15).

В соответствующих столбцах отображаются:

Harmonic – номер гармоники,

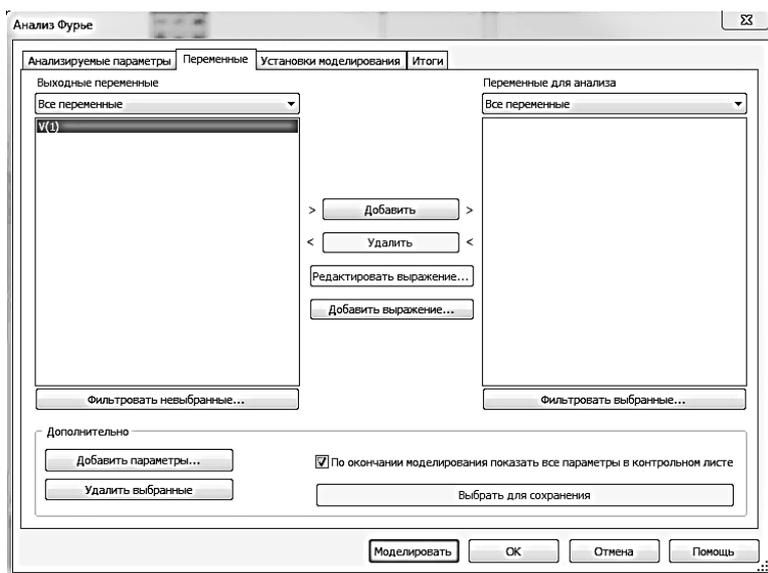
Frequency – частота гармоники,

Magnitude – амплитуду гармоники,

Phase– фаза гармоники,

Norm.Magn. – нормированное значение амплитуды (относительно значения амплитуды первой гармоники),

Norm. Phase–нормированное значение фазы гармоники (относительно значения фазы первой гармоники).



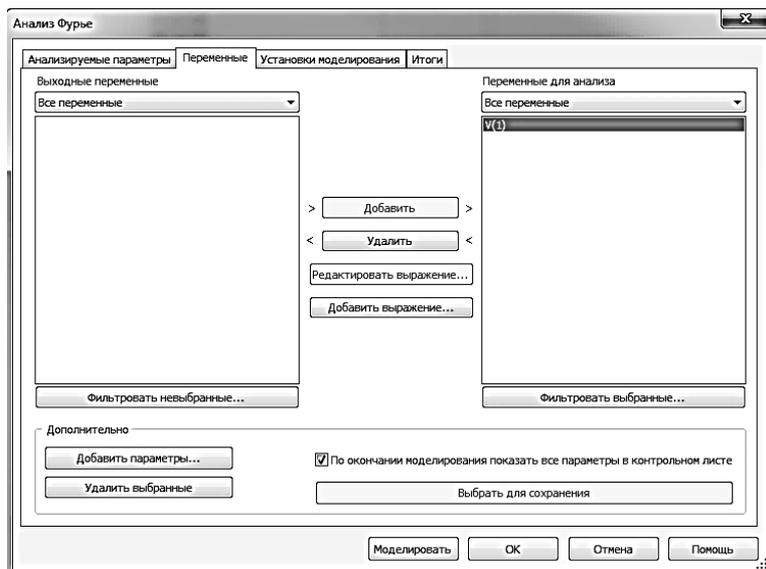


Рис. 2.14. Вид окна «Анализ Фурье»

Harmonic	Frequency	Magnitude	Phase	Norm. Mag	Norm. Phase
1	1000	12.7327	-0.70312	1	0
2	2000	2.04388e-015	171.409	1.60522e-016	172.112
3	3000	4.24509	-2.1094	0.3334	-1.4062
4	4000	1.12624e-015	157.543	8.84525e-017	158.246
5	5000	2.54808	-3.5156	0.200121	-2.8125
6	6000	1.12843e-015	-148.9	8.86245e-017	-148.2
7	7000	1.82115	-4.9219	0.143029	-4.2187

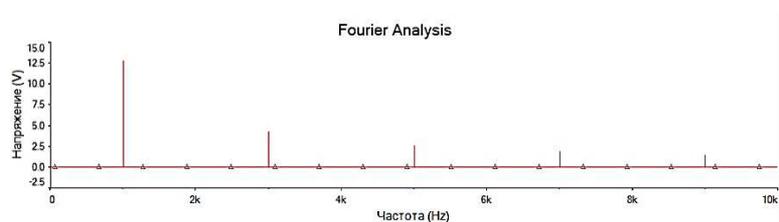


Рис. 2.15. Вид окна результатов анализа Фурье.

2.3.3 Компьютерный практикум

Цель работы: рассчитать амплитуды и фазы гармоник периодических последовательностей в пакете NI Multisim.

Порядок выполнения:

1. Запустить программу NI Multisim.
2. Собрать схему (рис. 2.11) для гармонического анализа последовательности прямоугольных (рис. 2.6), пилообразных (рис. 2.7), треугольных (рис.2.8) и видеоимпульсов (рис. 2.9).

3. В соответствии с вариантом (табл. 2.1), установить следующие параметры **Функционального генератора**:

а) режим формы сигнала - **Прямоугольные**;

б) **амплитуду E**;

в) **частоту импульсов $f=1/T$** ,

г) **длительность $t\%$** - отношение в %, длительности импульса к длительности периода повторения:

для прямоугольных импульсов $T=50\%$,

для пилообразных и треугольных импульсов $t_u \% = \frac{t_u}{T} 100\%$.

4. Проконтролировать сигнал с помощью осциллографа.
5. С помощью курсоров окна анализатора спектра измерить амплитуды гармоник.
6. Выполнить анализ Фурье (см. пример).
7. Сравнить результаты выполнения расчётно-практического задания (п. 2.3.1) с получившимися значениями выполнения предыдущего пункта.
8. Повторить пункты 3 – 7 для треугольной, пилообразной и видео периодических последовательностей импульсов.

Результаты занести в табл. 2.2-2.3. При анализе пилообразной периодической последовательности, для формирования пилообразного сигнала, вместо функционального генератора XFG1 необходимо использовать **Импульсный источник напряжения**. Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **PULSE_VOLTAGE**. Во вкладке *Параметры* необходимо установить следующие значения:

Начальное значение = -E,

Амплитуда импульса = E,

Задержка = 0 ms,

Фронт = T,

Спад = 0 ps,

Длительность = t_u ,

Период = T,

Анализ амплитуды = E,

Остальные параметры = «по умолчанию».

Таблица. 2.2

№ гармоники	Частота гармоники, Гц	Амплитуда гармоники (расчёт), В	Амплитуда гармоники, (Magnitude. NI Multisim), В
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Таблица. 2.3

№ гармоники	Частота гармоники, Гц	Фаза гармоники (расчёт), град.	Фаза гармоники , (Norm. Phase. NI Multisim), град
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

9. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Дать определение сигнала, периодического сигнала, частотного спектра сигнала.
2. Обосновать возможность представления любого периодического сигнала в виде бесконечного ряда гармонических колебаний.
3. Указать влияние зависимости спектра сигнала от амплитуды, смещения, частоты и длительности прямоугольных импульсов.
4. Изложить методику исследования математических моделей детерминированных сигналов.
5. Назовите особенности амплитудно-частотного спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.
6. Как влияет изменение скважности на спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов?

7. Постройте и сравните спектры периодической последовательности униполярных импульсов и периодической последовательности знакопеременных импульсов.
8. Как изменится спектр периодического сигнала, если период повторения устремить в бесконечность?
9. Назовите особенности амплитудно-частотного спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.
10. Как влияет изменение скважности на спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов?
11. Постройте и сравните спектры периодической последовательности униполярных импульсов и периодической последовательности знакопеременных импульсов.
12. Как изменится спектр периодического сигнала, если период повторения устремить в бесконечность?
13. Как определить число гармонических составляющих в спектре импульсного сигнала?
14. Какая доля общей энергии прямоугольного импульса содержится в пределах основного лепестка спектральной диаграммы?

2.4 Синтез сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim

Цель работы: изучение возможности аппроксимации периодических сигналов многочленом Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций, исследование влияния числа ортогональных составляющих на погрешность аппроксимации.

2.4.1 Расчётно-практическое задание

1. Рассчитать и построить спектр амплитуд первых семи гармоник периодического прямоугольного колебания– «меандра» (рис. 2.6) для заданных преподавателем T и E . Результаты занести в табл. 2.2-2.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

2. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых восьми гармоник периодического пилообразного колебания (рис. 2.7) для заданных преподавателем T и E . Результаты занести в табл. 2.2-2.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала четырьмя, пятью, шестью, семью и восемью гармониками.

3. Рассчитать и построить спектры амплитуд первых семи гармоник периодической последовательности треугольных импульсов (рис. 2.8).

Результаты занести в табл. 2.2-2.3. Определить относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации сигнала тремя, пятью и семью гармониками.

2.4.2 Выполнение синтеза сигналов по Фурье в программном пакете NI Multisim

Выполним синтез периодической последовательности прямоугольных импульсов с параметрами T (период) = 1мс, t_c (длительность) = 0,5 мс.

1. По формуле (2.22 – 2.30) находим амплитуды и фазы первых семи гармоник. Результаты занесём в таблицу 2.4.

Таблица. 2.4.

№ гармоники	Амплитуда гармоники, В	Фаза гармоники, град
1	12,7259	0
3	4,23153	-1,3992
5	2,52751	-2,7939
7	1,79119	-4,1925

2. Соберём рабочую схему для синтеза сигналов по Фурье (рис. 2.16). Для формирования гармоник используем «Источник переменного напряжения». Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе:Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **AC_VOLTAGE**.

Для формирования периодической последовательности прямоугольных импульсов используем только первую, третью, пятую и седьмую гармоники, которые будут формироваться, соответственно, источниками переменного напряжения V1, V3, V5, V7. В свойствах источников V1, V3, V5, V7, во вкладке *Параметры* установим значения амплитуды и фазы гармоник, согласно расчётам (табл. 2.4)

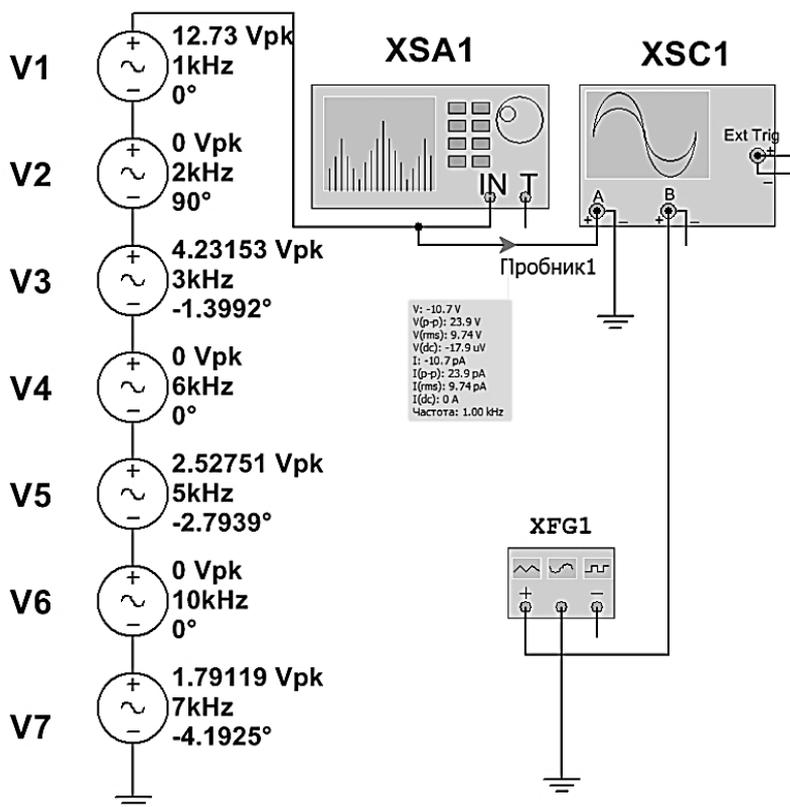


Рис. 2.16. Схема подключения источников и приборов для синтеза сигналов по Фурье.

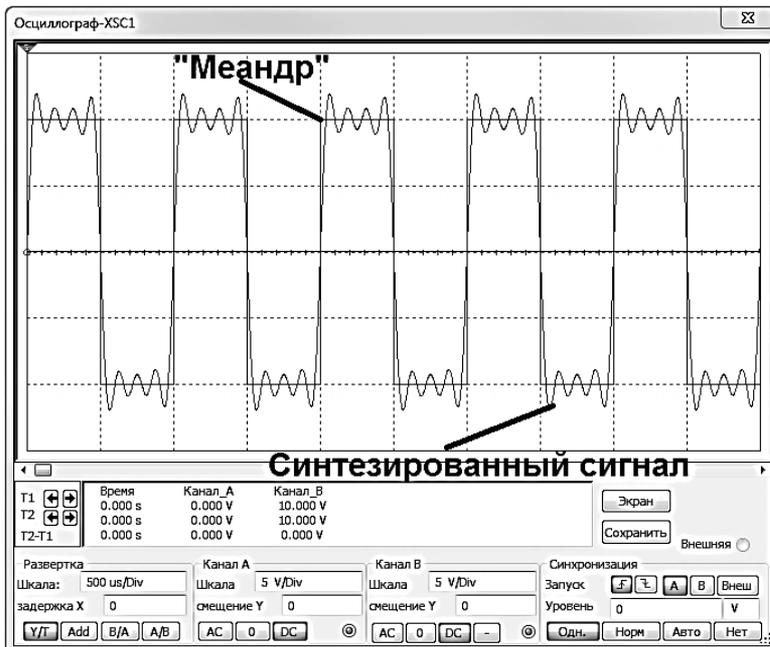


Рис. 2.17. Осциллограммы синтезированного сигнала и сигнала «меандр».

3. После запуска моделирования наблюдаем синтезированный сигнал на осциллографе (рис. 2.17).

4. Подадим на вход **В** осциллографа периодическую последовательность прямоугольных импульсов с параметрами T (период) = 1мс, t_u (длительность) = 0,5мс и сравним сигналы (рис. 2.17).

2.4.3 Компьютерный практикум

Порядок выполнения:

1. Собрать схему (рис. 2.16).
2. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения V1-V7, согласно проведенным расчётам в п. 2.4.1 для периодической последовательности прямоугольных импульсов. Синтезировать периодическое пилообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

3. Увеличить число источников переменного напряжения до восьми. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения V1-V8, согласно проведенным

расчётам в п. 2.4.1 для периодической последовательности пилообразных импульсов. Синтезировать периодическое пилообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

4. Задать амплитуды и фазы гармоник, формируемых источниками переменного напряжения V1-V7, согласно проведенным расчётам в п. 2.4.1 для периодической последовательности треугольных импульсов. Синтезировать периодическое пилообразное колебание. Зарисовать осциллограммы синтезированного сигнала.

5. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое система базисных тригонометрических функций?
2. Дайте определение амплитудного и фазового спектра периодического сигнала.
3. Какой характер носит спектр последовательности прямоугольных импульсов?
4. Чем отличается спектр одиночного импульса от спектра периодической последовательности импульсов?
5. Как показать, что система функций $\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}$ является полной и ортогональной?
6. Почему простое гармоническое колебание $\cos(\omega t + \varphi_0)$ играет особо важную роль в радиотехнике?
7. Как определяются коэффициенты ряда Фурье?
8. Запишите прямое и обратное преобразование Фурье.
9. Как изменится форма сигнала, если из спектра периодического пилообразного колебания удалить четные гармоники?
10. Как рассчитывается среднеквадратическая погрешность аппроксимации сигнала конечным числом ортогональных составляющих?
11. Из каких соображений выбирается реальная ширина спектра прямоугольных колебаний, пилообразного периодического колебания, периодической последовательности треугольных импульсов?

Глава 3. Дискретные и цифровые сигналы

3.1 Теорема Котельникова

Передача непрерывных (аналоговых) сигналов по линии связи предполагает передачу бесконечного множества их мгновенных значений на протяжении конечного промежутка времени. При этом спектр финитного, т.е. ограниченного во времени, непрерывного сигнала бесконечен [1]. Однако, на практике различные радиотехнические устройства (фильтры, усилители и другие) имеют ограниченную полосу пропускания, что приводит к ограничению спектра сигнала некоторой граничной частотой f_B (или ω_B), которая определяется свойствами получателя сообщений. Так, например, общепринятой нормой в системах передачи речевых сигналов является ограничение спектра сигнала в пределах $(0,3 \div 3,4) \text{ кГц}$, в системах телевидения – $(0 \div 6) \text{ МГц}$. Как преодолеть противоречие между ограничением спектра сигнала и конечным временем его существования? Ответ на этот вопрос даёт теорема, сформулированная и доказанная академиком В.А. Котельниковым и получившая название теоремы Котельникова или теоремы отсчётов.

Теорема Котельникова формулируется следующим образом. Непрерывный сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру частотой f_B (или ω_B), полностью определяется совокупностью мгновенных значений (отсчётов) $s(t_k)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, отстоящие друг

от друга на интервал времени $\Delta t = \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{\omega_B}$.

Математически теорема Котельникова определяется выражением

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \quad (3.1)$$

или с учётом (2.12)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot \text{sinc} 2\pi f_B(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot \text{sinc} \omega_B(t - k\Delta t),$$

которое представляет собой разложение сигнала $s(t)$ в особого рода ряд по системе базисных функций

$$\{\eta_k(t)\} = \left\{ \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} \right\},$$

являющихся ортогональными на интервале времени $(-\infty; \infty)$ (сравните с разложением сигнала в ряд Фурье).

Доказательство теоремы Котельникова приведено в литературе [1]. Мы же остановимся на вопросах физического толкования и практического применения результатов теоремы.

Выделим одно из слагаемых ряда (3.1)

$$s_k(t) = s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}. \quad (3.3)$$

Это слагаемое представляет собой отклик идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), т.е. фильтра с постоянным коэффициентом передачи в пределах полосы частот от нуля до f_B , на очень короткий импульс с амплитудой $s(k\Delta t)$. (рис. 3.1).

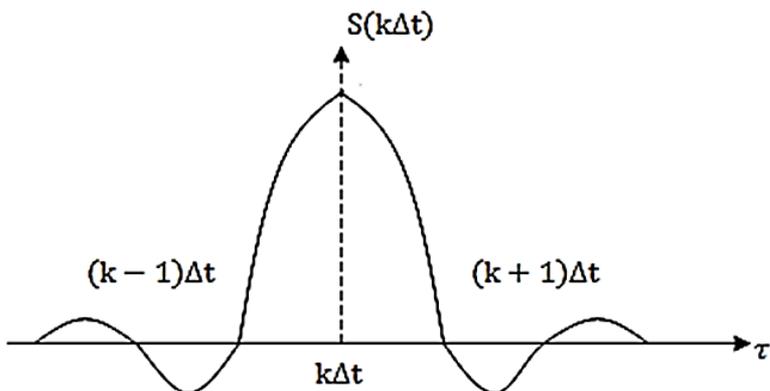


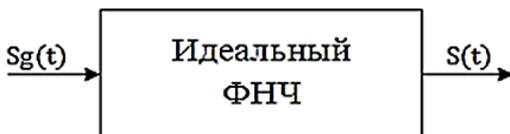
Рис. 3.1. Отклик идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) на короткий импульс с амплитудой $s(k\Delta t)$

В моменты времени $t_{k-1} = (k-1)\Delta t$, $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$ и т.д. значения отклика равны нулю. Это определяет механизм восстановления непрерывного сигнала по его отсчётам.

Формирование последовательности отсчётов непрерывного сигнала, которая представляет собой дискретный сигнал, т.к. значение любого отсчёта $s(k\Delta t)$ сохраняется неизменным в течение интервала времени Δt (см. классификацию сигналов), осуществляется при помощи импульсного модулятора.



а)



б)

Рис. 3.2. Простейший вариант импульсного модулятора (перемножитель) (а), идеальный ФНЧ (б).

Простейший вариант импульсного модулятора представляет собой перемножитель (рис. 3.2), на один вход которого подаётся непрерывный сигнал $s(t)$, а на второй – последовательность

$$h_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - \Delta t)$$

коротких единичных импульсов вида (1.13), следующих друг за другом с периодом Δt (рис. 3.2, а). Тогда на выходе перемножителя будет иметь место последовательность коротких импульсов

$$s_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - k\Delta t),$$

амплитуды которых равны $s(k\Delta t)$, т.е. соответствуют мгновенным значениям сигнала $s(t)$, отсчитанным в момент времени $t_k = k\Delta t$.

Процесс формирования последовательности отсчётов называется дискретизацией непрерывного сигнала.

Восстановление непрерывного сигнала осуществляется путём подачи дискретного сигнала $s_o(t)$ на идеальный фильтр нижних частот. Отклик фильтра на каждый отсчёт определяется выражением (3.2). При этом, в момент времени $t_K = k\Delta t$, значение отклика определяется только k -ым отсчётом дискретного сигнала; отклик на остальные отсчёты равны нулю. Суммируясь, эти отклики дают на выходе ФНЧ исходный сигнал $s(t)$.

Отметим два важных обстоятельства.

Во-первых, точное восстановление сигнала имеет место только при

$$\Delta t = \frac{1}{2f_B}. \quad \text{Введя в рассмотрение частоту дискретизации}$$

$$f_o = \frac{1}{\Delta t} = 2f_B, \quad \text{получим так называемую частоту Найквиста, т.е.}$$

минимальное значение частоты дискретизации, при котором возможно точное восстановление непрерывного сигнала.

Во-вторых, точное восстановление сигнала возможно при суммировании бесконечного числа откликов, что соответствует сигналу $s(t)$, неограниченному во времени. Но в действительности, сигналы являются ограниченными и по спектру и по времени. Однако, при определённых допущениях теорема Котельникова справедлива и для этого случая.

Если сигнал, длительностью T_C ограничивается радиотехническим устройством с граничной частотой f_B , то для его представления в дискретной форме требуется конечное число N отсчетов, где

$$N = \frac{T_C}{\Delta t} = 2T_C \cdot f_B = \frac{\omega_B T_C}{\pi}. \quad (3.4)$$

Таким образом, для восстановления сигнала длительностью T_C , ограниченного по спектру частотой f_B достаточно передать N независимых отсчетов, однозначно связанных с его формой.

Но теоретически сигнал, ограниченный по времени имеет бесконечный спектр. А это означает, что при восстановлении сигнала по N отсчетам будет иметь место ошибка, т.е. восстановленный сигнал $\hat{s}(t)$ будет отличаться от исходного $s(t)$. Казалось бы, теорема Котельникова неприменима к реальным сигналам. Тем не менее, если к точности восстановления сигнала $s(t)$ по N отсчетам предъявить определенные требования, например, допустить его восстановление с заданным уровнем ошибки, то утверждения теоремы Котельникова

можно с успехом распространить на реальные сигналы, несколько изменив частоту дискретизации по сравнению с пределом Найквиста.

Теперь с учетом того, что реальный сигнал длительностью T_C представляется N отсчетами мгновенных значений, выражение (3.1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} s(k\Delta t) \operatorname{sinc} 2\pi f_B (t - k\Delta t) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k\Delta t) \operatorname{sinc} 2\pi f_B (t - k\Delta t).
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Величина N называется базой сигнала $s(t)$. Понятие базы играет важную роль при представлении непрерывного сигнала конечным числом отсчетов. Соответствующим образом выбранная база определяет информационные показатели сигналов, способность противостоять помехам при передаче по каналам связи, энергетическую скрытность и другие.

Рассмотрим теперь вопрос оценки точности восстановления непрерывного сигнала по совокупности N отсчетов его мгновенных значений. Как уже неоднократно подчеркивалось выше, ограниченный во времени сигнал имеет бесконечный спектр. Согласно равенству Парсевалья (2.50) энергия такого сигнала равна

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_C &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |(j\omega)|^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S^2(f) df
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

где $S^2(\omega)$ или $S^2(f)$ – энергетический спектр, представленный как функция либо круговой ω , либо циклической f частоты.

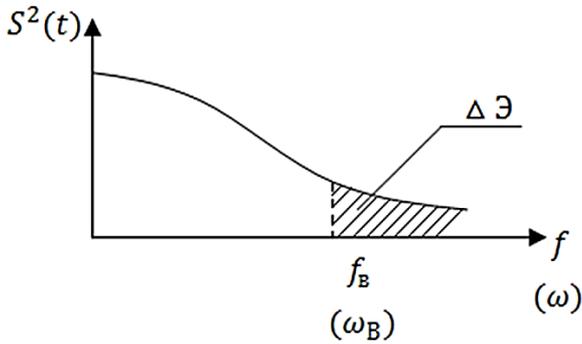


Рис. 3.3. Энергетический спектр сигнала, ограниченного во времени и граничная частота f_B или (ω_B) .

Энергия за пределами частоты f_B (или ω_B) составляет величину

$$\Delta \mathcal{E} = 2 \int_{f_B}^{\infty} S^2(f) df = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

На рис. 3.3 изображен энергетический спектр сигнала, ограниченного во времени и граничная частота f_B или (ω_B) .

Площадь под всей кривой характеризует полную энергию сигнала \mathcal{E}_c , а площадь заштрихованного участка - ту часть энергии $\Delta \mathcal{E}$, которая сосредоточена за пределами f_B .

Тогда отношение

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \quad (3.8)$$

может служить оценкой точности восстановления сигнала. Задаваясь величиной ε^2 можно определить частоту f_B , а следовательно и частоту дискретизации f_0 .

Рассмотрим следующий пример. Пусть сигнал $s(t)$ на интервале времени $(0, T_c)$ описывается экспоненциальной функцией

$$s(t) = \begin{cases} S_0 \cdot e^{-\alpha t}, & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0, & \text{при } t > T_c. \end{cases}$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, найдем спектральную функцию сигнала

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} S_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{S_0}{\alpha + j\omega}.$$

Модуль спектральной функции

$$|S(j\omega)| = \frac{S_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

а энергетический спектр

$$|S(j\omega)|^2 = S^2(\omega) = \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Воспользовавшись выражением (3.5), найдем энергию сигнала

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{S_0^2}{2\alpha}.$$

В соответствии с (3.6), вычислим $\Delta\mathcal{E}$:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\infty} \frac{S_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

При расчете \mathcal{E}_C и $\Delta\mathcal{E}$ использован табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Найдем величину среднеквадратичной ошибки восстановления

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_C} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Представим

$$1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{\pi} (\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha}) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha},$$

откуда следует

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon^2 \pi}{2} = \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Полагая, что для малых значений x

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x},$$

получим

$$\frac{2}{\varepsilon^2 \pi} = \frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Теперь можно найти

$$\omega_B \approx \frac{2\alpha}{\pi\varepsilon^2},$$

или переходя к циклическим частотам

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi^2\varepsilon^2} \approx 0,1 \frac{\alpha}{\varepsilon^2}.$$

Частота дискретизации

$$f_0 = 2f_B = 0,2 \frac{\alpha}{\varepsilon^2}.$$

Таким образом, задаваясь величиной ε^2 можно определить частоту дискретизации непрерывного сигнала. Очевидно, число отсчетов при дискретизации рассматриваемого сигнала будет равно

$$N = 2f_B T_C = 0,4 \frac{\alpha \cdot T_C}{\varepsilon^2}.$$

Из приведенного примера следует, что чем меньшую ошибку восстановления требуется обеспечить, тем выше должна быть частота дискретизации.

Теорема Котельникова устанавливает однозначное соответствие между аналоговым сигналом и отсчетами его мгновенных значений во временной области. Оказывается, можно сформулировать теорему отсчетов и в частотной области. При этом примем во внимание, что комплексный спектр одиночного сигнала длительностью T_C является сплошным. Тогда имеет место следующее утверждение. Спектральная функция $S(j\omega)$ сигнала $s(t)$, ограниченного во времени величиной T_C полностью определяется совокупностью отсчетов $S(j\omega_k) = S(jk\Delta\omega)$, отстоящих друг от друга на частотный интервал $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_C}$, т.е.

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Delta\omega) \sin c \frac{T_c}{2}(\omega - k\Delta\omega). \quad (3.9)$$

Теорема отсчетов в частотной области основывается на свойстве симметрий преобразований Фурье относительно переменных ω (или f) и t . Суть этого свойства состоит в том, что преобразование Фурье периодического сигнала с периодом T приводит к линейчатой (дискретной) спектральной функции, где отдельные спектральные составляющие (см. подраздел 2.1) отстоят друг от друга по оси частот на величину $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (или $\Delta f = \frac{1}{T}$), и наоборот, преобразование

Фурье периодической спектральной функции с периодом $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ приводит к дискретной временной функции с периодом T .

Исходя из этого свойства, если в (3.2) заменить $s(t)$ на $S(j\omega)$; Δt на $\Delta\omega$, а ω_B на $\frac{T_c}{2}$, то в результате получим выражение (3.9). Как и в случае разложения сигнала $s(t)$ в ряд Котельникова, разложение его спектра ограничивается N отсчетами. Тогда выражение (3.5) в частотной области принимает вид

$$\hat{S}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Delta\omega) \sin c \frac{T_c}{2}(\omega - k\Delta\omega). \quad (3.10)$$

Казалось бы, для восстановления спектральной функции $S(j\omega)$ по совокупности отсчетов $S(jk\Delta\omega)$, необходимо знать N отсчетов модуля и N отсчетов аргумента комплексных величин $S(jk\Delta\omega)$. Однако, если учесть, что модуль спектра $S(j\omega)$, т.е. амплитудный спектр является четной функцией, а аргумент $S(j\omega)$, т.е. фазовый спектр – нечетной функцией, то число независимых отсчетов сокращается вдвое и составляет $N = 2f_B T_c = \frac{\omega_B T_c}{\pi}$, т.е. равно базе сигнала.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что теорема Котельникова устанавливает принципиальную возможность представления непрерывного сигнала последовательностью его мгновенных значений. Такую операцию иногда называют импульсным преобразованием непрерывного сигнала. Такое преобразование лежит в основе импульсных методов передачи сообщений в радиотехнических

системах. Более того, дискретизация непрерывных сигналов в соответствии с теоремой Котельникова является промежуточной операцией при формировании цифровых сигналов, которые в настоящее время нашли самое широкое распространение как в радиотехнических системах передачи сообщений, так и радиоэлектронных системах обработки, отображения и регистрации информации, и во многих других областях.

3.2 Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование сигналов

Представление непрерывного сигнала в виде последовательности дискретных отсчётов предполагает, что любой отсчёт $s(k\Delta t)$ может принимать любое значение из непрерывного множества значений $\{S\}$. Вместе с тем, цифровые технологии в радиотехнике требуют преобразований совокупности значений отсчётов в цифровую последовательность, т.е. в последовательность чисел. Процесс преобразования аналогового (непрерывного) сигнала в такую последовательность называется аналогово-цифровым преобразованием (АЦП).

Итак, на первом этапе аналогово-цифрового преобразования осуществляется дискретизация непрерывного сигнала, т.е. преобразование $s(t)$ в $s_\delta(t)$ в соответствии с теоремой Котельникова, которая была рассмотрена выше. В результате дискретизации непрерывный (аналоговый) сигнал преобразуется в последовательность отсчётов $s(k\Delta t)$.

На втором этапе последовательность отсчётов подвергается процедуре квантования по уровню. Квантование по уровню значений отсчётов $s(k\Delta t)$ в простейшем случае представляет собой округление этих значений до ближайшего целого числа. Процедуру квантования осуществляет устройство с амплитудной характеристикой ступенчатого вида, которое называется квантователем. Амплитудная характеристика квантователя изображена на рис. 3.4.

При реализации квантователя диапазон изменения уровня дискретного сигнала $s_\delta(t)$ разбивается на $L+1$ уровней (включая нулевой), каждый из которых отличается от соседних на величину $\Delta S_{кв}$, называемую шагом квантования.

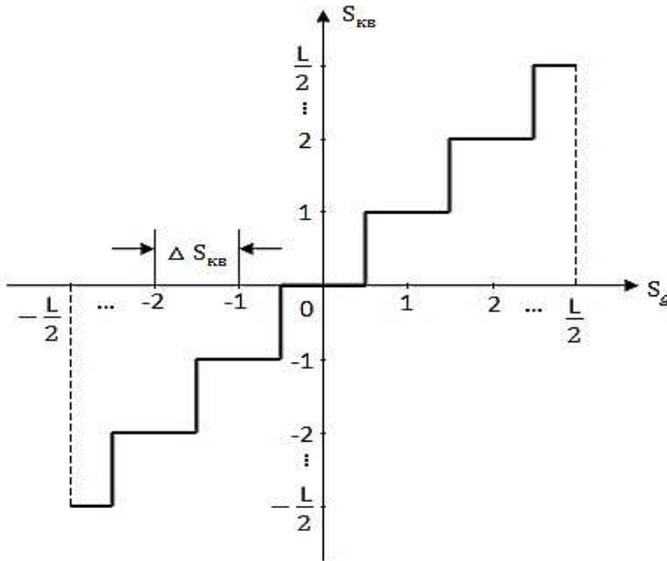


Рис. 3.4. Амплитудная характеристика квантователя.

Таким образом, максимальное и минимальное значения квантованного сигнала соответственно равны

$$S_{кв \max} = \frac{L}{2} \Delta S_{кв}, \quad S_{кв \min} = -\frac{L}{2} \Delta S_{кв}.$$

В процессе квантования значение $s(k\Delta t)$ в момент времени $t_k = k\Delta t$ сравнивается со значением $l \cdot \Delta S_{кв}$, где $-\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2}$.

Квантованный сигнал принимает значение

$$s_{кв}(t) = l \cdot \Delta S_{кв}, \quad (3.18)$$

если

$$\left(l - \frac{1}{2}\right) \Delta S_{кв} \leq s(k\Delta t) \leq \left(l + \frac{1}{2}\right) \Delta S_{кв}. \quad (3.19)$$

Отметим, что значение $s_{кв}(k\Delta t)$ запоминается до момента следующего отсчёта дискретного сигнала.

Процедура квантования показана на рис. 3.5.

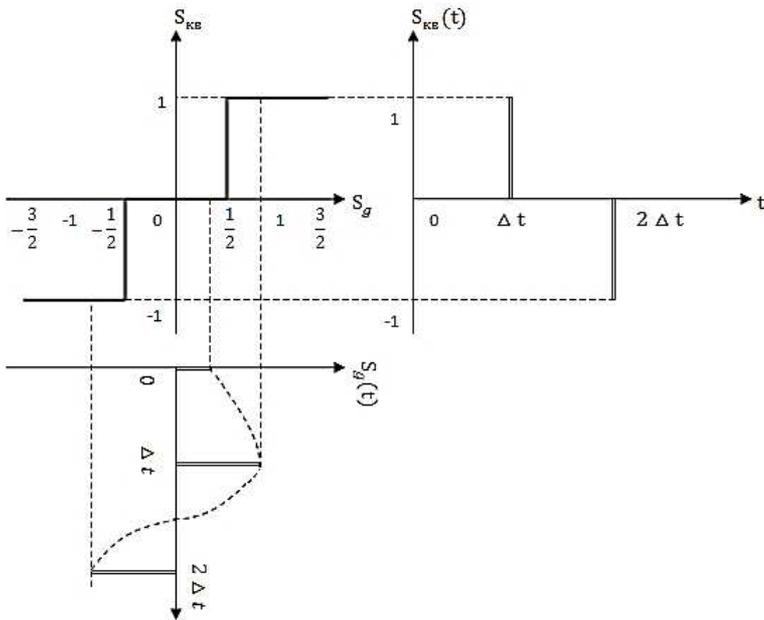


Рис. 3.5. Фрагмент амплитудной характеристики квантователя.

На этом рисунке изображены фрагмент амплитудной характеристики квантователя, дискретный сигнал $s_d(t)$, временная диаграмма которого повернута на 90° для удобства пояснения процедуры квантования, и квантованный сигнал $s_{KB}(t)$.

Поясним процедуру квантования. Рассмотрим отсчёт $s(0)$. Поскольку значение этого отсчёта находится в интервале $\left(-\frac{1}{2}\Delta S_{KB}, \frac{1}{2}\Delta S_{KB}\right)$, в соответствии с (3.18) значение квантованного сигнала будет равно $s_{KB}(0) = 0$, т.к. условие (3.19) выполняется при $l = 0$. Значение отсчёта $s(\Delta t)$, как это следует из рисунка, находится в пределах $\left(\frac{1}{2}\Delta S_{KB}, \frac{3}{2}\Delta S_{KB}\right)$, т.е. условие (3.19) выполняется при $l = 1$, поэтому значение квантованного сигнала $s_{KB}(\Delta t) = 1$. И, наконец,

значение отсчёта $s(2\Delta t)$ находится в интервале $\left(-\frac{1}{2}\Delta S_{кв}, -\frac{3}{2}\Delta S_{кв}\right)$, а

значение квантованного сигнала $s_{кв}(2\Delta t) = -1$.

Ввиду того, что при квантовании осуществляется фактически округление значений $s_{\delta}(t)$, квантованный сигнал будет отличаться от дискретного. При этом искажения, вносимые квантователем

$$\varepsilon_{кв}(t) = s_{кв}(t) - s_{\delta}(t), \quad (3.20)$$

принципиально неустранимы. Поэтому, при преобразовании непрерывного сигнала в цифровой необходимо оценивать степень искажений, вносимых квантователем.

Искажения, вносимые квантователем, целесообразно оценивать величиной среднеквадратичной ошибки. При исследовании процедур квантования было установлено, что величина среднеквадратичной ошибки

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\Delta S_{кв}}{12}.$$

Таким образом, ошибка квантования тем меньше, чем меньше шаг квантования $\Delta S_{кв}$.

Физически $\varepsilon_{кв}(t)$ при преобразовании реальных сигналов проявляется в виде шума. Поэтому искажения $\varepsilon_{кв}(t)$ получили название шума квантования.

Сигнал на выходе квантователя уже представляет собой цифровой сигнал, однако, представленный в L -ичной системе счисления. Напомним, что любое число A может быть представлено в системе счисления с основанием L следующим образом:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L^i = \alpha_{n-1} L^{n-1} + \alpha_{n-2} L^{n-2} + \dots + \alpha_1 L^1 + \alpha_0 L^0,$$

где α_i принимает значение из совокупности значений от 0 до $L-1$;

n – значность числа (количество разрядов, которым представлено число).

Нетрудно убедиться в том, что любое значение $s_{кв}(t)$ на промежутке времени Δt от момента $t_k = k\Delta t$ до момента $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$ (вспомним замечание о том, что значение $s_{кв}(t)$ запоминается) равно

$$s_{кв}(k\Delta t) = s_{кв}(k\Delta t) \cdot L^0.$$

Иными словами, квантованный сигнал $s_{кв}(k\Delta t)$ представлен одnorазрядным числом в L -ичной системе счисления. Так как L -число уровней квантования, которое выбирается довольно большим, осуществлять передачу и обработку такого сигнала средствами вычислительной техники, которые оперируют в подавляющем большинстве случаев с числами в двоичной системе счисления, неудобно. Поэтому квантованный сигнал, как число, необходимо перевести из L -ичной системы в некоторую другую, более удобную с точки зрения дальнейшей передачи и обработки, систему счисления. Эта операция называется кодированием.

Перевод числа из одной системы счисления в другую сопровождается изменением разрядности числа. Соотношение разрядности числа, представленного в системах с основаниями L_1 и L_2 определяются формулой

$$n_1 \log_2 L_1 = n_2 \log_2 L_2.$$

Поэтому, при переводе числа из системы с основанием L_1 в систему с основанием L_2 число разрядов будет равно

$$n_2 = n_1 \left\lfloor \frac{\log_2 L_1}{\log_2 L_2} \right\rfloor, \quad (3.21)$$

где знак $\lfloor \rfloor$ означает округление до ближайшего верхнего целого числа.

Практикой установлено, что для передачи речевого сигнала в цифровой форме необходимо 256 уровней квантования. Эта величина принята в качестве международного стандарта. Значит, при квантовании речевого сигнала значение $s_{кв}(k\Delta t)$ будет представлено одним разрядом в 256-ричной системе счисления. Для дальнейшей передачи и обработки эти числа обычно переводят в двоичную систему счисления. При этом количество разрядов числа $s_{кв}(k\Delta t)$, в соответствии с (3.21), составит

$$n = 1 \cdot \frac{\log_2 256}{\log_2 2} = 8,$$

а значение каждого разряда может быть или нулем, или единицей.

Таким образом, в результате кодирования квантованный сигнал $s_{кв}(k\Delta t)$ принимает форму двоичной последовательности, называемой кодовой комбинацией или кодовым словом.

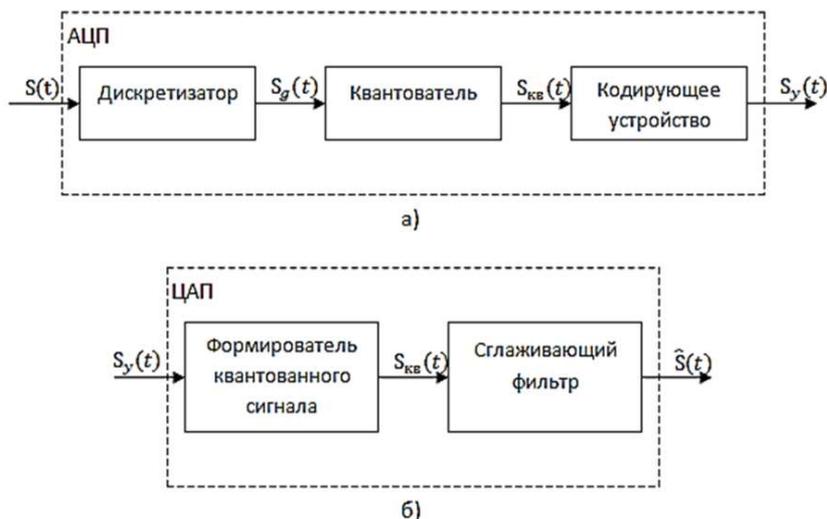


Рис. 3.6. Основные элементы и сигналы на их входах АЦП (а), ЦАП (б).

Длительность кодовой комбинации цифрового двоичного сигнала, очевидно должна быть равна $T_{kk} = \Delta t$ т.е. интервалу дискретизации. Отсюда длительность элемента (разряда) кодовой комбинации

$$\tau_p = \frac{T_{kk}}{n} = \frac{\Delta t}{n}.$$

Выше было отмечено, что для уменьшения ошибки квантования необходимо уменьшать величину шага квантования $\Delta S_{кв}$. Однако при этом увеличивается число уровней, что в свою очередь приводит к увеличению разрядности кодовой комбинации цифрового сигнала, уменьшению длительности разряда и, следовательно, расширению спектра цифрового сигнала. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании систем передачи цифровых сигналов по каналам связи.

На практике операции дискретизации, квантования и кодирования осуществляются в одном устройстве называемом аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Структурная схема АЦП представлена на рис.

3.6а. На схеме показаны основные элементы АЦП и сигналы на их входах.

Операция обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый выполняется цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП), схема которого представлена на рис. 3.6б, и предусматривает ряд этапов.

В первую очередь цифровой двоичный сигнал подвергается поразрядному взвешенному (с «весом» 2^i) суммированию, в результате чего в моменты времени $t_k = k\Delta t$ формируется квантованный сигнал $s_{кв}(k\Delta t)$. После этого последовательность значений квантованного сигнала поступает на сглаживающий фильтр с амплитудно-частотной характеристикой

$$K(f) = K(\omega) = K_0 = const$$

в пределах полосы пропускания $(0, \omega_B)$ или $(0, f_B)$. Как известно из предыдущего материала, при поступлении на вход фильтра сигнала в виде короткого импульса амплитудой $s_{кв}(k\Delta t)$, сигнал на выходе будет иметь вид

$$s_{\phi}(t) = s_{кв}(k\Delta t) \cdot \text{sinc} 2\pi f_B (t - k\Delta t).$$

Сложение откликов фильтра дает сигнал $\hat{s}(t)$. Следует подчеркнуть, что восстановленный сигнал $\hat{s}(t)$ будет отличаться от исходного $s(t)$ ввиду наличия ошибки квантования.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Котельникова для сигналов с ограниченным спектром.
2. Какой вид имеет спектр дискретного выборочного сигнала при $f_{выб} > 2f_m$, при $f_{выб} = 2f_m$, при $f_{выб} < 2f_m$?
3. Разложите ряд Котельникова по ортогональным функциям отсчета. Чему равны коэффициенты этого ряда?
4. Для чего при восстановлении сигнала по дискретным выборкам требуется идеальный ФНЧ?
5. Какой вид имеют амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики идеального ФНЧ?
6. Объясните погрешности синтезирования реальных сигналов по дискретным отсчетам.
7. Запишите математически теорему В.А. Котельникова.
8. Что такое частота Найквиста? Какова она для речевого сигнала?

9. Как определяется база сигнала?
10. При каких условиях замена непрерывного сигнала дискретным может стать неадекватной?
11. Как величина среднеквадратичной ошибки связана с частотой дискретизации непрерывного сигнала?
12. Каким образом совокупность отсчетов сигнала можно преобразовать в цифровую последовательность?
13. В чем состоит процедура квантования дискретного сигнала по уровню?
14. Из каких соображений выбирается шаг квантования сигнала? Что такое шум квантования?
15. Что понимается под операцией кодирования в устройстве аналогово-цифрового преобразователя (АЦП)?
16. Приведите схему АЦП и покажите сигналы на входах всех его элементов.
17. Как выполняется операция обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый в системе ЦАП?

Глава 4. Модулированные сигналы

4.1. Классификация видов модуляции

Рассмотренные выше методы анализа первичных сигналов позволяют определить их спектральные и энергетические характеристики [1]. Первичные сигналы являются основными носителями информации. Вместе с тем их спектральные характеристики не соответствуют частотным характеристикам каналов передачи радиотехнических информационных систем. Как правило, энергия первичных сигналов сосредоточена в области низких частот. Так, например, при передаче речи или музыки энергия первичного сигнала сосредоточена примерно в диапазоне частот от 20 Гц до 15 кГц. В то же время диапазон дециметровых волн, который широко используются для передачи информационных и музыкальных программ, занимает частоты от 300 до 3000 мегагерц. Возникает задача переноса спектров первичных сигналов в соответствующие диапазоны радиочастот для передачи их по радиоканалам. Эта задача решается посредством операции модуляции.

Модуляцией называется процедура преобразования низкочастотных первичных сигналов в сигналы радиочастотного диапазона.

В процедуре модуляции участвуют первичный сигнал $s(t)$ и некоторое вспомогательное колебание $u_{нес}(t)$, называемое несущим колебанием или просто несущей. В общем виде процедуру модуляции можно представить следующим образом

$$u(t) = W_{mod}[s(t), u_{нес}(t)], \quad (4.1)$$

где W_{mod} – правило преобразования (оператор) первичного сигнала $s(t)$ в модулированное колебание $u(t)$.

Это правило указывает, какой параметр (или несколько параметров) несущего колебания изменяются по закону изменения $s(t)$. Поскольку $s(t)$ управляет изменением параметров $u_{нес}(t)$, то, как было отмечено в первом разделе, сигнал $s(t)$, является управляющим (модулирующим), а $u(t)$ – модулированными сигналами. Очевидно, W_{mod} соответствует оператору $W_{прд}$ обобщенной структурной схемы РТИС.

Выражение (4.1) позволяет провести классификацию видов модуляции, которая представлена на рис. 4.1.



Рис. 4.1. Классификация видов модуляции.

В качестве классификационных признаков выберем вид (форму) управляющего сигнала $s(t)$ форму несущего колебания $u_{нес}(t)$ и вид управляемого параметра несущего колебания.

В первом разделе была проведена классификация первичных сигналов. В радиотехнических информационных системах наиболее широкое распространение в качестве первичных (управляющих) сигналов получили непрерывные и цифровые сигналы. В соответствии с этим по виду управляющего сигнала можно выделить непрерывную и дискретную модуляцию.

В качестве несущего колебания в практической радиотехнике используются гармонические колебания и импульсные последовательности. В соответствии с формой несущего колебания различают модуляцию гармонической несущей и импульсную модуляцию.

И наконец, по виду управляемого параметра несущего колебания в случае гармонической несущей различают амплитудную, частотную и фазовую модуляцию. Очевидно, в этом случае в качестве управляемого параметра выступают соответственно амплитуда, частота или начальная фаза гармонического колебания. Если в качестве несущего колебания используется импульсная последовательность, то аналогом частотной модуляции является широтная импульсная модуляция, где управляемым параметром выступает длительность импульса, а аналогом фазовой модуляции – временная импульсная модуляция, где управляемым параметром выступает положение импульса на временной оси.

В современных радиотехнических системах наиболее широко в качестве несущего колебания используется гармоническое колебание. Учитывая это обстоятельство в дальнейшем, основное внимание будет уделено сигналам с непрерывной и дискретной модуляцией гармонической несущей.

4.2. Сигналы с непрерывной амплитудной модуляцией

Рассмотрение модулированных сигналов начнем с сигналов, у которых в качестве изменяемого параметра выступает амплитуда несущего колебания. Модулированный сигнал в этом случае является амплитудно-модулированным или сигналом с амплитудной модуляцией (АМ-сигналом).

Как уже было отмечено выше, основное внимание будет уделено сигналам, несущее колебание которых представляет собой гармоническое колебание вида

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos \omega_0 t, \quad (4.1)$$

где U_m – амплитуда несущего колебания, ω_0 – частота несущего колебания.

Здесь и далее полагается, что начальные фазы гармонических колебаний равны нулю.

В качестве модулирующих сигналов сначала рассмотрим непрерывные сигналы $s(t)$. Тогда модулированные сигналы будут являться сигналами с непрерывной амплитудной модуляцией. Такой сигнал описывается выражением

$$u_{AM} = U(t) \cos \omega_0 t = U_m [1 + k_{AM} s(t)] \cos \omega_0 t, \quad (4.2)$$

где $U(t) = U_m [1 + k_{AM} s(t)]$ – огибающая АМ-сигнала,

k_{AM} – коэффициент амплитудной модуляции.

Из выражения (4.2) следует, что АМ-сигнал представляет собой произведение огибающей $U(t)$ на гармоническую функцию $\cos \omega_0 t$. Коэффициент амплитудной модуляции k_{AM} характеризует глубину модуляции и в общем случае описывается выражением

$$k_{AM} = \frac{U_{AM \max} - U_{AM \min}}{U_{AM \max} + U_{AM \min}}. \quad (4.3)$$

Очевидно, при $k_{AM} = 0$ сигнал представляет собой просто несущее колебание.

Для более детального анализа характеристик АМ-сигналов рассмотрим простейший АМ-сигнал, в котором в качестве модулирующего сигнала $s(t)$ выступает гармоническое колебание

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t, \quad (4.4)$$

где S_0, Ω – соответственно амплитуда и частота модулирующего (управляющего) сигнала, причем $\omega_0 \gg \Omega$. В этом случае сигнал описывается выражением

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= U_m \left[1 + \frac{S_0}{U_0} \cos \Omega t \right] \cos \omega_0 t = \\ &= U_m [1 + k_{AM} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и называется сигналом однотоновой амплитудной модуляции.

На рис. 4.2 изображены модулирующий сигнал $s(t)$, колебание несущей частоты и сигнал $u_{AM}(t)$.

Для такого сигнала коэффициент глубины амплитудной модуляции равен

$$k_{AM} = \frac{S_0}{U_m}.$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\cos \alpha \cos \beta = 0.5 [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

после преобразований получим

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= U_m \cos \omega_0 t + 0.5 k_{AM} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ &+ 0.5 k_{AM} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) устанавливает спектральный состав однотонового АМ-сигнала. Первое слагаемое представляет собой немодулированное колебание (несущее колебание). Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим, появившимся в результате модуляции амплитуды несущего колебания; частоты этих колебаний $\omega_n = \omega_0 - \Omega$ и $\omega_n = \omega_0 + \Omega$ называются нижней и верхней боковыми частотами, а сами составляющие – нижней и верхней боковыми составляющими.

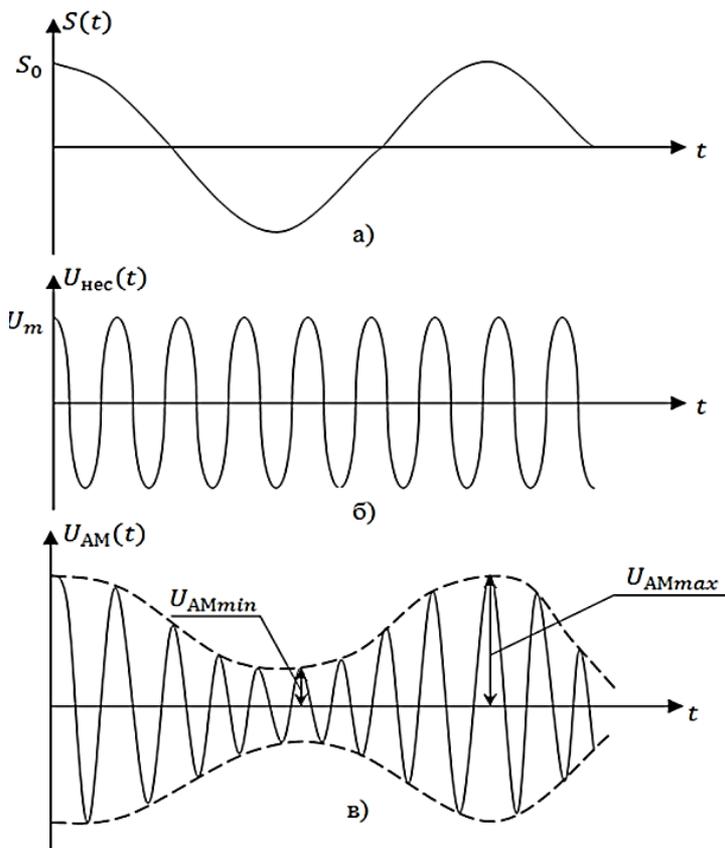


Рис. 4.2. Осциллограммы модулирующего сигнала $s(t)$ (а), колебания несущей частоты $u_{\text{нec}}(t)$ (б) и сигнала $u_{AM}(t)$ (в).

Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют величину

$$U_H = U_B = 0.5k_{AM}U_m, \quad (4.7)$$

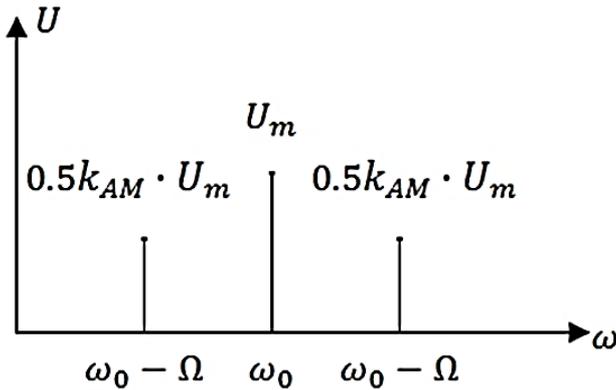


Рис. 4.3. Амплитудный спектр однотонального АМ-сигнала.

На рис. 4.3 изображен амплитудный спектр однотонального АМ-сигнала. Из этого рисунка следует, что амплитуды боковых составляющих располагаются симметрично относительно амплитуды и начальной фазы несущего колебания. Очевидно, ширина спектра однотонального АМ-сигнала равна удвоенной частоте управляющего сигнала

$$\Delta\omega_{AM} = \omega_B - \omega_H = \omega_0 + \Omega - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega.$$

В общем случае, когда управляющий сигнал характеризуется произвольным спектром, сосредоточенным в полосе частот от Ω_H до Ω_B , спектральный характер АМ-сигнала принципиально не отличается от однотонального.

На рис. 4.4 изображены спектры управляющего сигнала и сигнала с амплитудной модуляцией. В отличие от однотонального АМ-сигнала в спектре произвольного АМ-сигнала фигурируют нижняя и верхняя боковые полосы. При этом верхняя боковая полоса является копией спектра управляющего сигнала, сдвинутой по оси частот на величину ω_0 , а нижняя боковая полоса представляет собой зеркальное отображение верхней. Очевидно, ширина спектра произвольного АМ-сигнала

$$\Delta\omega_{AM} = \omega_0 + \Omega_B - (\omega_0 - \Omega_B) = 2\Omega_B, \quad (4.8)$$

т.е. равна удвоенной верхней граничной частоте управляющего сигнала.

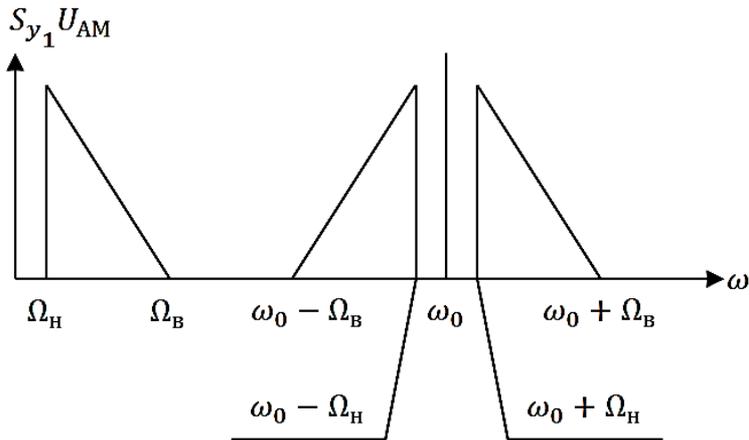


Рис. 4.4. Спектры управляющего сигнала и сигнала с амплитудной модуляцией.

Средняя мощность однотонового АМ-сигнала за период T управляющего сигнала определяется выражением:

$$P_{AM} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{AM}^2(t) dt. \quad (4.9)$$

Так как $\omega_0 \gg \Omega$, а $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, положим $\omega_0 = \frac{2\pi m}{T} = n\Omega$, где $n \gg 1$. Подставляя выражение (4.6) в (4.9), после несложных, но достаточно громоздких преобразований с учетом того, что $\omega_0 = n\Omega$ и с использованием тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 0.5[1 + \cos 2\alpha] \\ \text{и, } \cos \alpha \cos \beta &= 0.5[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \end{aligned}$$

получим

$$P_{AM} = 0.5U_m^2 + 0.25k_{AM}^2 U_m^2. \quad (4.10)$$

Здесь первое слагаемое характеризует среднюю мощность несущего колебания, а второе – суммарную среднюю мощность боковых составляющих, т.е.

$$P_{AM} = P_{нес} + P_H + P_B .$$

Так как суммарная средняя мощность боковых составляющих делится поровну между нижней и верхней, что вытекает из (4.7), то отсюда следует

$$P_H = P_B = 0.125k_{AM}^2 U_m^2 . \quad (4.11)$$

Таким образом, на передачу несущего колебания в АМ-сигнале тратится более половины мощности (с учетом того, что $k_{AM} \leq 1$), чем на передачу боковых составляющих. Так как информация заложена именно в боковых составляющих, передача составляющей несущего колебания нецелесообразна с энергетической точки зрения. Поиск более эффективных методов использования принципа амплитудной модуляции приводит к сигналам балансной и однополосной амплитудной модуляции.

4.3 Сигналы балансной и однополосной амплитудной модуляции

Сигналы балансной амплитудной модуляции (БАМ) характеризуются отсутствием в спектре составляющей несущего колебания. Перейдем сразу к рассмотрению сигналов однотональной балансной модуляции, когда в качестве управляющего колебания выступает гармонический сигнал вида (4.4). Исключение из (4.6) составляющей несущего колебания

$$U_{нес}(t) = U_m \cos \omega_0 t , ,$$

приводит к результату

$$u_{БАМ}(t) = 0.5k_{AM} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0.5k_{AM} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t . \quad (4.12)$$

Рассчитаем среднюю мощность сигнала балансной модуляции. Подстановка (4.12) в (4.9) после преобразований дает выражение

$$P_{БАМ} = 0.25k_{AM}^2 U_m^2 .$$

Очевидно, что энергетический выигрыш при использовании сигналов балансной модуляции по сравнению с классической амплитудной модуляцией будет равен

$$\eta_{БAM} = \frac{P_{AM}}{P_{БAM}} = \frac{0.5U_m^2 + 0.25k_{AM}^2 U_m^2}{0.25k_{AM}^2 U_m^2} = \frac{2 + k_{AM}^2}{k_{AM}^2}.$$

При $k_{AM} = 1$ этот выигрыш составляет величину $\eta = 3$.

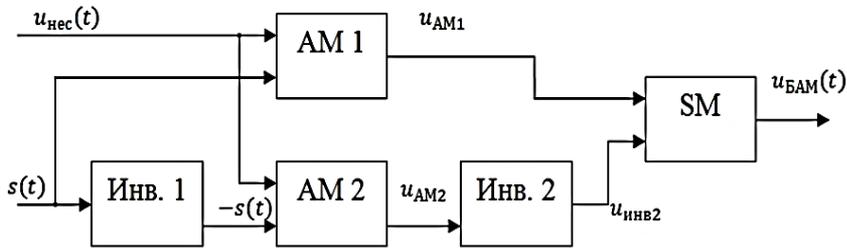


Рис. 4.5. Вариант структурной схемы формирователя сигналов балансной амплитудной модуляции.

На рис. 4.5 представлен один из вариантов структурной схемы формирователя сигналов балансной амплитудной модуляции. Формирователь содержит:

- Инв1, Инв2 – инверторы сигналов (устройства, изменяющие полярность напряжений на противоположную);
- AM1, AM2 – амплитудные модуляторы;
- SM – сумматор.

Колесание несущей частоты поступает на входы модуляторов AM1 и AM2 непосредственно. Что касается управляющего сигнала $s(t)$, то на второй вход AM1 он поступает непосредственно, а на второй вход AM2 – через инвертор Инв1. В результате на выходах модуляторов формируются колебания вида

$$u_{AM1}(t) = U_m [1 + k_{AM} s(t)] \cos \omega_0 t,$$

$$u_{AM2}(t) = U_m [1 - k_{AM} s(t)] \cos \omega_0 t.$$

На входы сумматора поступают соответственно колебания u_{AM1} и $u_{инв2} = u_{AM1}$. Результирующий сигнал на выходе сумматора составит

$$u_{SM}(t) = u_{БAM}(t) = 2U_0 k_{AM} s(t) \cos \omega_0 t. \quad (4.13)$$

В случае однотональной амплитудной модуляции выражение (4.13) принимает вид

$$u_{БAM}(t) = 2k_{AM}U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t. \quad (4.14)$$

Используя формулу произведения косинусов, после преобразований получим

$$u_{БAM}(t) = k_{AM}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + k_{AM}U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad (4.15)$$

что с точностью до постоянного множителя совпадает с (4.12). Очевидно, ширина спектра сигналов БАМ равна ширине спектра сигналов АМ.

Балансная амплитудная модуляция позволяет исключить передачу несущего колебания, что приводит к энергетическому выигрышу. Вместе с тем, обе боковые полосы (боковые составляющие в случае однотональной АМ) несут одну и ту же информацию. Напрашивается вывод о целесообразности формирования и передачи сигналов с подавленной одной из боковых полос. В этом случае мы приходим к однополосной амплитудной модуляции (ОАМ).

Если из спектра сигнала БАМ исключить одну из боковых составляющих (скажем верхнюю боковую составляющую), то в случае гармонического управляющего сигнала получим

$$u_{ОАМ}(t) = 0.5k_{AM}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (4.16)$$

Так как средняя мощность сигнала БАМ делится поровну между боковыми составляющими, то очевидно, что средняя мощность сигнала ОАМ составит

$$P_{ОАМ} = 0.5P_{БAM} = 0.125k_{AM}^2U_m^2.$$

Энергетический выигрыш по сравнению с амплитудной модуляцией составит

$$\eta_{ОАМ} = \frac{P_{AM}}{P_{ОАМ}} = \frac{0.5U_m^2 + 0.125k_{AM}^2U_m^2}{0.125k_{AM}^2U_m^2} = \frac{4 + 2k_{AM}^2}{k_{AM}^2},$$

а при $k_{AM} = 1$ он будет равен .

Формирование однополосного АМ-сигнала может быть осуществлено на базе формирователей сигналов балансной модуляции.

Структурная схема формирователя однополосного АМ-сигнала представлена на рис. 4.6.

В состав формирователя сигнала однополосной амплитудной модуляции входят:

- ФВ1, ФВ2 – фазовращатели на угол $\frac{\pi}{2}$;
- БАМ1, БАМ2 – формирователи сигналов балансной модуляции;
- СМ – сумматор.

На входы БАМ1 поступают сигналы:

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t$$

$$\text{и } u_{\text{нec}}(t) = U_m \cos \omega_0 t .$$

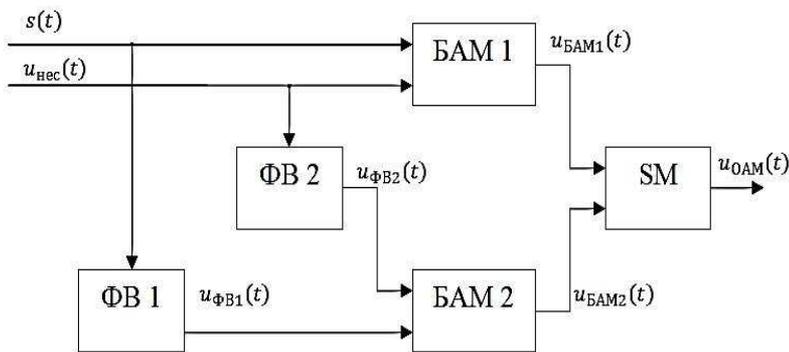


Рис 4.6.

Тогда на его выходе в соответствии с (4.15) формируется сигнал

$$u_{\text{БАМ1}}(t) = k_{\text{AM}} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + k_{\text{AM}} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t . \quad (4.17)$$

На входы БАМ2 поступают сигналы

$$u_{\text{ФВ1}}(t) = S_0 \sin \Omega t$$

$$\text{и } u_{\text{ФВ2}} = U_m \sin \omega_0 t .$$

С выхода БАМ 2 снимается колебание, описываемое в соответствии с (4.14) с заменой косинусов на синусы

$$u_{\text{БАМ2}}(t) = 2k_{\text{АМ}}U_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t .$$

С учетом известного тригонометрического соотношения

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

выходной сигнал БАМ2 преобразуется к виду

$$u_{\text{БАМ2}}(t) = k_{\text{АМ}}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t - k_{\text{АМ}}U_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t . \quad (4.18)$$

Сложение сигналов (4.17) и (4.18) в сумматоре SM дает

$$u_{\text{SM}}(t) = u_{\text{ОАМ}}(t) = 2k_{\text{АМ}}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (4.19)$$

что с точностью до постоянного множителя совпадает с (4.16). Что касается спектральных характеристик, то ширина спектра сигналов ОАМ вдвое меньше спектра АМ или БАМ сигналов.

Таким образом, при одинаковых U_m и $k_{\text{АМ}}$ однополосная АМ обеспечивает существенный энергетический выигрыш по сравнению с классической АМ и балансной модуляцией. Вместе с тем, реализация сигналов балансной амплитудной и однополосной амплитудной модуляции сопряжена с некоторыми трудностями, касающимися необходимости восстановления несущего колебания при обработке сигналов на приемной стороне. Эта задача решается устройствами синхронизации передающей и приемной сторон, что в общем плане приводит к усложнению аппаратуры.

4.4 Сигналы с непрерывной угловой модуляцией

4.4.1 Обобщенное представление сигналов с угловой модуляцией

В предыдущем разделе была рассмотрена процедура модуляции, когда информационным параметром, изменяемым в соответствии с законом управляющего (модулирующего) сигнала являлась амплитуда несущего колебания. Кроме амплитуды несущее колебание характеризуется также частотой ω_0 и начальной фазой φ_0 .

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = U_m \cos \phi(t), \quad (4.20)$$

где $\phi(t)$ – полная фаза несущего колебания, которая определяет текущее значение фазового угла.

Изменение либо ω_0 , либо φ_0 в соответствии с управляющим сигналом $s(t)$ соответствует угловой модуляции. Таким образом, понятие угловой модуляции включает в себя как частотную (ЧМ), так и фазовую (ФМ) модуляцию.

При частотной модуляции в соответствии с управляющим сигналом изменяется мгновенная частота несущего колебания в пределах от нижней ω_H до ω_B граничных частот

$$\omega(t) = \omega_0 + (\omega_B - \omega_H)s(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t). \quad (4.21)$$

Наибольшее значение частотного отклонения $\Delta\omega_{\text{max}}$ от ω_0 называется девиацией частоты $\Delta\omega_D$

$$\Delta\omega_D = \Delta\omega_{\text{max}}.$$

Если граничные частоты расположены симметрично относительно ω_0 , то девиация частоты

$$\Delta\omega_D = \omega_B - \omega_H. \quad (4.22)$$

Именно такой случай частотной модуляции будет рассматриваться в дальнейшем.

Закон изменения полной фазы определяется как интеграл от мгновенной частоты. Тогда, с учетом (4.21) и (4.22), можно записать

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t_1) dt_1 = \omega_0 t + \Delta\omega_D \int_0^t s(t_1) dt_1 + \varphi_0. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) в (4.20), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с частотной модуляцией

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + \Delta\omega_D \int_0^t s(t_1) dt_1 + \varphi_0 \right]. \quad (4.24)$$

Слагаемое $\Delta\omega_D \int_0^t S(t_1) dt_1$ представляет собой составляющую полной фазы, обусловленную наличием частотной модуляции. Нетрудно убедиться в том, что полная фаза сигнала с частотной модуляцией изменяется по закону интеграла от $s(t)$.

При фазовой модуляции, в соответствии с модулирующим сигналом $s(t)$, изменяется начальная фаза несущего колебания в пределах от нижнего φ_H до верхнего φ_B граничных значений фазы

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi s(t). \quad (4.25)$$

Наибольшее отклонение фазового сдвига $\Delta\varphi_{\max}$ от φ_0 называется девиацией фазы $\Delta\varphi_D$. Если φ_H и φ_B расположены симметрично относительно φ_0 , то $\Delta\varphi_D = \varphi_B - \varphi_H$. В этом случае полная фаза сигнала с фазовой модуляцией

$$\phi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_D s(t). \quad (4.26)$$

Тогда, подставляя (4.26) в (4.20), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с фазовой модуляцией

$$u_{\phi M}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_D s(t)]. \quad (4.27)$$

Рассмотрим, как изменяется мгновенная частота сигнала при фазовой модуляции. Известно, что мгновенная частота и текущая полная фаза связаны соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Подставляя в это выражение формулу (4.26) и проведя операцию дифференцирования, получим

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\varphi_D \frac{dS(t)}{dt} = \omega_0 + \omega_{\phi M}(t), \quad (4.28)$$

где $\omega_{\phi M}(t) = \Delta\varphi_D \frac{dS(t)}{dt}$ – составляющая частоты, обусловленная наличием фазовой модуляции несущего колебания (4.20).

Таким образом, изменение начальной фазы несущего колебания приводит к изменению мгновенных значений частоты по закону производной от $s(t)$ по времени.

Практическая реализация устройств формирования сигналов угловой модуляции может осуществляться одним из двух методов: прямым или косвенным. При прямом методе в соответствии с законом изменения управляющего сигнала $s(t)$ изменяются параметры колебательного контура генератора несущего колебания. Выходной сигнал при этом оказывается промодулированным по частоте. Для получения сигнала фазовой модуляции на выходе частотного модулятора включается дифференцирующая цепь.

Сигналы фазовой модуляции при прямом методе формируются путём изменения параметров колебательного контура усилителя, подключённого к выходу генератора несущего колебания. Для преобразования сигналов фазовой модуляции в сигнал частотной модуляции управляющее колебание подаётся на вход фазового модулятора через интегрирующую цепь.

Косвенные методы не предполагают непосредственного воздействия управляющего сигнала на параметры колебательного контура. Один из косвенных методов базируется на преобразовании амплитудно-модулированных сигналов в сигналы фазовой модуляции, а те, в свою очередь, – в сигналы частотной модуляции.

4.4.2 Сигналы с частотной модуляцией

Анализ характеристик сигналов с угловой модуляцией мы начнём с рассмотрения однотональной частотной модуляции. Управляющий сигнал в этом случае представляет собой колебание единичной амплитуды (к этому виду всегда можно привести $s(t)$)

$$s(t) = \cos \Omega t, \quad (4.29)$$

а модулируемым параметром несущего колебания является мгновенная частота. Тогда, подставляя (4.29) в (4.24), получим:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + \Delta \omega_D \int_0^t \cos \Omega t_1 + \varphi_0 \right].$$

Выполнив операцию интегрирования, приходим к следующему выражению сигнала однотоновой частотной модуляции

$$\begin{aligned} u_{\text{ЧМ}}(t) &= U_m \left[\cos \omega_0 t + \frac{\Delta \omega_D}{\Omega} \sin \Omega t \right] = \\ &= U_m \cos \left[\omega_0 t + K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Отношение

$$K_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta \omega_D}{\Omega} = \frac{\Delta f_D}{F}$$

называется индексом частотной модуляции и имеет физический смысл части девиации частоты $\Delta \omega_D$, приходящуюся на единицу частоты модулирующего сигнала. В выражении (4.30) начальная фаза φ_0 не учитывается как не имеющая принципиального значения.

Временная диаграмма сигнала при однотоновой ЧМ представлена на рис. 4.7

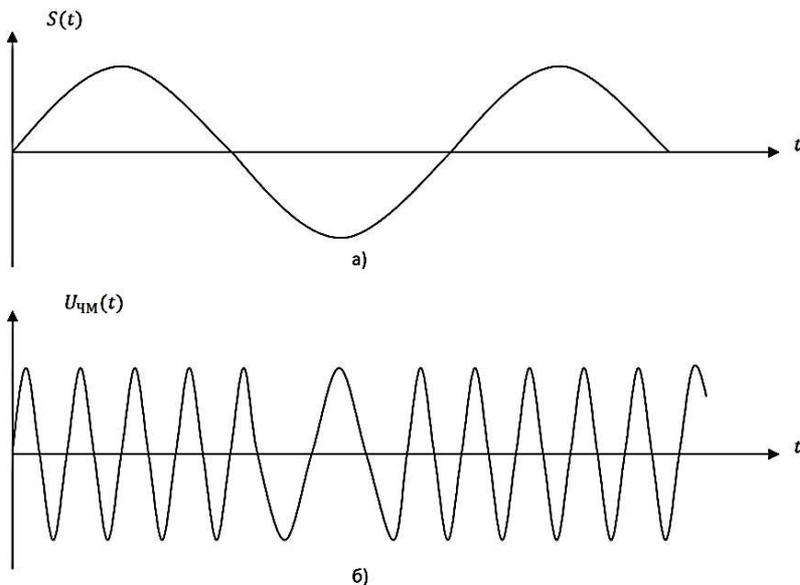


Рис. 4.7. Осциллограммы модулирующего колебания (а), при однотоновой ЧМ (б).

Рассмотрение спектральных характеристик ЧМ-сигнала начнём с частного случая малого индекса частотной модуляции $K_{ЧМ} \ll 1$. Воспользовавшись соотношением

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

представим (4.30) в виде

$$\begin{aligned} U_{ЧМ}(t) = & U_m \cos(K_{ЧМ} \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - \\ & - U_m \sin(K_{ЧМ} \sin \Omega t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (4.31)$$

Поскольку $K_{ЧМ} \ll 1$, то можно воспользоваться приближёнными представлениями

$$\sin \alpha \approx \alpha; \cos \alpha \approx 1 \quad \text{при } \alpha \ll 1.$$

Тогда

$$\cos(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx 1, \sin(K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t$$

и выражение (4.31) приобретает вид

$$U_{\text{ЧМ}}(t) \approx U_m \cos \omega_0 t - K_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t \cdot \sin \omega_0 t.$$

Воспользовавшись тригонометрическим соотношением

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 0.5[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

и полагая $\alpha = \omega_0 t$ и $\beta = \Omega t$, получим:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \omega_0 t - 0.5K_{\text{ЧМ}}U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ + 0.5K_{\text{ЧМ}}U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t \quad (4.32)$$

или

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \omega_0 t + 0.5K_{\text{ЧМ}}U_m \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \pi] + \\ + 0.5K_{\text{ЧМ}}U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t \quad (4.33)$$

Это выражение напоминает выражение (4.6) для однотонового АМ – сигнала. Отличие состоит в том, что, если в однотоновом АМ – сигнале начальные фазы боковых составляющих одинаковы, то в однотоновом ЧМ сигнале при малых индексах частотной модуляции они отличаются на угол π , т.е. находятся в противофазе.

Спектральная диаграмма такого сигнала показана на рис. 4.8.

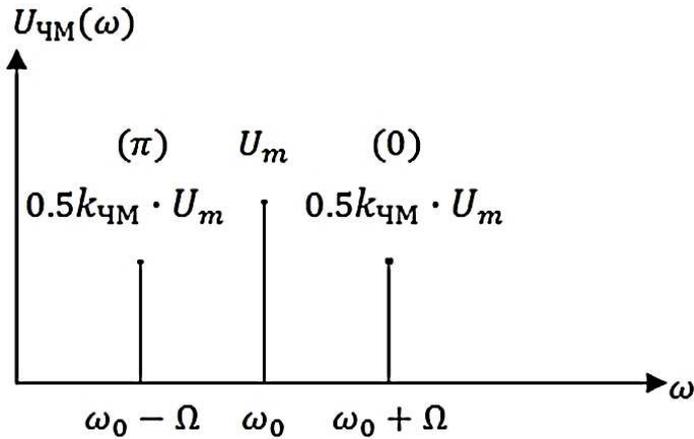


Рис. 4.8. Спектральная диаграмма однотонового ЧМ сигнала.

В скобках указаны значения начальной фазы боковых составляющих. Очевидно, ширина спектра ЧМ – сигнала при малых индексах частотной модуляции равна

$$\Delta\omega_{ЧМ} = 2\Omega.$$

Сигналы с частотной модуляцией с малым β в практической радиотехнике применяются достаточно редко.

В реальных радиотехнических системах индекс частотной модуляции существенно превышает единицу.

В современных аналоговых системах мобильной связи, использующих для передачи речевых сообщений сигналы частотной модуляции при верхней частоте речевого сигнала $\Omega_B = 3.4$ кГц и девиации частоты $\Delta f_d = 9.5 \div 12$ кГц, индекс β , как нетрудно убедиться, достигает значения $\sim 3-4$. В системах же радиовещания метрового диапазона индекс частотной модуляции может превышать значения, равного 10. Поэтому рассмотрим спектральные характеристики ЧМ сигналов при произвольных значениях величины $K_{ЧМ}$.

Возвратимся к выражению (4.32). Известны следующие виды разложения

$$\cos[\alpha \cdot \sin \Omega t] = I_0(\alpha) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \cos 2i\Omega t \quad (4.34)$$

$$\sin[\alpha \cdot \sin \Omega t] = 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \sin(2i-1)\Omega t, \quad (4.35)$$

где $I_i(\omega)$ – функция Бесселя первого рода i -го порядка.

Подставляя эти выражения в (4.32) получим

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i A_i \cos(\omega_0 - i\Omega)t + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(\omega_0 + i\Omega)t \quad (4.36)$$

где $A_i = U_m \cdot I_i(K_{\text{ЧМ}})$.

Полученное выражение представляет собой разложение однонального ЧМ – сигнала на гармонические составляющие, т.е. амплитудный спектр. Первое слагаемое этого выражения является спектральной составляющей колебания несущей частоты с амплитудой $A_0 = U_m \cdot I_0(K_{\text{ЧМ}})$. Первая сумма выражения (4.35) характеризует боковые составляющие с амплитудами A_i и частотами $\omega_0 - i\Omega$, т.е. нижнюю боковую полосу, а вторая сумма – боковые составляющие с амплитудами A_i и частотами $\omega_0 + i\Omega$, т.е. верхнюю боковую полосу спектра.

Спектральная диаграмма ЧМ – сигнала при произвольном представлена на рис. 4.9.

Проанализируем характер амплитудного спектра ЧМ – сигнала. В первую очередь отметим, что спектр является симметричным относительно частоты несущего колебания и теоретически является бесконечным.

Составляющие боковых полос расположены на расстоянии Ω друг от друга, а их амплитуды $A_i = U_m \cdot I_i(K_{\text{ЧМ}})$ зависят от индекса частотной модуляции. И наконец, у спектральных составляющих нижней и верхней боковых частот с чётными индексами начальные фазы совпадают, а у спектральных составляющих с нечётными индексами отличаются на угол π .

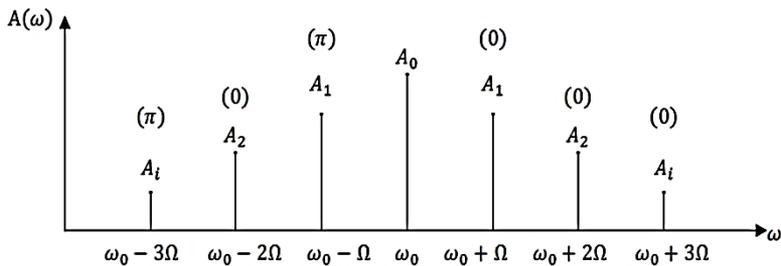


Рис. 4.9. Спектральная диаграмма ЧМ – сигнала при произвольном

В таблице 4.1 приведены значения функции Бесселя для различных i и $\alpha = K_{\text{ЧМ}}$. Обратим внимание на составляющую несущего колебания ω_0 . Амплитуда этой составляющей равна $A_0 = U_m \cdot I_0(K_{\text{ЧМ}})$. Из таблицы 4.1 следует, что при $K_{\text{ЧМ}} \approx 2.4$ амплитуда $A_0 \approx 0$, т.е. спектральная составляющая несущего колебания в спектре ЧМ – сигнала отсутствует. Но это не означает отсутствия несущего колебания в ЧМ – сигнале (4.30). Просто энергия несущего колебания перераспределяется между составляющими боковых полос.

Таблица 4.1

$K_{\text{ЧМ}}$	$I_0(K_{\text{ЧМ}})$	$I_1(K_{\text{ЧМ}})$	$I_2(K_{\text{ЧМ}})$	$I_3(K_{\text{ЧМ}})$	$I_4(K_{\text{ЧМ}})$	$I_5(K_{\text{ЧМ}})$	$I_6(K_{\text{ЧМ}})$	$I_7(K_{\text{ЧМ}})$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0.765	0.440	0.115	0.019	0.002	0	0	0
2	0.224	0.577	0.353	0.129	0.034	0.007	0.001	0
3	-0.26	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011	0.002
4	-0.397	-0.066	0.364	0.43	0.281	0.132	0.041	0.015
5	-0.178	-0.328	0.047	0.365	0.391	0.261	0.131	0.053
6	0.151	-0.277	-0.243	0.115	0.358	0.362	0.246	0.129

Как уже подчёркивалось выше спектр ЧМ – сигнала теоретически является бесконечным. На практике же полоса пропускания радиотехнических устройств всегда ограничена. Оценим практическую ширину спектра, при котором воспроизведение ЧМ – сигнала можно считать неискажённым.

Средняя мощность ЧМ – сигнала определяется как сумма средних мощностей спектральных составляющих

$$P_{\text{ЧМ}} = P_{\text{нес}} + \sum_{i=1}^n P_{\text{Н.Б}i} + \sum_{i=1}^n P_{\text{В.Б}i} .$$

Проведённые расчёты показали, что около 99% энергии ЧМ – сигнала сосредоточено в частотных составляющих с номерами $i \leq K_{\text{ЧМ}} + 1$. А это означает, что частотными составляющими с номерами $i > K_{\text{ЧМ}} + 1$ можно пренебречь. Тогда практическая ширина спектра при однотоновой ЧМ с учётом его симметрии относительно ω_0

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{ЧМ}} &= \omega_0 + (K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega - \\ &- [\omega_0 - (K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega] = 2(K_{\text{ЧМ}} + 1)\Omega \end{aligned}$$

а при больших значения $K_{\text{ЧМ}} \gg 1$

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = 2K_{\text{ЧМ}} \cdot \Omega = 2\Delta\omega_{\text{Д}} , \quad (4.37)$$

Т.е. равна удвоенной девиации частоты.

Таким образом, ширина спектра ЧМ – сигнала приблизительно в раз больше ширины спектра АМ – сигнала. Вместе с тем, для передачи информации используется вся энергия сигнала. В этом состоит преимущества сигналов частотной модуляции над сигналами амплитудной модуляции.

4.5 Изучение характеристик модулированных колебаний в программном пакете NI Multisim

4.5.1 Расчётно-практическое задание

1. Задано аналитическое выражение АМК

$$u_{AM}(t) = U_m [1 + k_{AM} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t,$$

где $\Omega = 2\pi F$, $\omega_0 = 2\pi f$.

Таблица 4.2

Параметры АМ и ЧМ сигналов

№ варианта	U_m , В	f , кГц	F , кГц	k_{AM}	$K_{ЧМ}$
1	5	55	0,5	0,4	5
2	10	50	0,8	0,5	4
3	7	60	1,0	0,6	4
4	12	70	1,2	0,7	5
5	15	80	1,5	0,8	3
6	18	90	2	0,3	4
7	14	55	2,3	0,45	3
8	8	65	2,4	0,9	4
9	20	85	2,5	0,55	5
10	25	75	1,8	0,65	4
11	6	95	1,6	0,75	5
12	9	65	1,3	0,85	3
13	11	55	1,6	0,35	4
14	13	65	1,3	0,95	4
15	16	52	0,7	0,25	3
16	22	75	1,3	0,5	4
17	24	85	0,9	0,4	4
18	21	62	1,1	0,75	3
19	15	54	1,3	0,2	4
20	19	80	2,8	0,45	3

Для указанных в табл. 4.2 вариантов рассчитать амплитуды гармоник и построить график спектра амплитуд. Определить

распределение мощности по спектральным составляющим.

2. Задано аналитическое выражение ЧМК

$$u_{чМ}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + K_{чМ} \sin \Omega t],$$

где $\Omega = 2\pi F$, $\omega_0 = 2\pi f$.

Для указанных в табл. 4.2 вариантов определить практическую ширину спектра, рассчитать амплитуды гармоник и построить график спектра амплитуд в пределах практической ширины спектра. Определить распределение мощности по спектральным составляющим. Значение функций Бесселя 1-го рода приведены в табл. 4.1.

4.5.2 Компьютерный практикум

1. Запустить программу компьютерного моделирования NI Multisim.

2. Собрать рабочую схему для исследования однотонального АМ сигнала, рис.4.10. Для формирования АМ колебания использовать источник АМ колебаний -**AM_VOLTAGE**. Он доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Разделе: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **AM_VOLTAGE**. Установить параметры источника АМ колебаний в соответствии с вариантом задания, табл. 4.2. (**Свойства** источника АМ колебаний, вкладка **Параметры**). Пример установки параметров источника АМ сигнала показан на рис. 4.11.

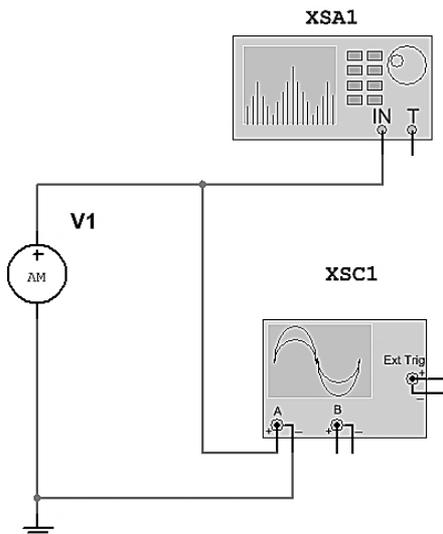


Рис. 4.10. Рабочая схема для исследования двухполюсного однотонового АМ колебания.

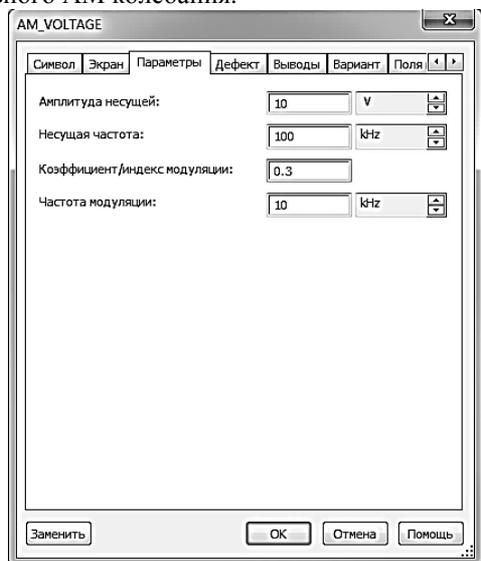


Рис. 4.11. Пример установки параметров источника АМ колебаний. Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Коэффициент модуляции $k_{AM}=0.3$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

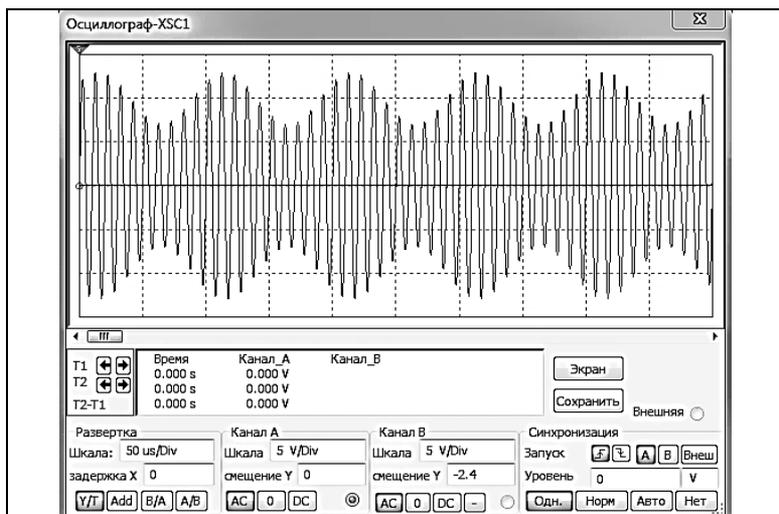


Рис. 4.12. Осциллограмма двухполосного однотонового АМ колебания. Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Коэффициент модуляции $k_{AM}=0.3$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

3. По осциллограмме АМ сигнала определить k_{AM} по формуле (4.3), см. рис. 4.2.

4. Используя **Анализатор спектра**, измерить уровень гармоник двухполосного однотонового АМ сигнала, указанного в расчётно-практическом задании. Сравнить расчётные и измеренные значения амплитуд, результаты оформить в виде таблицы.

Использовать следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... - установки (**установить число точек FFT - 32768**).

В качестве примера, на рис.4.13, показан вид окна **Анализатора спектра** для двухполосного однотонового АМ колебания с параметрами: Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Коэффициент модуляции $k_{AM}=0.3$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

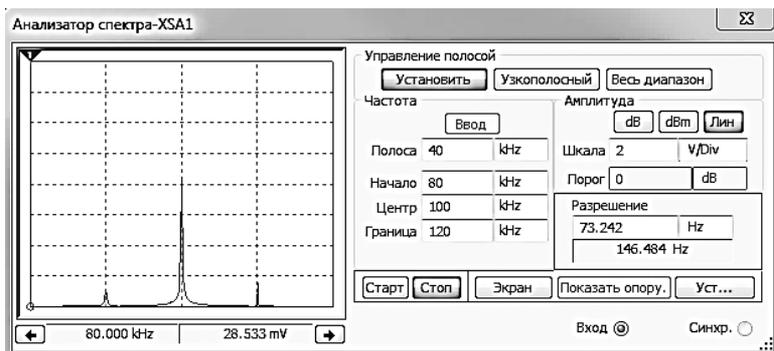


Рис.4.13. Вид окна **Анализатор спектра** при анализе двухполосного однотонового АМ колебания. Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Коэффициент модуляции $k_{AM}=0.3$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

5. Заменить источник АМ колебаний на источник ЧМ колебаний. Источник ЧМ колебаний доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **FM_VOLTAGE**. Задать параметры источника в соответствии с вариантом задания, табл. 4.2.

6. Используя **Анализатор спектра**, определить амплитуды гармоник ЧМ колебания.

Использовать следующие настройки **Анализатора спектра**: Уст... - установки (**установить число точек FFT - 32768**).

В качестве примера, на рис 4.14 показан вид окна **Анализатора спектра** для ЧМ колебания с параметрами: Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Индекс модуляции $K_{ЧМ}=5$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

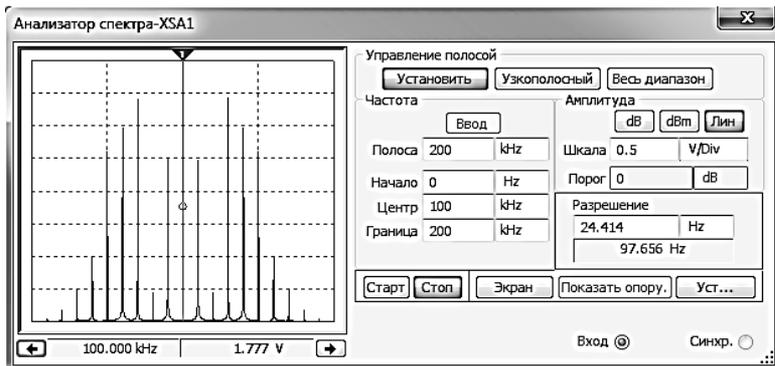


Рис.4.14. Вид окна **Анализатор спектра** при анализе ЧМ колебания. Амплитуда несущей $U_m=10$ В, Несущая частота $f=100$ кГц, Индекс модуляции $K_{ЧМ}=5$, Частота модуляции $F=10$ кГц.

7. Установить частоту модуляции ЧМ колебания $F = f / 200$ и, изменяя девиацию частоты от 0 до 10 %, определить индексы модуляции $K_{ЧМ}$, при которых амплитуда несущей принимает минимальные значения.

8. Установить частоту модуляции ЧМК в соответствии с табл. 4.2 и, уменьшая девиацию частоты, определить индекс модуляции $K_{ЧМ}$, при котором амплитуды гармоник с номером выше 1 становятся менее 5 % от первой.

9. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Приведите классификацию видов модуляции.
2. Каким выражением описывается амплитудно-модулированный сигнал?
3. Что такое коэффициент глубины модуляции АМ сигнала?
4. Нарисуйте спектр АМ сигнала и поясните его состав.
5. Чем отличаются сигналы балансной модуляции от сигналов однополосной амплитудной модуляции?
6. Что такое частотная модуляция сигнала?
7. Чем отличается частотная модуляция от фазовой модуляции сигнала?
8. Поясните, что такое девиация частоты и индекс частотной модуляции.
9. Какой спектр имеют ЧМ и ФМ сигналы?
10. Чем отличается сигнал дискретной амплитудной модуляции от непрерывного АМ сигнала?

11. Покажите временную диаграмму и спектр сигнала при дискретной частотной модуляции.
12. Поясните, как формируется сигнал при дискретной фазовой модуляции? Почему ширина спектра дискретного АМ и ФМ сигналов одинакова?
13. Перечислите основные свойства программы Multisim.
14. Как задаются параметры основных элементов цепей?
15. Как задаются параметры радиосигналов с АМ и ЧМ?
16. Как смоделировать импульсный радиосигнал с АМ?
17. Как смоделировать радиосигналы с АИМ?
18. Как смоделировать частотно-модулированные радиосигналы со сложным первичным сигналом?
19. Как получить спектральные характеристики сигналов?
20. В чем состоит принципиальное различие в спектрах видео- и радиосигналов?
21. Как получить числовые значения спектральных характеристик?
22. Как измерить параметры сигналов по осциллограмме виртуального осциллографа?
23. Приведите классификацию сигналов.
24. Объясните необходимость модуляции как основного радиотехнического процесса.
25. Приведите примеры узкополосных сигналов.
26. Как связаны между собой спектральные плотности видеоимпульса и радиоимпульса?
27. Какова причина искажений сообщения, наблюдаемых при перемодуляции сигнала?
28. От чего зависит распределение мощности в спектре однотонального АМ сигнала?
29. Объясните принцип построения векторной диаграммы АМ сигнала.
30. Чем принципиально отличаются осциллограммы сигналов с балансной амплитудной модуляцией и обычных АМ сигналов?

Глава 5. Радиотехнические цепи

5.1 Классификация радиотехнических цепей

При рассмотрении обобщённой структурной схемы радиотехнической информационной системы было показано, что передача сообщений сопровождается цепочкой преобразований сигналов [1]. Преобразования сопровождаются различными радиотехническими устройствами, которые представляют собой совокупность физических объектов, между которыми существуют определённые взаимодействия. Отдельный объект, осуществляющий то или иное преобразование сигналов, называется радиотехнической цепью.

Радиотехническая цепь имеет вход, на который подаётся исходный сигнал, и выход, откуда снимается преобразованный сигнал. Такая цепь как физическая система является одномерной. Если цепь имеет несколько входов и выходов, то она называется многомерной. В дальнейшем будут рассматриваться только одномерные системы.

Если неизвестны внутренние процессы преобразования сигналов, то радиотехническую цепь можно представить в виде т.н. “чёрного ящика” (рис. 5.1), где W_{Π} – оператор преобразования.

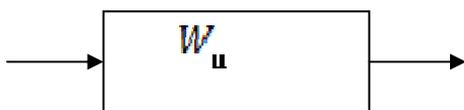


Рис 5.1

Вместе с тем, в ряде случаев рассматривают и внутренние состояния радиотехнической цепи. К характеристикам состояния можно отнести напряжения и токи на различных элементах (резисторах, емкостях, индуктивностях) цепи. Если цепь характеризуется только одним состоянием, то она называется цепью первого порядка. Если же в качестве состояний рассматриваются токи или напряжения на n элементах цепи, то цепь является цепью n -го порядка. Порядок цепи оказывает существенное влияние на вид оператора преобразования W_{Π} .

Таким образом, результат преобразования входного сигнала радиотехнической цепью с оператором W_{Π} можно записать следующим образом

$$U_{\text{вых}}(t) = W_{\Pi} [U_{\text{вх}}(t)] \quad (5.1)$$

В первую очередь, отметим, что оператор преобразования с течением времени может оставаться постоянным, либо изменяться.

Поскольку оператор преобразования целиком определяется параметрами цепи, то очевидно, неизменный во времени оператор характеризуется постоянными параметрами и цепи называются цепями с постоянными параметрами. Если же оператор $W_u(t)$ изменяется во времени, то выходной сигнал описывается выражением

$$U_{\text{вых}}(t) = W_u[t, U_{\text{ex}}(t)], \quad (5.2)$$

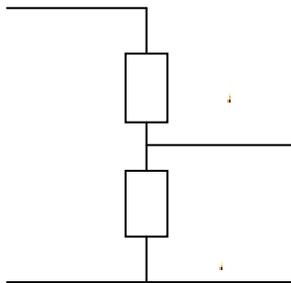
а цепь называется цепью с переменными параметрами или параметрической цепью.

По виду оператора преобразования цепи делятся на линейные и нелинейные. Если оператор удовлетворяет условиям

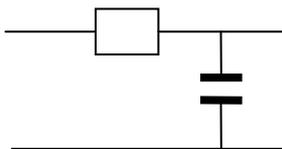
$$W_u[U_{\text{ex1}}(t) + U_{\text{ex2}}(t)] = W_u[U_{\text{ex1}}(t)] + W_u[U_{\text{ex2}}(t)], \quad (5.3)$$

$$W_u[\alpha \cdot U_{\text{ex}}(t)] = \alpha \cdot W_u[U_{\text{ex}}(t)], \quad (5.4)$$

то он является линейным оператором и цепь соответственно является линейной. В противном случае цепь относится к нелинейным цепям.



а



б

Рис. 5.2

Условия (5.3) и (5.4) отражают фундаментальный принцип суперпозиции, который состоит в том, что реакция, т.е. выходной отклик цепи на сумму сигналов равен сумме откликов на эти сигналы, поступившие на вход цепи по отдельности. Простейшие линейные цепи (резисторный делитель напряжения и RC-цепь) изображены на рис. 5.3. Если выходной сигнал радиотехнической цепи в некоторый момент времени $t > t_0$ определяется только значением входного сигнала в тот же момент времени, то такая цепь называется безынерционной. Если же выходной сигнал зависит не только от значения входного сигнала в данный момент времени t , но и от значений в

предыдущие моменты времени, то такая цепь является инерционной. Очевидно, резисторный делитель (рис. 5.2, а) является безынерционной. Инерционность цепи определяется наличием в её составе ёмкостей и индуктивностей, поэтому RC-цепь, изображённая на рис. 5.2, б является инерционной цепью.

Завершим классификацию цепей по признаку наличия в составе цепи источника энергии. Если источник энергии в составе цепи отсутствует, такая цепь называется пассивной. Приведённые выше линейные цепи являются пассивными. При наличии же источника энергии в составе цепи цепь является активной. В качестве активных элементов радиотехнических цепей выступают электронные лампы, транзисторы и т.д. С этой точки зрения усилитель электрических сигналов является активной цепью.

5.2. Характеристики линейных радиотехнических цепей

При рассмотрении радиотехнических сигналов было установлено, что сигнал может быть представлен как во временной (динамическое представление), так и в частотной(спектральное представление) областях. Очевидно, при анализе процессов преобразования сигналов цепи также должны иметь соответствующие описания временными или частотными характеристиками.

Если линейная цепь осуществляет преобразование в соответствии с оператором $W_{\text{ц}}$ и на вход цепи подаётся сигнал $U_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$ в виде дельта-функции (на практике очень короткий импульс), то выходной сигнал (реакция цепи)

$$U_{\text{вых}}(t) = W_{\text{ц}}[\delta(t)] = h(t) \quad (5.5)$$

называется импульсной характеристикой цепи. Импульсная характеристика составляет основу одного из методов анализа преобразования сигналов, который будет рассмотрен ниже.

Если на вход линейной цепи поступает сигнал $U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{ед}}(t)$, т.е. сигнал вида “единичный перепад”, то выходной сигнал цепи

$$U_{\text{вых}}(t) = W_{\text{ц}}[U_{\text{ед}}(t)] = g(t) \quad (5.6)$$

называется переходной характеристикой.

Между импульсом и переходной характеристикой существует однозначная связь. Так как дельта-функция (см. подраздел 1.3):

$$\delta(t) = \frac{dU_{e0}(t)}{dt},$$

то подставляя это выражение в (5.5), получим:

$$h(t) = W_u \left[\frac{dU_{e0}(t)}{dt} \right] = \frac{d\{W_u[U_{e0}(t)]\}}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (5.7)$$

В свою очередь переходная характеристика

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Перейдём к рассмотрению частотных характеристик линейных цепей. Применим к входному $U_{ex}(t)$ и выходному $U_{вых}(t)$ сигналам прямое преобразование Фурье

$$U_{ex}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{ex}(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$U_{вых}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вых}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Отношение комплексного спектра выходного сигнала к комплексному спектру входного сигнала называется комплексным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{U_{вых}(j\omega)}{U_{ex}(j\omega)} \quad (5.9)$$

Из этого следует, что

$$U_{вых}(j\omega) = K(j\omega) \cdot U_{ex}(j\omega). \quad (5.10)$$

Таким образом, оператором преобразования сигнала линейной цепью в частотной области служит комплексный коэффициент передачи.

Представим комплексный коэффициент передачи в виде

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\arg K(j\omega)} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.11)$$

где $|K(j\omega)| = K(\omega)$ и $\arg K(j\omega) = \varphi(\omega)$ соответственно модуль и аргумент комплексной функции $K(j\omega)$. Модуль комплексного коэффициента передачи $K(\omega)$ как функция частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а аргумент $\varphi(\omega)$ – фазочастотной характеристикой (ФЧХ). Амплитудно-частотная характеристика является чётной, а фазочастотная характеристика – нечётной функцией частоты ω .

Временные и частотные характеристики линейных цепей связаны между собой преобразованием Фурье

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad (5.12)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega, \quad (5.13)$$

что вполне объяснимо, поскольку они описывают один и тот же объект – линейную цепь.

5.3. Инерционные линейные цепи

Как уже отмечалось ранее, если выходной сигнал цепи определяется не только значениями входного сигнала в рассматриваемый момент времени t , но и значениями входного сигнала в предыдущие моменты, то такая цепь называется инерционной. Если к этому же оператор преобразования линейный, то радиотехническая цепь является линейной инерционной цепью.

Линейные инерционные цепи (их ещё называют динамическими) нашли широкое распространение в радиотехнике. К ним относятся простейшие RC и RL цепи, колебательные контура и т.д. Как правило, линейные инерционные цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями.

В качестве примера рассмотрим простейшую RC-цепь, изображённую на рис. 5.2, б. Согласно закону Кирхгофа можно записать

$$U_R(t) + U_C(t) = U_{ex}(t), \quad (5.14)$$

где $U_R(t)$ и $U_C(t)$ - напряжения на соответствующих элементах цепи. Но напряжение $U_C(t)$ является выходным сигналом цепи, т.е. $U_C(t) = U_{вых}(t)$. С другой стороны, напряжение на резисторе

$$U_R(t) = i(t) \cdot R,$$

где $i(t)$ – ток, протекающий в цепи. Так как в цепь включена ёмкость, то ток протекающий в цепи:

$$i(t) = c \frac{dU_C(t)}{dt} = c \frac{dU_{вых}(t)}{dt},$$

$$U_R(t) = RC \frac{dU_{вых}(t)}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в выражение (5.14), получим:

$$RC \frac{dU_{вых}(t)}{dt} + U_{вых}(t) = U_{ex}(t). \quad (5.15)$$

Таким образом, простейшая RC-цепь описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Отметим, что состояние цепи характеризуется только напряжением на ёмкости, поэтому данная цепь является цепью первого порядка. Отсюда следует, что порядок дифференциального уравнения соответствует порядку цепи.

В общем случае линейная инерционная цепь описывается линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка

$$\begin{aligned} & \alpha_n \cdot \frac{d^n U_{вых}(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} U_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \dots \\ & \dots + \alpha_1 \cdot \frac{dU_{вых}(t)}{dt} + \alpha_0 U_{вых}(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_m \frac{d^m U_{\text{ex}}(t)}{dt^m} + \beta_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} U_{\text{ex}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots \\
&\dots + \beta_1 \frac{dU_{\text{ex}}(t)}{dt} + \beta_0 \cdot U_{\text{ex}}(t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

или в компактной записи

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k U_{\text{ввх}}(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^m \beta_l \frac{d^l U_{\text{ex}}(t)}{dt^l}, \tag{5.17}$$

где α_k и β_l - коэффициенты уравнения.

Если известно дифференциальное уравнение (5.16), описывающее линейную цепь, можно найти характеристики цепи. Применим к обеим частям уравнения (5.16) прямое преобразование Фурье. Тогда, с учётом (2.47) можно записать

$$\begin{aligned}
U_{\text{ввх}}(j\omega) [\alpha_n \cdot (j\omega)^n + \alpha_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_0] = \\
= U_{\text{ex}}(j\omega) [\beta_m \cdot (j\omega)^m + \beta_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_0]
\end{aligned}$$

откуда следует

$$K(j\omega) = \frac{U_{\text{ввх}}(j\omega)}{U_{\text{ex}}(j\omega)} = \frac{\beta_m \cdot (j\omega)^m + \beta_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_0}{\alpha_n \cdot (j\omega)^n + \alpha_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_0} \tag{5.18}$$

Для рассмотренной выше RC-цепи уравнение (5.15) можно представить в виде

$$\alpha_1 \frac{dU_{\text{ввх}}(t)}{dt} + \alpha_0 U_{\text{ввх}}(t) = \beta_0 U_{\text{ex}}(t),$$

где $\alpha_1 = RC$, $\alpha_0 = 1$; $\beta_0 = 1$.

Тогда комплексный коэффициент передачи цепи в соответствии с (5.18) будет иметь вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Теперь, зная $K(j\omega)$, можно определить импульсную характеристику, используя (5.13), а также переходную характеристику (5.8), АЧХ и ФЧХ цепи.

Контрольные вопросы

1. Приведите классификацию радиотехнических цепей.
2. Чем отличаются линейные цепи от нелинейных?
3. Как описывается импульсная характеристика цепи? Что такое оператор преобразования сигнала линейной цепью?
4. Поясните смысл амплитудно-частотной характеристики и чем она отличается от фазо-частотной характеристики?
5. Какие линейные цепи называются инерционными?
6. Перечислите методы анализа преобразования сигналов линейными цепями.
7. Сравните классический и временной методы преобразования сигнала линейной цепью.
8. Что общего между спектральным и операторным методами?
9. Какие радиотехнические цепи называются пассивными апериодическими цепями?
10. Приведите примеры пассивных частотно-избирательных цепей и перечислите их характеристики.
11. Какие линейные цепи относятся к активным цепям?
12. Приведите характеристики частотно-избирательной цепи.

Глава 6. Преобразование детерминированных сигналов линейными цепями

Рассмотренные выше математические модели различных сигналов и линейных цепей позволяют перейти к рассмотрению задач прохождения сигналов через линейные цепи [1]. При этом, целесообразно все многообразие задач разделить на две группы. К первой группе следует отнести задачи преобразования первичных, т.е. видеосигналов, как одиночных, так и периодических. Вторая группа объединяет задачи анализа прохождения модулированных сигналов через линейные цепи.

В общем случае задача анализа прохождения сигналов через линейные цепи формулируется следующим образом. Задан входной сигнал $u_{вх}(t)$ и его характеристики (временные, спектральные, операторные). Входной сигнал поступает на линейную цепь с известными характеристиками (временными, спектральными, операторными). Необходимо найти соответствующие характеристики выходного сигнала. При этом в соответствии с целями анализа в большинстве случаев нет необходимости находить все характеристики выходного сигнала, а ограничиться некоторыми из них, например, формой выходного сигнала $u_{вых}(t)$ или его спектром $u_{вх}(j\omega)$. Это в свою очередь, определяет выбор метода анализа.

Ввиду многообразия задач преобразования детерминированных сигналов линейными цепями ниже будут рассмотрены некоторые из них, освоение методики решения которых позволит решать и более сложные задачи.

6.1. Пассивные аperiodические цепи

Рассмотрим задачу прохождения прямоугольного видеоимпульса через интегрирующую цепь. Если целью анализа является определение анализа целесообразно выбрать временной метод.

Как известно, в основе временного метода лежит интеграл Дюамеля

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика цепи.

Представим прямоугольный импульс с амплитудой U_0 и длительностью τ_H в виде

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_0 u_{\text{ед}}(t), & \text{при } 0 \leq t < \tau_{\text{И}} \\ U_0 u_{\text{ед}}(t) - U_0 u_{\text{ед}}(t - \tau_{\text{И}}), & \text{при } t \geq \tau_{\text{И}} \end{cases}, \quad (6.1)$$

где $u_{\text{ед}}$ – единичная функция.

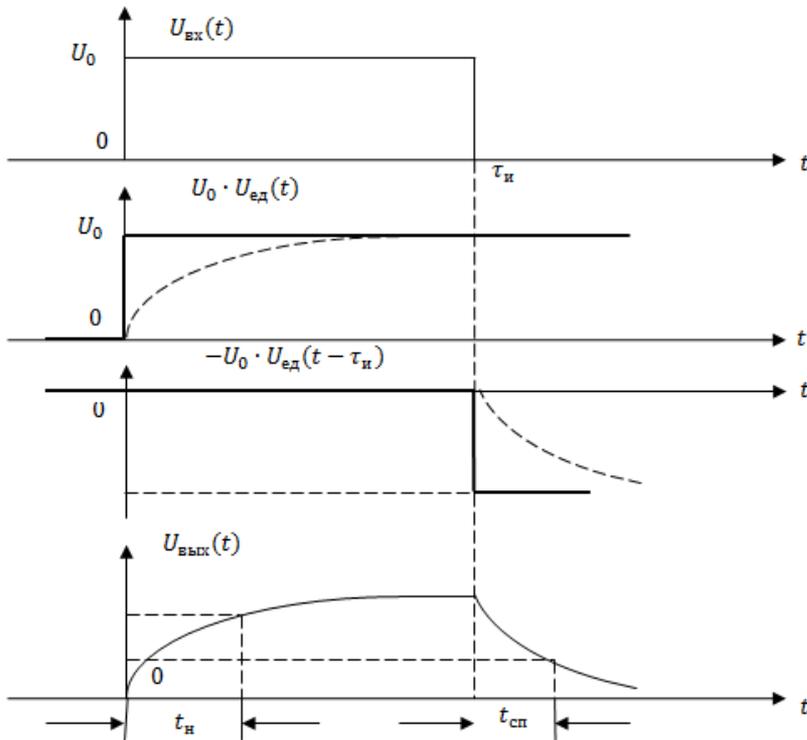


Рис. 6.1. Прямоугольный импульс в виде комбинации двух ступенчатых функций.

На рис. 6.1 изображен прямоугольный импульс в виде комбинации двух ступенчатых функций вида . Тогда, подставляя (6.1) и выражение для импульсной характеристики в выражение для интеграла Дюамеля, можно вычислить . Вместе с тем, так как в качестве сигналов, формирующих прямоугольный импульс выступают единичные функции, а реакция линейной цепи на единичную функцию

представляет собой переходную характеристику, то выходной сигнал в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_0 g(t), & \text{при } 0 \leq t < \tau_H \\ U_0 g(t) - U_0 g(t - \tau_H), & \text{при } t \geq \tau_H \end{cases}. \quad (6.2)$$

Так как для интегрирующей цепи переходная характеристика

$$g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_u}},$$

то подстановка этого выражения в (6.2) после преобразований приводит к виду

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_u}}), & \text{при } 0 \leq t < \tau_H \\ U_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_u}}) e^{-\frac{t - \tau_H}{T_u}}, & \text{при } t \geq \tau_H \end{cases}. \quad (6.3)$$

На рис. 6.1 (нижняя диаграмма) показана форма импульса на выходе интегрирующей цепи.

Как следует из рисунка, инерционность цепи проявляется в искажении переднего и заднего фронтов. Скорость нарастания и убывания фронтов зависит от постоянной времени цепи T_u . Количественно величину искажений можно оценить, например, временем нарастания t_H и временем спада $t_{\text{сп}}$ соответственно переднего и заднего фронтов до заданного уровня (рис. 6.1).

Время нарастания t_H определяется как время в течение, которого передний фронт импульса достигает значения αU_0 , т.е. выходной сигнал

$$u_{\text{вых}}(t_H) = \alpha_H U_0, \quad (6.4)$$

где α_H – наперед заданное значение (обычно в пределах 0,8 – 0,95).

Тогда из (6.3) и (6.4) при $0 \leq t < \tau_H$ следует уравнение

$$U_0 (1 - e^{-\frac{t_H}{T_u}}) = \alpha_H U_0,$$

решение, которого дает выражение

$$t_H = -T_u \ln(1 - \alpha_H). \quad (6.5)$$

Время спада t_{cn} определяется как время, в течение которого задний фронт импульса достигает значения $\alpha_{cn} U_{max}$, т.е.

$$u_{вых}(t_{cn}) = \alpha_{cn} U_{max}, \quad (6.6)$$

где β – наперед заданное значение (обычно в пределах 0,1 – 0,15),

$$U_{max} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_{II}}{T_u}}\right), \quad (6.7)$$

– значение сигнала на выходе цепи при $t = \tau_{II}$.

Подстановка (6.6) и (6.7) в нижнее выражение (6.3) после преобразований дает

$$e^{-\frac{t_{cn} - \tau_{II}}{T_u}} = \alpha_{cn},$$

откуда следует

$$t_{cn} = \tau_{II} - T_u \ln \alpha_{cn}. \quad (6.8)$$

Знание t_{II} и важно с практической точки зрения. На интервале времени от t_{II} до t_{III} вершину импульса можно считать плоской, что позволяет с минимальными ошибками регистрировать импульсы при передаче цифровых сообщений. Значение же позволяет оценить влияние данного сигнала на соседние (так называемые межсимвольные искажения) и принять меры к их уменьшению.

Кратко остановимся на задаче прохождения прямоугольного импульса через дифференцирующую цепь. Воспользовавшись выражением (6.2) с учетом того, что переходная характеристика дифференцирующего звена

$$g(t) = e^{-\frac{t}{T_u}},$$

получим

$$u_{ex}(t) = \begin{cases} U_0 e^{-\frac{t}{T_u}}, \text{ при } 0 \leq t < \tau_{II} \\ U_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_{II}}{T_u}}\right) e^{-\frac{t}{T_u}}, \text{ при } t \geq \tau_{II} \end{cases}. \quad (6.9)$$

Из выражения (6.9) следует, что на интервале времени от 0 до τ_{II} значение выходного сигнала уменьшается по экспоненте с U_0

до $U_0 e^{\frac{t}{T_u}}$. В момент времени $t = \tau_H$ выходной сигнал скачком изменяется до величины

$$u_{\text{вых}}(\tau_H) = U_0 \left(e^{\frac{\tau_H}{T_u}} - 1 \right). \quad (6.10)$$

Очевидно, форма сигнала на выходе существенно зависит от соотношения между длительностью импульса τ_H и постоянной времени цепи T_u . Как правило, при решении практических задач радиотехники выбирают $\tau_H \gg T_u$.

В этом выражении (6.10) слагаемое $e^{\frac{\tau_H}{T_u}} \ll 1$ и значение сигнала в момент времени τ_H можно полагать равным

$$u_{\text{вых}}(\tau_H) \approx -U_0.$$

Таким образом, при $\tau_H \gg T_u$ выходной сигнал представляет собой совокупность двух остроконечных разнополярных импульсов экспоненциальной формы (рис. 6.2).

Длительность импульсов определяется из условия

$$u_{\text{вых}}(\tau_{\text{вых}}) = \alpha U_0,$$

где α – наперед заданный коэффициент (обычно 0,4 – 0,5). Тогда из верхнего уравнения (6.9) при $t = \tau_{\text{вых}}$ следует

$$\tau_{\text{вых}} = -T_u \ln \alpha. \quad (6.11)$$

При указанном соотношении между τ_H и T_u длительность выходных импульсов $\tau_{\text{вых}}$ оказывается гораздо меньше длительности входного импульса. Поэтому дифференцирующую цепь называют укорачивающей цепью. Выходные импульсы такой цепи используются для формирования последовательности коротких импульсов, для запуска импульсных устройств и при решении ряда других задач радиотехники.

6.2. Преобразование периодических сигналов линейными цепями

Рассмотрим теперь задачу прохождения периодического сигнала через линейные цепи. С подобными задачами приходится сталкиваться. Например, при анализе импульсных радиотехнических систем, в которых в качестве несущего колебания при модуляции используется периодическая последовательность импульсов. В этом случае входной сигнал описывается выражением

$$U_{\text{вх}_n}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}_l}(t-lT), \quad (6.12)$$

где $U_{\text{вх}_l}(t)$ – импульс произвольной формы,

T – период следования импульсов.

При использовании временного метода сигнал на выходе линейной цепи

$$U_{\text{вых}_n}(t) = \int_0^t U_{\text{вх}_l}(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}_l}(\tau-lT) \cdot h(t-\tau) d\tau. \quad (6.13)$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, из (6.13) получим

$$U_{\text{вых}_n}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^t U_{\text{вх}_l}(\tau-lT) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (6.14)$$

Таким образом, задача преобразования периодической последовательности импульсов сводится к задаче преобразования линейной цепью одиночного импульса. Эти задачи были рассмотрены выше.

В ряде радиотехнических задач необходимо найти спектр сигнала на выходе цепи при поступлении на её вход периодической последовательности импульсов. Воспользуемся спектральным методом решения таких задач.

Как известно, в общем случае спектральное представление сигнала на выходе линейной цепи имеет вид:

$$U_{\text{вых}}(j\omega) = K(j\omega) \cdot U_{\text{вх}}(j\omega),$$

При изучении спектральных характеристик периодических сигналов было установлено, что их спектр носит линейчатый характер. Тогда спектр входного сигнала, представленный в комплексной форме в соответствии с (2.16) можно описать следующим образом:

$$U_{\text{вых}_n}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(j\omega_k).$$

Очевидно, и спектр выходного сигнала будет линейчатый:

$$U_{\text{вых}_n}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(j\omega_k) \cdot U_{\text{вх}}(j\omega_k). \quad (6.15)$$

где $K(j\omega_k)$ - значение комплексного коэффициента передачи цепи на частоте ω_k .

С учётом того, что

$$U_{\text{вх}}(j\omega) = U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\varphi_{\text{вх}}(\omega)} \quad \text{и} \quad K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)},$$

где $U_{\text{вх}}(\omega)$ - амплитудный спектр и $\varphi_{\text{вх}}(\omega)$ - фазовый спектр входного сигнала,

$K(\omega)$ - амплитудно-частотная и $\psi(\omega)$ - фазочастотная характеристики линейной цепи, выражение (6.15) можно представить в следующем виде

$$U_{\text{вых}_n}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(\omega_k) \cdot U_{\text{вх}}(\omega_k) \cdot e^{j(\varphi_{\text{вх}_k} + \psi_k)}, \quad (6.16)$$

где $\varphi_{\text{вх}_k} = \varphi(\omega_k)$; $\psi_k = \psi(\omega_k)$ - значения фазовых величин на частоте ω_k , откуда следует, что соответствующие амплитудного и фазового спектров выходного сигнала описываются выражениями

$$U_{\text{вых}_k}(\omega_k) = K(\omega_k) \cdot U_{\text{вх}}(\omega_k), \quad (6.17)$$

$$\varphi_{\text{вых}_k} = \varphi_{\text{вх}_k} + \psi_k, \quad (6.18)$$

которые позволяют вычислить и построить соответствующие спектральные диаграммы.

Если входной периодический сигнал представлен тригонометрическим рядом Фурье (2.8), то выходной сигнал цепи описывается выражением:

$$U_{\text{вых}}(t) \sim U_{\text{вых}}(f_k) = \frac{\alpha_0}{2} \cdot K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{K_{\text{вх}}} \cdot K(\omega_k) \cos(\omega_k t + \varphi_{\text{вх}_k} + \psi_k). \quad (6.19)$$

Обычно, спектральные диаграммы удобно представлять в координатах циклических частот. В этом случае (6.19) принимает вид:

$$U_{\text{вых}}(t) \sim U_{\text{вых}}(f_K) = \frac{\alpha_0}{2} \cdot K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{K_{\text{ex}}} \cdot K(2\pi f_K) \cdot \cos(2\pi f_K t + \phi_{\text{ex}_K} + \psi_K)$$

Спектральные составляющие рассчитываются в соответствии с (6.17) и (6.18).

6.3. Преобразование узкополосных сигналов частотно-избирательными цепями

Выше были рассмотрены некоторые виды модуляции, определяющие тот или иной радиосигнал. В самом общем виде радиосигнал может быть представлен в виде квазигармонического сигнала:

$$U(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] = U(t) \cos \phi(t). \quad (6.20)$$

Как правило, спектр такого сигнала сосредоточен вокруг частоты ω_0 , а его ширина $\Delta\omega \ll \omega_0$. В этом смысле сигнал (6.20) считается узкополосным.

При преобразовании узкополосного сигнала радиотехническими цепями необходимо сохранить закон изменения того параметра сигнала, в котором заложена передаваемая информация. В частном случае это может быть изменение амплитуды (амплитудная модуляция) или частоты (частотная модуляция). Следует отметить, что эти изменения происходят гораздо медленнее изменения несущей частоты. Это особенность радиосигналов позволяет существенно упростить решения задач их преобразования различными узкополосными частотно-избирательными цепями, к которым относятся рассмотренные выше простейшие колебательные контура и активная цепь в виде резонансного усилителя.

Представим огибающую $U(t)$ и текущую фазу $\phi(t)$ сигнала (6.20) следующим образом

$$U(t) = \sqrt{U^2(t) + \hat{U}^2(t)}, \quad (6.21)$$

$$\phi(t) = \arctg \frac{\hat{U}(t)}{U(t)}. \quad (6.22)$$

При анализе преобразования сигнала вида (6.20) частотно-избирательной цепью в качестве $U(t)$ и $\hat{U}(t)$ обычно выступают сигналы, связанные преобразованием Гильберта

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau)}{t - \tau} d\tau; \quad U(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{U}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (6.23)$$

Сигнал $\hat{U}(t)$ называется сопряжённым по Гильберту с сигналом $U(t)$, а преобразование Гильберта физически означает фазовый сдвиг всех составляющих сигнала $U(t)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ в области

положительных и на угол $\frac{\pi}{2}$ в области отрицательных частот.

Очевидно, спектры сигналов $U(t)$ и $\hat{U}(t)$ связаны соотношением

$$\hat{U}(j\omega) = \begin{cases} -jU(j\omega), & \text{при } \omega > 0, \\ jU(j\omega), & \text{при } \omega < 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

Возвратимся к выражениям (6.21) и (6.22). Эти выражения можно представить как модуль и аргумент некоторого комплексного сигнала

$$\dot{Z}(t) = U(t) + j\hat{U}(t), \quad (6.25)$$

который называется аналитическим сигналом, соответствующим физическому сигналу $U(t)$. Очевидно, физический сигнал $U(t)$ представляет собой вещественную часть аналитического сигнала, т.е. $U(t) = \text{Re}[\dot{Z}(t)]$.

Так как аналитический сигнал является комплексным, его можно представить в следующем виде

$$\dot{Z}(t) = |\dot{Z}(t)| \cdot e^{j \arg \dot{Z}(t)},$$

или с учётом (6.21) и (6.22) в виде выражения

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= U(t)e^{j\varphi(t)} = U(t) \cdot e^{j[\omega_0 t + \phi(t)]} = \\ &= U(t) \cdot e^{j\phi(t)} \cdot e^{j\omega_0 t} = \check{U}(t)e^{j\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где

$$\check{U}(t) = U(t)e^{j\varphi(t)} \quad (6.27)$$

называется комплексной огибающей аналитического сигнала.

Найден спектр аналитического сигнала. Применив к (6.25) прямое преобразование Фурье, получим:

$$Z(j\omega) = U(j\omega) + j\dot{U}(j\omega), \quad (6.28)$$

или с учётом соотношения (6.24)

$$Z(j\omega) = \begin{cases} 2U(j\omega), & \text{при } \omega > 0 \\ 0, & \text{при } \omega < 0 \end{cases}. \quad (6.29)$$

С другой стороны, преобразование Фурье выражения (6.26) даст

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(t) e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \tilde{U}[j(\omega - \omega_0)]. \quad (6.30)$$

Сопоставление (6.29) и (6.30) показывает, что

$$\tilde{U}[j(\omega - \omega_0)] = 2U(j\omega)$$

или что то же самое

$$\tilde{U}(j\omega) = 2U[j(\omega - \omega_0)]. \quad (6.31)$$

Таким образом, с одной стороны, спектральная плотность комплексной огибающей равна удвоенной спектральной плотности физического сигнала, а с другой стороны – сосредоточена в низкочастотной области положительных частот (рис. 6.2). Это позволяет заменить задачу анализа преобразования узкополосного сигнала частотно-избирательной цепью задачей анализа преобразования комплексной огибающей аналитического сигнала некоторой эквивалентной цепью, частотные характеристики которой также располагаются в низкочастотной области. Такая цепь получила название низкочастотного эквивалента частотно-избирательной цепи.

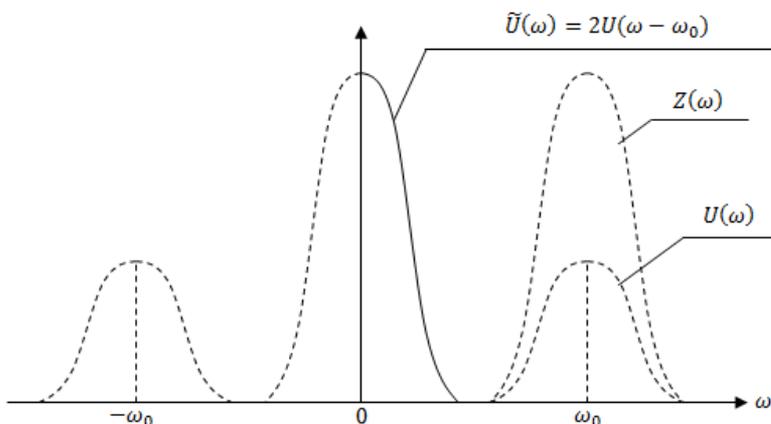


Рис. 6.2. Спектральная плотность комплексной огибающей.

Найдём характеристики низкочастотного эквивалента резонансного усилителя малых сигналов. Представим комплексный коэффициент передачи в виде

$$K[j(\omega - \omega_0)] = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + j \frac{2Q_{\text{экв}}}{\omega_p} \cdot (\omega - \omega_p)}. \quad (6.32)$$

Введем обозначения

$$\Omega = \omega - \omega_p \quad \text{и} \quad T_{\text{ц}} = \frac{2Q_{\text{экв}}}{\omega_p}.$$

Тогда (6.32) можно представить следующим образом

$$K_{\text{нч}}(j\Omega) = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + j\Omega T_{\text{ц}}}. \quad (6.33)$$

Но (6.33) представляет собой комплексный коэффициент передачи интегрирующей цепи. Таким образом, низкочастотным эквивалентом резонансного усилителя, т.е. цепи второго порядка, является интегрирующая цепь, т.е. цепь первого порядка. Это существенно упрощает определения комплексной огибающей на выходе низкочастотного эквивалента.

На рис. 6.3. изображены графики АЧХ и ФЧХ частотно-избирательной цепи и её низкочастотного эквивалента (сплошные кривые в низкочастотной области). Очевидно, что импульсная характеристика низкочастотного эквивалента

$$h_{\text{нч}}(t) = \frac{R_{\text{экв}}}{T_{\text{ц}}} e^{-\frac{t}{T_{\text{ц}}}}. \quad (6.34)$$

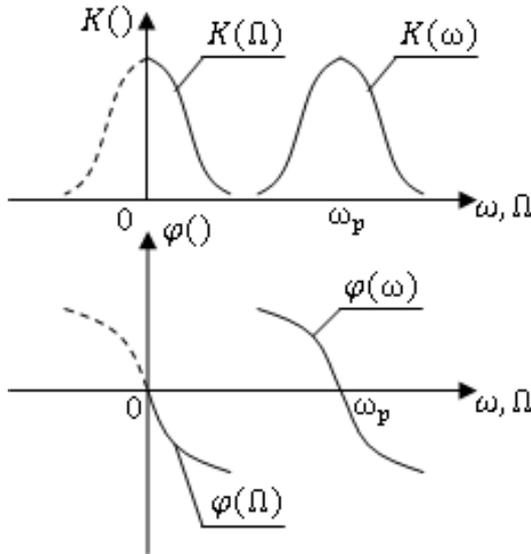


Рис. 6.3. Графики АЧХ и ФЧХ частотно-избирательной цепи и её низкочастотного эквивалента.

Перейдём к рассмотрению задачи преобразования узкополосного сигнала частотно-избирательной цепью. Пусть на вход цепи с резонансной частотой ω_p поступает сигнал

$$U_{\text{ex}}(t) = U_{\text{ex}} \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi_{\text{ex}}(t)].$$

В общем случае частота несущего колебания ω_0 не совпадает с резонансной частотой цепи, т.е. имеет место расстройка

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_p.$$

Тогда входной сигнал можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} U_{\text{ex}}(t) &= U_{\text{ex}} \cdot \cos[\omega_p t + \Delta\omega t + \varphi_{\text{ex}}(t)] = \\ &= U_{\text{ex}} \cdot \cos[\omega_p t + \theta_{\text{ex}}(t)] \end{aligned} \quad (6.35)$$

где

$$\theta_{\text{ex}}(t) = \Delta\omega t + \varphi_{\text{ex}}(t). \quad (6.36)$$

Поскольку частотно-избирательная цепь является избирательной цепью, на её выходе также будет иметь место квазигармонический сигнал вида

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t) \cdot \cos[\omega_p t + \varphi_{\text{вых}}(t)]. \quad (6.37)$$

Аналитические сигналы, соответствующие входному и выходному сигналам

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}}(t) &= \ddot{U}_{\text{вх}}(t) e^{j\omega_p t}, \\ \dot{Z}_{\text{вых}}(t) &= \ddot{U}_{\text{вых}}(t) e^{j\omega_p t}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

где $\ddot{U}_{\text{вх}}(t)$ и $\ddot{U}_{\text{вых}}(t)$ - комплексные огибающие.

Ввиду того, что физический сигнал (6.37) представляет вещественную часть аналитического сигнала (6.38), т.е.

$$U_{\text{вых}}(t) = \text{Re}[\ddot{U}_{\text{вых}}(t) e^{j\omega_p t}], \quad (6.39)$$

то для его нахождения необходимо определить комплексную амплитуду $\ddot{U}_{\text{вых}}(t)$. Комплексная огибающая, как подчёркивалось выше, представляет собой реакцию низкочастотного эквивалента цепи на комплексную огибающую входного аналитического сигнала. Эту задачу можно решить либо спектральным методом, либо методом интеграла наложения.

В соответствии со спектральным методом

$$Z_{\text{вых}}(j\omega) = K(j\omega) \cdot Z_{\text{вх}}(j\omega).$$

С другой стороны, с учётом (6.30) и (6.32), имеем

$$\ddot{U}_{\text{вых}}(j\Omega) = K(j\Omega) \cdot \ddot{U}_{\text{вх}}(j\Omega). \quad (6.40)$$

Применяя к (6.40) обратное преобразование Фурье, можно найти $\ddot{U}_{\text{вых}}(t)$ и, в соответствии с (6.39), - физический выходной сигнал $U_{\text{вых}}(t)$.

Что касается метода интеграла наложения, то комплексная огибающая выходного аналитического сигнала определяется следующим образом

$$\ddot{U}_{\text{вых}}(t) = \int_0^t \ddot{U}_{\text{вх}}(\tau) \cdot h_{\text{нч}}(\tau) d\tau, \quad (6.41)$$

где $h_{\text{нч}}(\tau)$ - импульсная характеристика низкочастотного эквивалента цепи.

6.4 Прохождение АМ колебания через частотно-избирательные цепи

Исследование производится для случая, когда модулирующее напряжение синусоидально. Мгновенное значение модулированного напряжения может быть выражено так:

$$\begin{aligned}
 u(t) = U_m [1 + m \sin(\Omega t + \gamma)] \sin(\omega t + \psi) = \\
 U_m \sin(\omega t + \psi) + \frac{mU_m}{2} \cos[(\omega + \Omega)t + \psi + \gamma] + \\
 + \frac{mU_m}{2} \cos[(\omega - \Omega)t + \psi - \gamma],
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

где $m = \Delta U_m / U_m$ – коэффициент модуляции напряжения; U_m и ΔU_m – амплитуда и максимальное изменение амплитуды высокочастотного напряжения; ω , Ω и ψ , γ – круговые частоты и начальные фазы высокочастотного и низкочастотного напряжений.

Из полученных выражений следует, спектр АМ напряжения состоит из трёх высокочастотных составляющих: несущей частоты ω и двух боковых частот $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$, симметрично расположенных относительно несущей. Амплитуды напряжений боковых частот

одинаковы и равны
$$U_{\sigma} = mU_m / 2.$$

Фазы напряжений боковых частот симметричны относительно фазы несущего напряжения; в момент $t = 0$ одно напряжение боковой частоты отстаёт на угол γ , другое – на этот же угол опережает напряжение несущей частоты. Следовательно, АМ сигналу свойствен закон симметрии в отношении частот, амплитуд и фаз. При нарушении этой симметрии в АМ сигнале возникают искажения формы огибающей.

При прохождении последовательного колебательного контура составляющие АМ колебания претерпевают изменения по амплитуде и по фазе. Это связано с зависимостью комплексного коэффициента передачи контура по напряжению K от частоты ω :

$$K = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \tag{6.43}$$

$$K(\omega) = \frac{K_p}{\sqrt{1 + (2Q\Delta\omega / \omega_p)^2}}, \quad (6.44)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(2Q\Delta\omega / \omega_p) + \varphi_0. \quad (6.45)$$

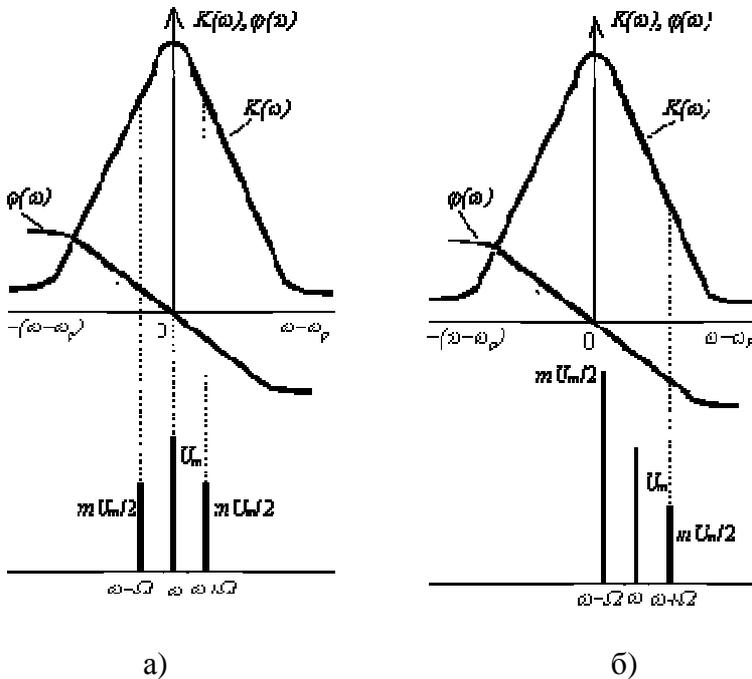


Рис. 6.4. Зависимость модуля $K(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ коэффициента передачи контура от частоты. Спектры АМ напряжения при $\omega = \omega_p$ (а) и $\omega \neq \omega_p$ (б).

На рис. 6.4 изображены зависимости модуля $K(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ коэффициента передачи последовательного контура от частоты ω , построенные по формулам (6.44) и (6.45).

При подаче на вход контура напряжения $u(t)$ с несущей частотой ω , равной резонансной частоте ω_p (рис. 5.1а), амплитуды напряжений боковых частот $\omega_p \pm \Omega$ будут одинаково ослаблены по отношению к несущей в соответствии (6.44) на величину коэффициента ослабления

$$K(\omega_p \pm \Omega) / K_p = 1 / \sqrt{1 + (2Q\Omega / \omega_p)^2}.$$

(6.46)

Здесь $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – модуль и фаза комплексного коэффициента передачи;

K_p – резонансное значение коэффициента передачи, равное добротности контура Q ;

$\Delta\omega/\omega_p = (\omega - \omega_p)/\omega_p$ – относительная расстройка контура;

ω_p – резонансная частота;

φ_0 – постоянный фазовый сдвиг, которым в дальнейшем пренебрегаем для упрощения задачи.

Из формулы (6.46) следует, что для боковых частот коэффициент передачи контура в $\sqrt{1 + (2Q\Omega/\omega_p)^2}$ раз меньше коэффициента передачи для несущей частоты.

Кроме того, напряжения боковых частот получают дополнительные сдвиги фаз относительно напряжения несущей частоты на величину

$$\varphi(\omega_p \pm \Omega) = -\text{arctg}(2Q\Omega/\omega_p). \quad (6.47)$$

Мгновенное значение АМ напряжения на выходе настроенного контура, на основании (5.1- 5.4), записывается в виде:

$$U_{\text{вых}}(t) = QU_m [1 + m' \sin(\Omega t + \gamma + \varphi)] \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (6.48)$$

где

$m' = m / \sqrt{1 + (2Q\Omega/\omega_p)^2}$ – коэффициент модуляции АМ напряжения на выходе контура.

Из сравнения (6.42) и (6.48) следует, что дополнительные, одинаковые по величине, но разные по знаку сдвиги фаз напряжений боковых частот относительно напряжения несущей частоты вызывают только сдвиг фазы, огибающей входное напряжение по отношению к выходному, что не имеет особого практического значения. Однако изменение соотношения амплитуд напряжений боковых и несущей частот приводит к уменьшению коэффициента модуляции на величину

$$D = m'/m. \quad (6.49)$$

Величина D – фактор демодуляции, характеризующий степень уменьшения коэффициента модуляции АМ напряжения на выходе контура. Из соотношения коэффициента модуляции АМ напряжения на

выходе контура, а также на рис. 6.4а видно, что уменьшение коэффициента модуляции будет тем больше, чем больше добротность Q и чем выше частота модуляции Ω .

Из выражения (6.48) следует, что при прохождении через настроенный контур симметрия амплитуд и фаз не нарушается, поэтому искажений формы огибающей АМ напряжения не происходит, а имеются лишь частные искажения входного АМ напряжения.

При расстройке контура относительно несущей частоты $\omega \neq \omega_p$, напряжения боковых частот получают изменения амплитуды и разные величины дополнительных фазовых сдвигов (рис. 6.4б). Закон симметрии при этом нарушается, и, кроме изменения коэффициента модуляции, возникают искажения формы огибающей АМ напряжения – она становится отличной от синусоидальной. Это приводит к возникновению нелинейных искажений управляющего сигнала после детектирования (появлению новых частот модуляции).

При расстроенном контуре возможно как уменьшение, так и увеличение коэффициента модуляции – в зависимости от степени расстройки контура и частоты управляющего сигнала (рис. 6.4б).

Все вышеприведённые рассуждения справедливы для выходного напряжения контура, снимаемого с любого из реактивных элементов (L и C), только при достаточно большой добротности ($Q > 10$) и при малых расстройках.

6.4.1 Расчётно-практическое задание

Для заданного в табл. 6.1 АМК и резонансного контура определить глубину модуляции M' и фактор демодуляции D для частот модуляции $F = 1F_0, 2F_0, 5F_0$. Определить параметры RLC цепи по формулам:

$$L = \frac{\delta}{2\pi f_p}; C = \frac{1}{2\pi f_p \delta}; R = \frac{\delta}{Q}. \quad (6.50)$$

Таблица 6.1

Параметры АМК и резонансного контура

№ варианта	Несущая частота, f_0 , кГц	Частота модуляции, F_0 , кГц	Коэффициент модуляции, М	Резонансная частота контура, f_p , кГц	Характеристика сопротивления, δ , Ом	Добротность контура, Q
1	51	1,2	0,9	51	500	50
2	54	2	0,8	54	600	60
3	56	1,5	0,7	56	400	40
4	58	1,3	0,8	58	300	50
5	50	1,4	0,9	50	1000	50
6	53	1,6	0,7	53	700	70
7	55	1,7	0,8	55	400	80
8	57	1,8	0,9	57	300	60
9	50	1,4	0,8	50	1200	80
10	52	1,1	0,7	52	900	90
11	55	1,5	0,8	55	750	75
12	59	1,6	0,9	59	600	50
13	60	1,9	0,8	60	800	40
14	52	1,3	0,9	52	800	80
15	55	1,8	0,7	55	1200	60
16	47	1,7	0,8	47	750	75
17	40	1,5	0,9	40	1000	50
18	43	1,9	0,7	43	900	60
19	45	1,2	0,9	45	850	85
20	48	1,6	0,8	48	600	60

6.4.2 Компьютерный практикум

1. Собрать в программе NI Multisim рабочую схему (рис. 6.5) для исследования прохождения АМ-колебаний через частотно-избирательные цепи. Установить параметры R, L, C в соответствии с рассчитанными значениями в пункте 6.4.1.

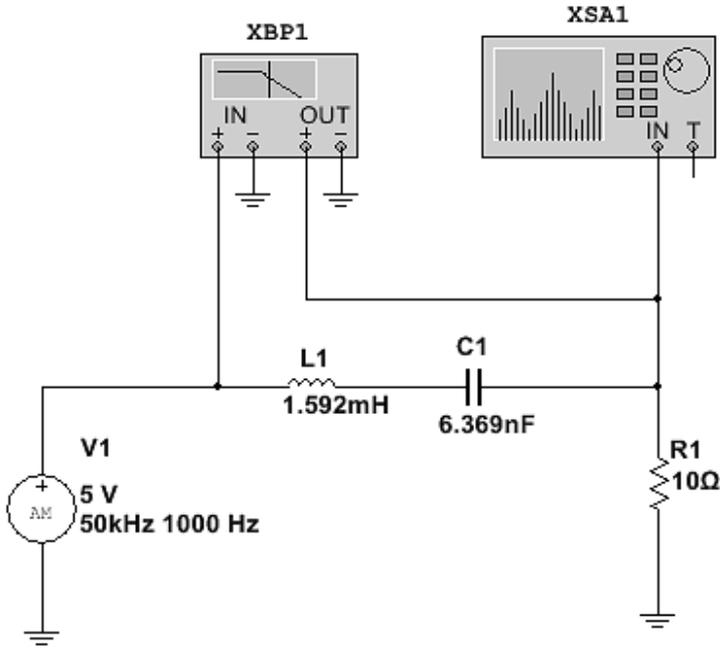


Рис. 6.5. Рабочая схема для исследования прохождения АМК через RLC-колебательный контур. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $M=0,8$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

Элементы R, L, C доступны по команде **Вставить/Компонент** и находится в База данных: **Основная, Раздел: Basic**.

V1 – источник АМ-колебаний, доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в База данных: **Основная, Раздел: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE** под именем **AM_VOLTAGE**.

XBP1 - плоттер Боде, доступен по команде **Моделирование/Приборы/Плоттер Боде**;

XSA1 – анализатор спектра, доступен по команде *Моделирование/Приборы/Анализатор спектра*.

2. Используя **Плоттер Бode XBP1**, измерить резонансную частоту контура и ширину полосы пропускания по уровню -3дБ. Определить реальную добротность контура по формуле $Q=f_{рез.}/\Pi_{-3дБ}$, где $\Pi_{-3дБ} = f_{верх.-3дБ} - f_{нижн.-3дБ}$ – полоса пропускания контура по уровню -3дБ. (см. пример на рис. 6.6).

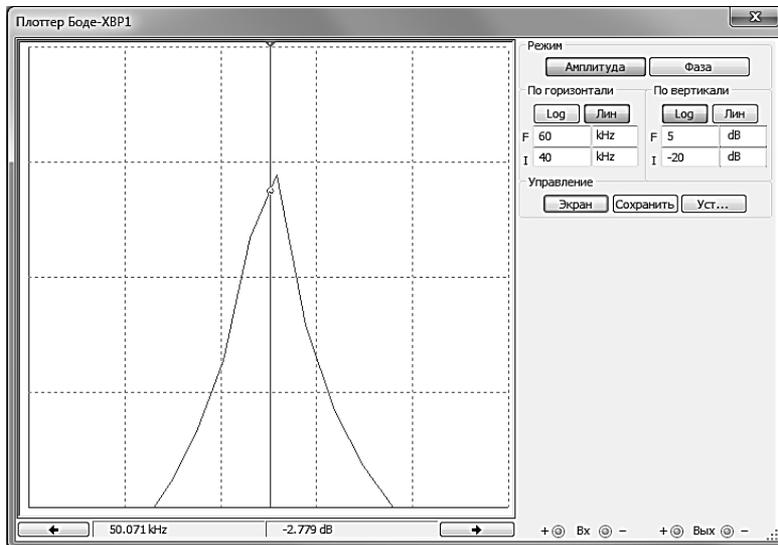


Рис. 6.6. АЧХ последовательного RLC-колебательного контура: $L1=1,592$ мГн; $C1=6,369$ нФ; $R1=10$ Ом, $\delta=500$ Ом.

3. Установить параметры источника АМ-колебаний **V1**, в соответствии с заданием.

4. Используя **Анализатор спектра XSA1** (см. пример на рис. 6.7) и **Анализ Фурье** измерить амплитуды и фазы гармоник сигнала.

По формуле

$$M' = 2U_{f_0 \pm F_0} / U_{f_0}$$

определить коэффициент модуляции на выходе контура и по формуле (6.49) рассчитать фактор демодуляции D.

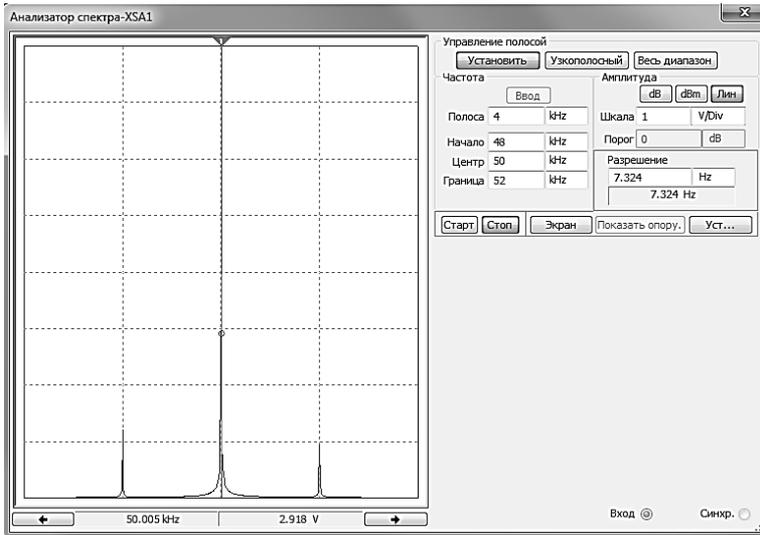


Рис. 6.7. Спектр на выходе RLC последовательного контура: $L_1=1,592$ мГн; $C_1=6,369$ нФ; $R_1=10$ Ом; $\delta=500$ Ом. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $M=0,8$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

5. Повторить пункты 3, 4 для частот модуляции $F = 2F_0$ и $F = 5F_0$.
6. Изменить параметры источника АМ-колебаний **V1**: увеличить несущую частоту f_0 АМК на 1 кГц, установить частоту модуляции $F = F_0$.
7. Используя **Анализатор спектра XSA1** и **Анализ Фурье** измерить амплитуды и фазы гармоник сигнала.
8. Повторить пункты 6, 7 для частот модуляции $F = 2F_0$ и $F = 5F_0$.
9. Увеличить несущую частоту f_0 АМК на 2 и 5 кГц и повторить пункты 7, 8.
10. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

6.5 Прохождение ЧМ колебания через частотно-избирательные цепи

При ЧМ неравномерность амплитудно-частотной и кривизна фазочастотной характеристик контура оказывают более сложное влияние на параметры выходного колебания. Даже при гармонической модуляции частоты спектр колебания обычно содержит очень большое число пар боковых частот. Нарушение нормальных амплитудных и фазовых соотношений между отдельными парами боковых частот приводит к искажению закона модуляции даже при полной симметрии характеристик цепи относительно несущей частоты колебания.

При ЧМ влияние цепи может выразиться:

а) в искажении закона изменения мгновенной частоты и мгновенной фазы колебания;

б) в изменении амплитуды полезного частотного отклонения в зависимости от частоты модуляции Ω ;

в) в возникновении паразитной АМ.

Рассмотрим воздействие ЭДС, частота которой изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_h \cos \Omega t, \quad (6.51)$$

на резонансную колебательную цепь. Амплитуду ЭДС считаем строго постоянной, так что ЭДС можно представить выражением

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t). \quad (6.52)$$

Комплексный коэффициент передачи цепи обозначим через

$$K(i\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}. \quad (6.53)$$

Примерный вид модуля $K(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ для обычной резонансной цепи изображён на рис. 6.8а. Так как перед $\varphi(\omega)$ выбран знак плюс, то фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ имеет отрицательный наклон в полосе прозрачности цепи. Частотный спектр и график изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ входной ЭДС показаны на рис. 6.8б, в.

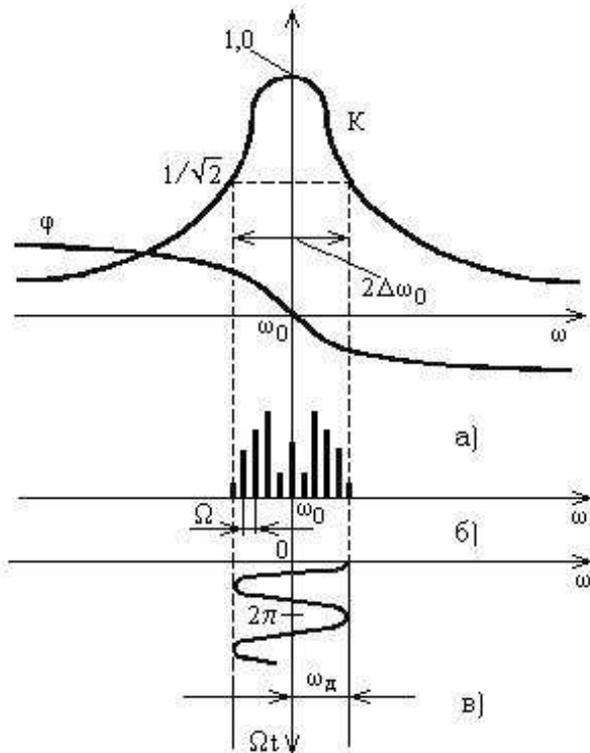


Рис. 6.8. Прохождение ЧМК через избирательные цепи:
 а) – АЧХ и ФЧХ контура; б) – спектр ЧМК,
 в) – закон изменения частоты

Амплитуда выходного напряжения изменяется – по закону

$$U_{\text{вых}}(t) = E_0 K(\omega) = E_0 K(\omega_0 + \omega_d - \cos \Omega t), \quad (6.54)$$

а мгновенная частота – по закону

$$\omega_{\text{вых}}(t) = d\psi / dt + d\varphi / dt, \quad (6.55)$$

где $\psi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t$ – полная фаза ЭДС на входе цепи;

$\varphi(\omega)$ – аргумент коэффициента передачи цепи; при $\omega = \omega(t)$ является функцией времени.

6.5.1 Расчётно-практическое задание

Для заданного в табл. 6.1 ЧМК и резонансного контура определить параметры RLC цепи по формулам:

$$L = \frac{\delta}{2\pi f_p}; C = \frac{1}{2\pi f_p \delta}; R = \frac{\delta}{Q}. \quad (6.56)$$

Таблица 6.2

Параметры ЧМК и резонансного контура

№ варианта	Несущая частота, f_0 , кГц	Частота модуляции, F_0 , кГц	Индекс модуляции, m	Резонансная частота контура, f_p , кГц	Добротность контура, Q	Характеристическое сопротивление, δ , Ом
1	51	1,0	2	51	20	200
2	54	2,0	1	54	10	300
3	56	1,5	2	56	15	300
4	58	1,0	3	58	20	500
5	60	3,0	1	60	15	450
6	63	2,0	2	63	20	600
7	65	1,0	3	65	18	360
8	67	3,0	2	67	12	240
9	70	2,0	3	70	8	400
10	72	2,5	2	72	20	400
11	75	1,5	3	75	25	750
12	78	2,0	2	78	15	600
13	80	3,0	1	80	20	600
14	82	1,0	3	82	25	500
15	85	2,0	2	85	15	750
16	87	3,0	3	87	10	200
17	90	1,5	3	90	20	600
18	93	1,0	3	93	25	750
19	95	2,0	2	95	20	400
20	97	3,0	1	97	10	300

6.5.2 Компьютерный практикум

1. Собрать в программе NI Multisim рабочую схему (рис. 6.9) для исследования АЧХ последовательного RLC-колебательного контура. Установить параметры R, L, C в соответствии с рассчитанными значениями в пункте 6.5.1.

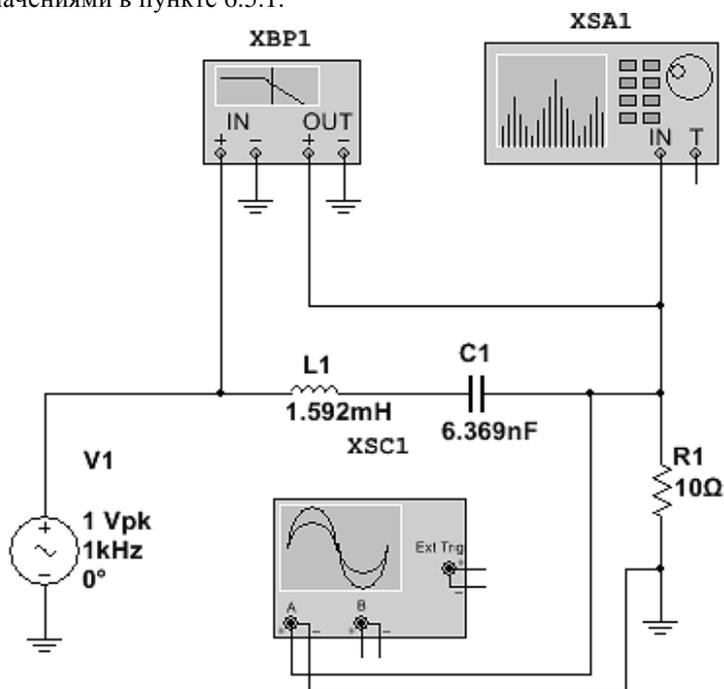


Рис. 6.9. Рабочая схема для оценки параметров последовательного RLC-колебательного контура. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $m=2$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

Элементы R, L, C доступны по команде **Вставить/Компонент** и находится в **База данных: Основная, Раздел: Basic**.

V1 – источник переменного напряжения, доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в **База данных: Основная, Раздел: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE** под именем **AC_VOLTAGE**.

XBP1 – плоттер Боде, доступен по команде **Моделирование/Приборы/Плоттер Боде**;

XSA1 – анализатор спектра, доступен по команде **Моделирование/Приборы/Анализатор спектра**;

XSC1 – осциллограф, доступен по команде **Моделирование/Приборы/Осциллограф**.

2. Используя **Плоттер Бode ХВР1** и меню параметров, измерить резонансную частоту контура и ширину полосы пропускания по уровню -3дБ. Определить реальную добротность контура по формуле $Q=f_{рез.}/\Pi_{-3дБ}$, где $\Pi_{-3дБ} = f_{верх.-3дБ} - f_{нижн.-3дБ}$ – полоса пропускания контура по уровню -3дБ. (см. пример на рис. 6.10).

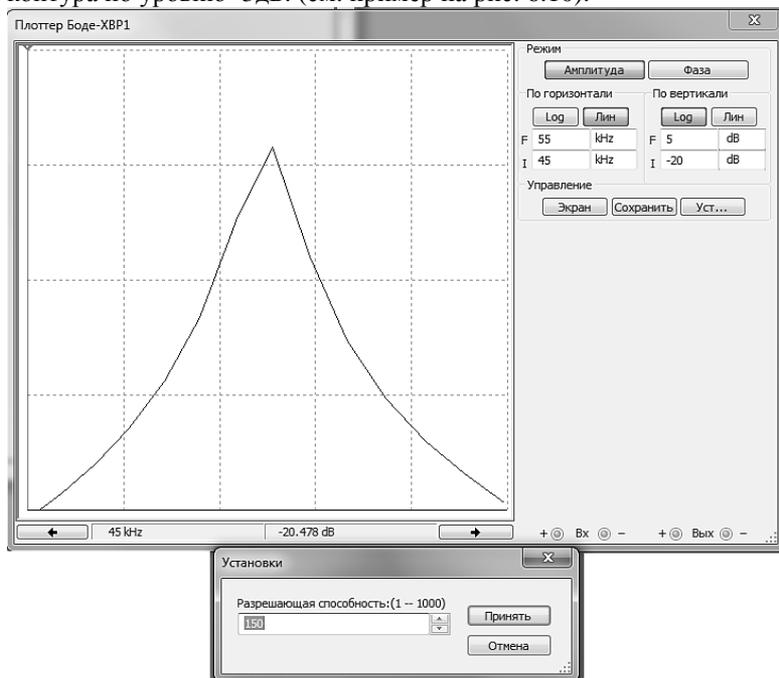


Рис. 6.10. АЧХ последовательного RLC-колебательного контура: $L1=1,592$ мГн; $C1=6,369$ нФ; $R1=10$ Ом, $\delta=500$ Ом.

3. Заменить источник переменного напряжения **V1** на источник ЧМ-колебаний, который доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Source, Семейство SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **FM_VOLTAGE**. Рабочая схема для исследования прохождения ЧМК через последовательный RLC-колебательный контур показана на рис. 6.11.

4. Установить параметры источника ЧМК, в соответствии с вариантом, табл. 6.2.

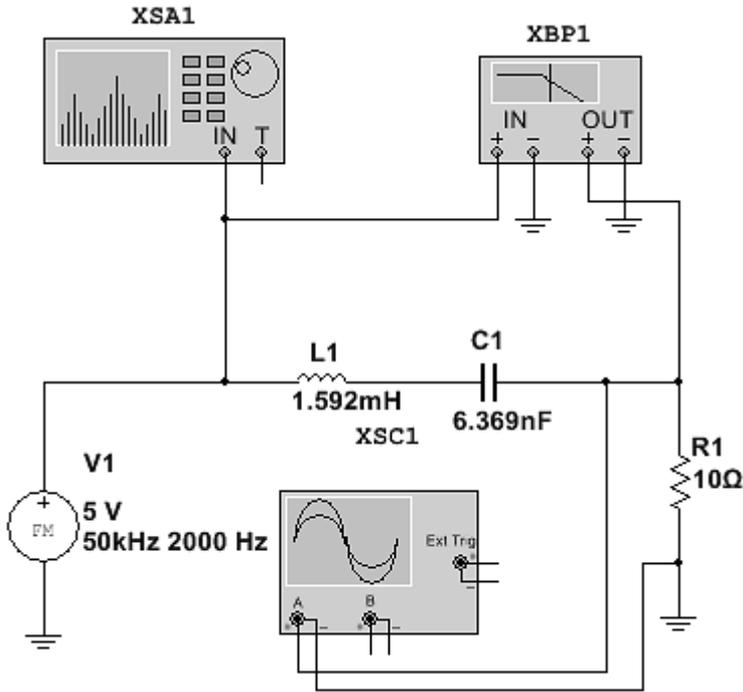


Рис. 6.11. Рабочая схема для исследования прохождения ЧМК через RLC-колебательный контур. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $m=2$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

5. Используя **Анализатор спектра XSA1** измерить амплитуды и фазы несущей и пяти верхних и нижних боковых гармоник (см. пример на рис. 6.12).

6. Используя **Осциллограф XSC1** оценить частоту и коэффициент паразитной АМ (см. пример на рис. 6.13) по формуле

$$M_{\text{пар}} = \frac{A_{\text{макс}} - A_{\text{мин}}}{A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}}}$$

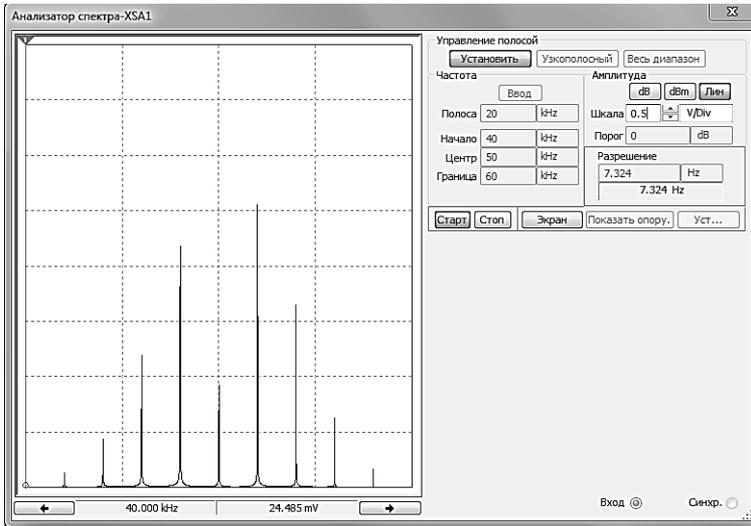


Рис. 6.12. Спектр сигнала на выходе RLC-колебательного контура. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $m=2$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

Из приведенной на рис. 6.13 осциллограммы видно, что в ЧМК присутствует паразитная амплитудная модуляция с полупериодом 154,265 мкс, что соответствует частоте **3,2 кГц**, и коэффициентом $M_{\text{пар}} = (2,014 - 0,908512) / (2,014 + 0,908512) = \mathbf{0,378}$.

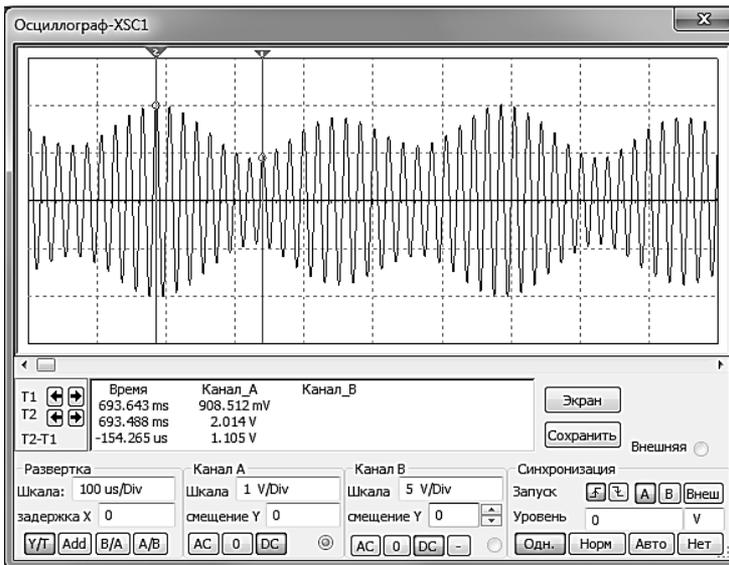


Рис. 6.13. Осциллограмма сигнала на выходе RLC-колебательного контура. Пример для параметров варианта: $f_0=50$ кГц; $F_0=2$ кГц; $m=2$; $f_p=50$ кГц; $\delta=500$ Ом; $Q=50$.

7. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

6.6 Исследование характеристик линейных систем

Исследование характеристик линейных систем проведем на примере активных RC-фильтров.

Существует много способов построения фильтров с заданной передаточной функцией n -го порядка. Один популярный способ заключается в том, чтобы представить передаточную функцию в виде произведения сомножителей H_1, H_2, \dots, H_m и создать схемы или звенья, или каскады N_1, N_2, \dots, N_m , соответствующие каждому сомножителю. Наконец, эти звенья соединяются между собой каскадно (выход первого является входом второго и т. д.), как изображено на рис. 6.14. Если эти звенья не влияют друг на друга и не изменяют собственные передаточные функции, то общая схема обладает требуемой передаточной функцией n -го порядка.

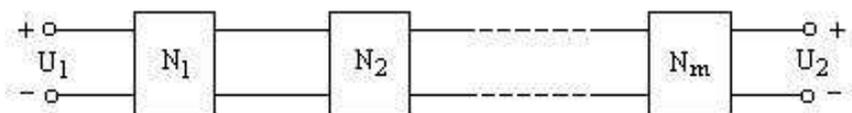


Рис. 6.14. Каскадное соединение звеньев

Ранее было установлено, что ОУ обладает бесконечным входным и нулевым выходным сопротивлениями. Таким образом, его можно использовать для реализации не взаимодействующих звеньев.

Для фильтров первого порядка передаточная функция представляется в виде

$$V_2 / V_1 = P(s) / (s + C), \quad (6.57)$$

где C – постоянное число, а $P(s)$ – полином первой или второй степени. Для фильтров второго порядка передаточная функция

$$V_2 / V_1 = P(s) / (s^2 + Bs + C), \quad (6.58)$$

где B и C – постоянные числа, а $P(s)$ – полином второй или меньшей степени.

Для четного порядка $n > 2$ обычная каскадная схема содержит $n/2$ звеньев второго порядка, каждое с передаточной функцией типа (6.58). Если же порядок $n > 2$ является нечетным, то схема содержит $(n-1)/2$ звеньев второго порядка с передаточными функциями типа (6.57) и одно звено первого порядка с передаточной функцией типа (6.58).

Для фильтров, описываемых уравнением (6.59), определим *собственную частоту*

$$\omega_p = \sqrt{C} \quad (6.60)$$

и *добротность*

$$Q_p = \sqrt{C} / B. \quad (6.61)$$

Таким образом, можно переписать уравнение (7.2) в виде

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{KC\omega_c^2}{s^2 + (\omega_p / Q_p)s + \omega_p^2}. \quad (6.62)$$

Для фильтра нижних частот второго порядка с частотой среза ω_c типовая полиномиальная передаточная функция имеет следующий вид:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{KC\omega_c^2}{s^2 + B\omega_c s + C\omega_c^2}. \quad (6.63)$$

Постоянные В и С представляют собой нормированные коэффициенты. Для фильтров Баттерворта и Чебышева эти коэффициенты приведены в табл. 6.3. Постоянная К определяет коэффициент усиления, который, конечно, также необходимо точно задать.

Для фильтров более высокого порядка уравнение (6.61) описывает передаточную функцию типового звена второго порядка, где К – коэффициент его усиления; В и С – коэффициенты звена, приведенные в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Нормированные значения коэффициентов В и С фильтров Чебышева 4-го порядка

$D_{a_{\max}}$, дБ	В	С
0.5	0.350706	1.063519
	0.846680	0.356412
1.0	0.279072	0.986505
	0.673739	0.279398
2.0	0.209775	0.928675
	0.506440	0.221568
3.0	0.170341	0.903087
	0.411239	0.195980

На рис. 6.15 приведена широко распространенная схема фильтра нижних частот второго порядка, реализующая неинвертирующий (положительный) коэффициент усиления. Эта схема иногда называется *фильтром на ИНУН*, поскольку ОУ и два подсоединенных к

нему резистора R_3 и R_4 образуют источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН).

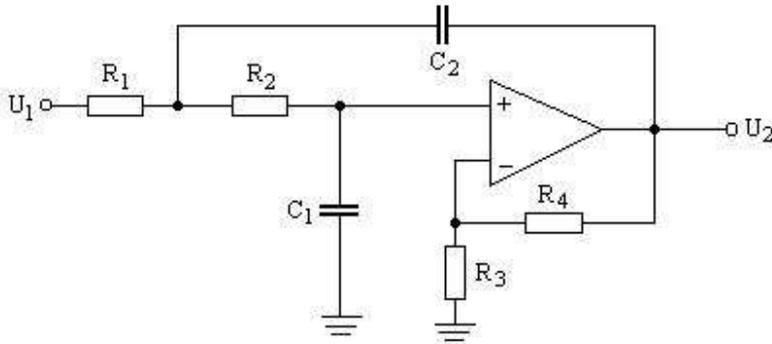


Рис. 6.15. Схема фильтра нижних частот на ИНУН второго порядка

Эта схема реализует функцию фильтра нижних частот второго порядка (7.6) с параметрами:

$$\left. \begin{aligned} C\omega_c^2 &= 1/R_1R_2C_1C_2 \\ B\omega_c &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2C_1} (1-\mu); \\ K &= \mu = 1 + R_4/R_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Величина $\mu \geq 1$ представляет собой коэффициент усиления ИНУН, а также и коэффициент усиления фильтра. Удовлетворяющие уравнению (6.64) значения сопротивлений определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 2 / \left[BC_2 + \sqrt{B^2 + 4C(K-1)} \cdot C^2 - 4CC_1C_2 \right] \omega_c; \\ R_2 &= 1 / CC_1C_2R_1\omega_c^2; \\ R_3 &= K(R_1 + R_2) / (K - 1), (K \neq 1); \\ R_4 &= K(R_1 + R_2), \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

где значения C_1 и C_2 выбираются. Сопротивления R_3 и R_4 задаются таким образом, чтобы минимизировать смещение по постоянному току ОУ.

Если требуется $K = 1$, то значения R_1 и R_2 также определяются из (6.65), но в этом случае получаем $R_3 = \infty$ (разомкнутая цепь) и $R_4 = 0$ (короткозамкнутая цепь). Для минимизации смещения по постоянному току должно выполняться условие $R_4 = R_1 + R_2$, но в большинстве некритических применений будет достаточно короткозамкнутая цепь. В этом случае ИНУН работает как *повторитель* напряжения, т. е. его выходное напряжение равно входному или *повторяет* его.

Для функции фильтра нижних частот второго порядка амплитудно-частотная характеристика будет иметь максимальное значение K_m , расположенное на частоте f_m при условии, что $B^2/C < 2$. Вид такой характеристики изображен на рис. 6.16а, а значения K_m и f_m определяются следующим образом:

$$K_m = 2CK / B\sqrt{4C - B^2}; \quad (6.66)$$

$$f_m = KC\sqrt{C - (B^2/2)}. \quad (6.67)$$

Подъем амплитудно-частотной характеристики происходит при выполнении условия $Q > 1/\sqrt{2} = 0,707$. Если же $Q \leq 0,707$ (или $B^2/C \geq 2$), то подъем отсутствует и вид характеристики показан на рис. 6.16б. На обоих рисунках f_c – частота среза фильтра, а соответствующее ей значение амплитудно-частотной характеристики равно

$$K_c = KC\sqrt{(C-1)^2 + B^2}. \quad (6.68)$$

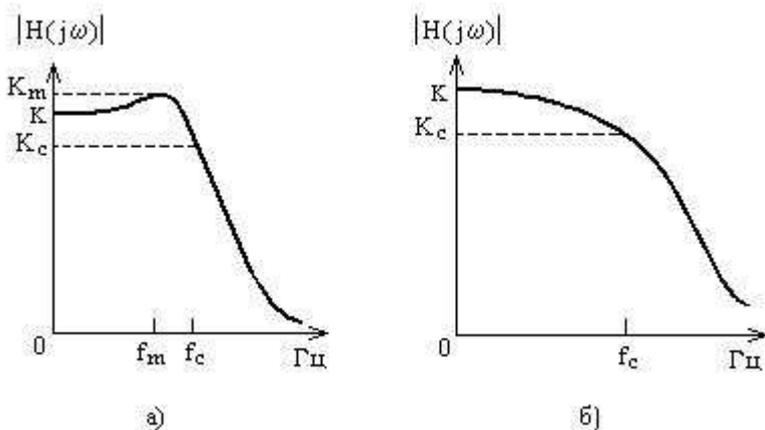


Рис. 6.16. Амплитудно-частотные характеристики фильтра нижних частот: а) - $Q > 0,707$; б) - $Q \leq 0,707$

Для расчета фильтра нижних частот второго порядка или звена второго порядка фильтра Баттерворта или Чебышева более высокого порядка, обладающего заданной частотой среза f_c (Гц), или $\omega_c = 2\pi f_c$ (рад/с), и коэффициентом усиления K , необходимо выполнить следующие шаги:

1. Найти нормированные значения коэффициента B и C из табл. 6.3.
2. Выбрать номинальное значение емкости C_2 (предпочтительно близкое к значению $10/f_c$, мкФ) и номинальное значение емкости C_1 , удовлетворяющее условию

$$C_1 \leq [B^2 + 4C(K-1)]C_2 / 4C$$

(предпочтительно наибольшее возможное номинальное значение). Если $K > 1$, вычислить значения сопротивлений:

$$R_1 = \frac{2}{[BC_2 + \sqrt{[B^2 + 4C(K-1)]C_2^2 - 4CC_1C_2}] \omega_c};$$

$$R_2 = 1 / CC_1C_2R_1\omega_c^2;$$

$$R_3 = K(R_1 + R_2) / (K - 1);$$

$$R_4 = K(R_1 + R_2).$$

Если же $K=1$, то сопротивления R_1 и R_2 имеют значения, как определено выше, а сопротивления R_3 и R_4 заменяются соответственно на разомкнутую и короткозамкнутую цепи.

3. Выбрать номинальные значения сопротивлений как можно ближе к вычисленным значениям и реализовать фильтр или его звенья второго порядка в соответствии со схемой, показанной на рис. 6.7.

6.6.1 Расчётно-практическое задание

По данным табл. 6.4 рассчитать фильтр нижних частот Чебышева 4-го порядка.

Таблица 6.4

Исходные данные для расчета ФНЧ Чебышева

№ варианта	Частота среза, f_0 , кГц	Макс. неравно- мерность АЧХ, $D_{a_{max}}$, дБ	Коэффициент усиления, K
1	1.0	3	2
2	1.2	2	3
3	1.5	1	4
4	1.6	3	3
5	1.8	2	5
6	2.0	1	2
7	2.2	2	4
8	2.5	3	2
9	2.7	2	3
10	3.0	3	4
11	3.3	2	2
12	3.5	1	3
13	3.8	2	5
14	4.0	3	2
15	4.2	2	4
16	4.5	1	2
17	4.7	3	3
18	5.0	2	4
19	5.2	3	2

По формулам (6.66) и (6.67) определить максимальный коэффициент передачи и частоту максимума для первого и второго звена.

6.6.2 Компьютерный практикум

1. Собрать в программе NI Multisim рабочую схему (рис. 6.17) для исследования активного ФНЧ 4-го порядка. Сохранить проект под именем **4FLF**.

Элементы R, C доступны по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Basic*;

U1 – операционный усилитель, доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Source, Семейство: SIGNAL_VOLTAGE_SOURCE* под именем **AC_VOLTAGE**;

V1 – источник переменного напряжения, доступен по команде **Вставить/Компонент** и находится в *База данных: Основная, Раздел: Analog, Семейство: Выбрать все семейства* под именем **OP27FZ**;

XBP1 - плоттер Боде, доступен по команде **Моделирование/Приборы/Плоттер Боде**.

2. Установить параметры R, C активного ФНЧ фильтра в соответствии с рассчитанными значениями в пункте 6.6.1.

3. Используя **Плоттер Боде XBP1**, определить частоту среза f_c (по уровню -3дБ) и сравнить с рассчитанной в п. 6.61. Определить максимальную неравномерность АЧХ в полосе пропускания $D_{a_{\max}}$ и сравнить с заданной в варианте задания.

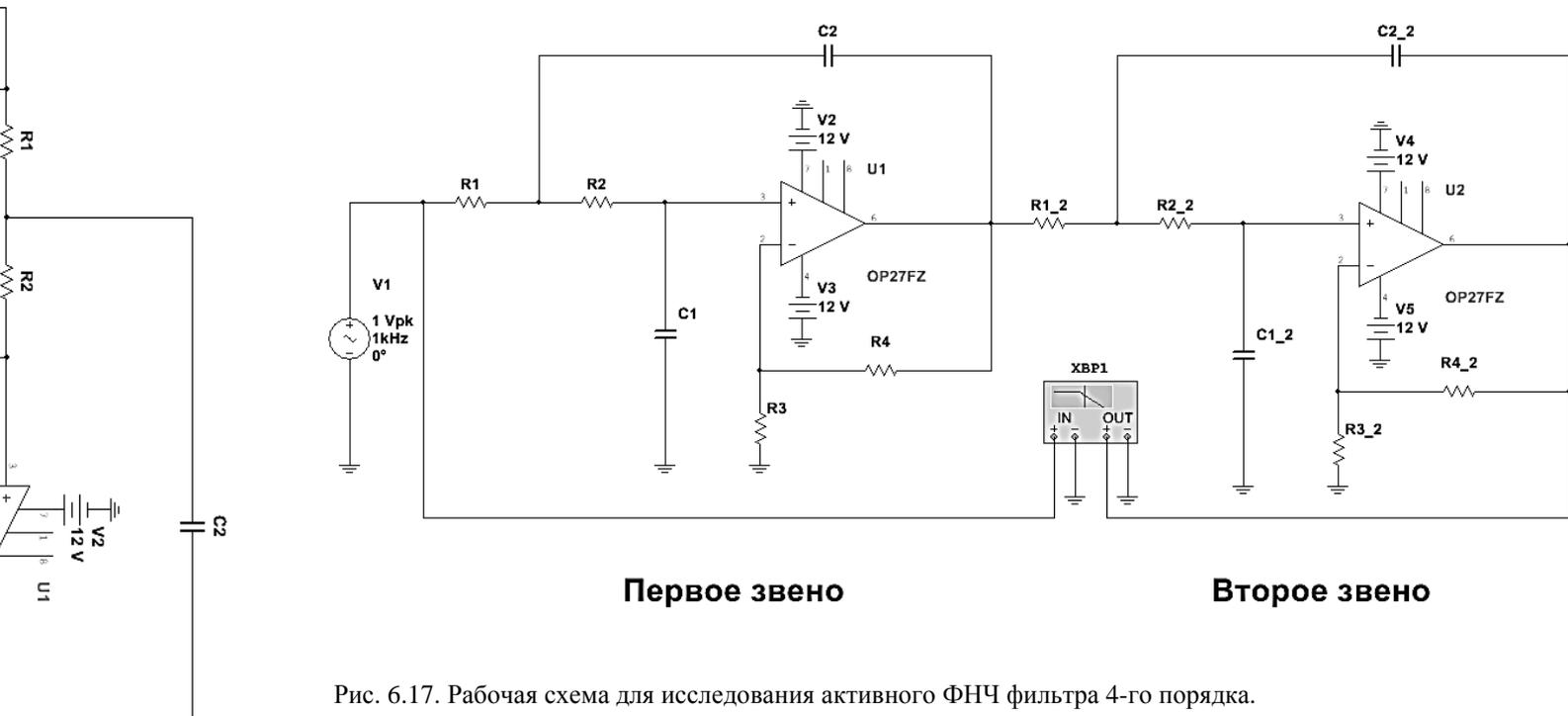


Рис. 6.17. Рабочая схема для исследования активного ФНЧ фильтра 4-го порядка.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются радиосигналами?
2. Запишите аналитическое выражение для АМ сигналов в случае модуляции одним или несколькими колебаниями.
3. Как рассчитывается ширина спектра АМ сигналов?
4. Как принято определять ширину полосы пропускания узкополосных радиотехнических цепей? На сколько децибел ослабляется сигнал на частоте, соответствующей границе полосы пропускания?
5. Дайте определение абсолютной и относительной расстройкам.
6. Как и зачем осуществляется неполное включение колебательного контура во внешнюю цепь?
7. В чем проявляется влияние внутреннего сопротивления электронного прибора на характеристики резонансного усилителя? Как можно ослабить возникающий вредный эффект?
8. Дайте определение постоянной времени колебательного контура и оцените ее влияние на прохождение АМ сигнала через контур.
9. Объясните причины линейных искажений сигналов.
10. Поясните условия неискаженного прохождения АМ сигналов через линейные цепи.
11. Объясните, как следует выбирать полосу пропускания резонансного усилителя для удовлетворительного в техническом отношении пропускания АМ сигналов.
12. Объясните принцип построения векторных диаграмм АМ сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медиченко М. П., Литвинов В. П. - Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Издательство МГОУ, 2011.
2. Шестеркин А. Н. Система моделирования и исследования радиоэлектронных устройств Multisim 10. – М.: ДКМ Пресс, 2012. – 360 с.
3. Введение в Multisim. Трёхчасовой курс. URL: <http://ni.com/russia>
4. Радиоежегодник 2013. Схемотехническое моделирование. Выпуск 23. стр. 141.
5. Т. В. Гордяскина, С. В. Лебедева. Моделирование радиотехнических цепей и сигналов в программной среде Multisim. Н. Новгород: Издательство ФГОУ ВПО «ВГАВТ», 2010.
6. Резников Б. Л. Программный комплекс Multisim 10 в учебном процессе. - М.: МГТУ ГА, 2010.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7. С. И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2000.
8. И. С. Гоноровский, М. П. Демин. Радиотехнические цепи и сигналы – М.: Радио и связь, 1994.
9. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебные пособия для ВУЗов/ под ред. К. А. Самойло – М.: Радио и связь, 1982.
10. С. И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство по решению задач. – М.: Высшая школа, 2002.
11. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи / под ред. И. С. Гоноровского. – М.: Радио и связь, 1989.
12. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания/ под ред. А. Н. Яковлева. – М.: Инфа-М, изд-во НГТУ, 2003г.
13. Multisim. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств / Марк Е. Хернитер. – М.: ДМК. Пресс 2006, 492 с.
14. Кирина М. Фомина К. Программа схемотехнического моделирования Multisim.