СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи

- ***Схемотехническое моделирование*** (СхМ) понимается в узком смысле, как моделирование элементарных процессов в электронных устройствах, традиционно изображаемых в виде принципиальных электрических схем.
- **Цель СхМ** состоит в определении формы и параметров сигналов тока и напряжения, возникающих в разных точках схемы.
- СхМ электрических процессов учитывает реальные физические ограничения в элементарных процессах — т.н. законы сохранения.

1. Постановка задачи

- *Ограничениями* являются первый и второй законы Кирхгофа. Они вытекают из законов сохранения заряда и работы и называются **законами электрического равновесия**.
- В *математическую модель электронного устройства* в СхМ входят не только модели отдельных элементов и уравнения их связи, но и уравнения электрического равновесия, составляемые на основе законов Кирхгофа и называемые **топологическими уравнениями**.

1. Постановка задачи

- *Уравнения отдельных элементов* схемы

называются компонентными.

- *Математическая модель* для СхМ в общем случае состоит из двух подсистем уравнений — **компонентной** и **топологической**.

2. Моделирование статических режимов
2.1 Прямой метод

- *Для расчета статического режима* используют несколько форм исходных математических моделей.
- *Наиболее распространена* модель в виде системы конечных (не дифференциальных) линейных или нелинейных уравнений

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

- Составление модели схемы в виде (1) и ее последующее решение каким-либо численным методом получило название **прямого метода расчета статического режима**.

2.1 Прямой метод

- Для решения системы (1) можно использовать метод простых итераций:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda \cdot F\left(x^{(k)}\right) \qquad (2)$$

, где k — номер итерации; λ — множитель, регулирующий сходимость.

2.1 Прямой метод

- **Главный недостаток этого алгоритма** — медленная сходимость, поэтому вместо (2) для решения (1) обычно используют различные модификации метода Ньютона:

$$F'\left(x^{(k)}\right)\cdot\Delta x^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right) \qquad (3)$$

$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ — вектор поправки;

$F\left(x^{(k)}\right)$ — вектор невязок;

$F'\left(x^{(k)}\right)$ — матрица Якоби.

2.1 Прямой метод

- Решая (3) при заданном начальном приближении $x^{(0)}$ относительно $\Delta x^{(0)}$, находим затем $x^{(1)} = \Delta x^{(0)} + x^{(0)}$, далее, вновь решая (3) относительно $\Delta x^{(1)}$, определим $x^{(2)}$ и т.д. до сходимости.

2.2 Метод движущейся области сходимости

- Для *повышения надежности* сходимости методов решения системы (1) часто применяется специальный прием — метод **движущейся области сходимости**.
- *В этом методе система* $F(x)=0$ заменяется эквивалентной системой $F(x,v)=0$, где $v \in (v_{мин}, v_{макс})$ выбирается так, что решение $x^{(0)}$ системы $F(x,v_{мин})=0$ известно, а $F(x, v_{макс})\equiv F(x)$.
- *Однократное решение системы* (1) заменяется серией решений с изменяющимся от решения к решению параметром v.

2.2 Метод движущейся области сходимости

- *Для удобства описания этого метода* введем оператор $\underset{x}{A\lg}\, F(x)$, обозначающий решение системы $F(x)=0$ любым численным методом, и оператор $\underset{x}{a\lg}\, F(x)$, обозначающий результат одной итерации.
- Тогда метод ДОС можно записать в виде:

$$\boxed{x_{p+1} = \underset{x}{A\lg}\, F(x_p, v_{p+1})} \qquad \boxed{p=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;} \qquad (4)$$

$$\boxed{v_{p+1} = f(v_p)} \qquad \boxed{v_0 = v_{мин}} \qquad v_n = v_{макс} \qquad (5)$$

p — номер промежуточного решения (продолжения или шага).

2.2 Метод движущейся области сходимости

- В этом методе, если $x_p \in \delta\, x_p$, где $\delta\, x_p$ — область сходимости около точки x_p, то возмущение параметра $\Delta v_p = v_{p+1} - v_p$ передвигает область сходимости и выполняется условие $x_{p+1} \in \delta\, x_{p+1}$.

2.3 Метод установления

- В этом методе *статический режим рассматривается* как состояние схемы, к которому она стремится асимптотически при затухании переходных процессов, возникающих в схеме при подаче на нее напряжения источника питания.
- Этот метод называется расчетом статики через динамику.
- *Математическая реализация* этого метода требует составления и решения не системы (1), а системы диф. уравнений, описывающих переходные процессы в схеме при включении напряжения питания.

2.3 Метод установления

- **Преимущества**: Алгоритм составления математической модели и расчета статического режима мало отличается от алгоритма составления модели и расчета переходного процесса. Благодаря этому сокращается объем и время разработки программы расчета статики и динамики.
- *Метод установления допускает* достаточно произвольный выбор начальных условий $x^{(0)}$.

2.4 Метод оптимизации

- *Расчет статического режима* выполняется не только для расчета статистических параметров схемы, но часто с целью определения начальных условий для расчета переходных процессов.
- Метод установления *позволяет* без дополнительных преобразований схемы определить начальные значения ее потенциалов с учетом всех реактивных элементов.

2.4 Метод оптимизации

- Этот метод основан на эквивалентности результатов решения схемы (1) прямыми методами и минимизации какого-либо из функционалов:

$$\boxed{\Phi_1(x) = \sum_i F_i^2(x)}$$

$$\boxed{\Phi_2(x) = \sum_i \left| F_i(x) \right|}$$

$$\boxed{\Phi_3(x) = \max_i \left| F_i(x) \right|} \qquad (6)$$

хорошо отработанными методами оптимизации.

2.4 Метод оптимизации

- *При этом количество решений системы* (1) равно количеству минимумов в (6).
- Отсюда следует, что *локальные методы оптимизации можно использовать для расчета статического режима схем с одним состоянием равновесия* (ключи, усилители и т.д.)

3. Моделирование переходных процессов
3.1 Явная форма модели

- Наиболее распространены две формы представления исходной модели схемы для расчета переходных процессов — явная и неявная.
- Явная форма в общем случае состоит из двух подсистем:

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} = F_{1i}(x, v, w,),} \qquad j=1, \ldots, n; \qquad (7\ \text{а})$$

$$\boxed{F_{2j}(x, v, w,) = 0,} \qquad j=1, \ldots, n; \qquad (7\ \text{б})$$

3.1 Явная форма модели

- здесь x — вектор переменных u_c, i_L реактивных элементов, называемых переменными состояниями; v — вектор постоянных и времязависимых источников E, I; w — вектор переменных u, i линейных и нелинейных резистивных элементов.
- Подсистема (7 а) — это система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, разрешенных относительно производных. Такая система называется **нормальной системой** ОДУ.
- Подсистема (7 б) — это система конечных, в общем случае нелинейных уравнений.
- Методика получения нормальной формы ОДУ состоит из двух этапов.

3.1 Явная форма модели

- Пусть имеется система топологических и компонентных уравнений, причем компонентными уравнениями реактивных элементов служат дифференциальные зависимости:

$$\boxed{i_c = c\frac{du_c(t)}{dt}} \qquad \boxed{u_L(t) = L\frac{d_{iL}(t)}{dt}} \qquad (8)$$

3.1 Явная форма модели

- **Тогда первый этап** методики заключается в том, что на основе законов Кирхгоффа переменные i_c, u_L выражаются через токи и напряжения остальных ветвей.

$$\boxed{i_c = f_1(\underset{i_R, i_E, i_L, \ldots}{\text{остальные\_переменные}})} \qquad (9\ \text{а})$$

$$\boxed{u_L = f_2(\underset{u_R, u_I, u_c, \ldots}{\text{остальные\_переменные}})} \qquad (9\ \text{б})$$

3.1 Явная форма модели

- **На втором этапе** i_c и u_L заменяются производными в соответствии с (8), а остальные переменные с помощью комбинирования законов Кирхгоффа и компонентных уравнений выражаются через u_c и i_L.
- В результате получим нормальную систему:

3.1 Явная форма модели

- **На первом этапе** выполняются следующие действия:
- *Составляется топологический граф схемы*, каждой ветви которого задается произвольное направление;
- *Строится т.н. нормальное дерево графа*;
- Для этого в состав дерева последовательно включаются все независимые и зависимые источники напряжения E, $u(i)$, затем емкости C, сопротивления R и, если необходимо, индуктивности L;
- *Для построения нормального дерева составляется топологическая система* всех контурных уравнений и уравнений сечений;

3.1 Явная форма модели

- *Из полученной системы* выделяется подсистема вида (9), включающая контурные уравнения, образованные индуктивными хордами, и уравнения сечений, образованные емкостными ветвями.
- **Ветвями** называются ребра графа, вошедшие в его дерево, а **хордами** — ребра, не вошедшие в дерево.
- На втором этапе с помощью оставшихся топологических уравнений и компонентных уравнений из системы вида (9) окончательно формируется нормальная система ОДУ.

3.2 Организация расчета модели схемы в явной форме

- *Расчет переходных процессов* с помощью модели схемы в явной форме (9) требует решения двух принципиально различных по характеру систем уравнений: системы конечных уравнений (9 б) для расчета квазистатического режима и системы дифференциальных уравнений (9 а) для расчета переменных состояния u_c, i_L.
- *Организация вычислений* для системы (9) заключается в поочередном решении систем (9 а) и (9 б). Пусть из расчета статического режима известны начальные значения u_{co}, i_{Lo} переменных состояния и w_o резистивных переменных.

3.2 Организация расчета модели схемы в явной форме

Тогда:

- *Подставляя* u_{c0}, i_{L0}, w_0 в систему ОДУ (7.21а) и решая ее любым численным методом, определяем значения u_{c1}, i_{L1};
- *Считая* u_{c1}, i_{L1} постоянными источниками напряжения и тока, рассчитываем квазистатический режим схемы, т.е. решаем систему конечных уравнений (7.21б) и определяем вектор $w_1=w(t_1)$ токов и напряжений нелинейных и резистивных элементов.
- *После этого опять выполняем* пункт 1.

3.3 Неявная форма математической модели

- Вторая форма представления динамической модели схемы — неявная. В общем случае она имеет вид:

$$\boxed{F_i\left(\frac{dx(t)}{dt}, \int x(t)dt, x(t)\right) = 0} \qquad (10)$$

3.3 Неявная форма математической модели

- *Далее вместо производных и интегралов* подставляются их конечно-разностные аппроксимации, соответствующие тем или иным формулам численного дифференцирования и интегрирования:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx f_{\partial}\left(x_{n+1}, x_n, \ldots x_{n-k}\right)} \qquad (11\ а)$$

$$\boxed{\int_a^b x(t)dt \approx f_u\left(x_{n+1}, x_n, \ldots x_{n-k}\right)} \qquad (11\ б)$$

3.3 Неявная форма математической модели

- Таким образом, от исходной системы (10) переходим к системе конечно-разностных алгебраических уравнений:

$$\boxed{F_i\left(x_{n+1}, x_n, \ldots x_{n-k}\right) = 0} \qquad i=1, \ldots, p \qquad (12)$$

- *Замена производных и интегралов* по (11) аппроксимирующими конечно-разностными формулами называется **дискретизацией компонентных уравнений** емкости и индуктивности, а подстановка этих формул в (10) и получение системы (12), не содержащей производных, называется **алгебраизацией**.

3.3 Неявная форма математической модели

- *Составленная модель* (12) далее решается относительно x_{n+1} какими-либо численными методами решения конечных уравнений, обычно методом Ньютона:

$$\boxed{F'\left(x_{n+1}^{(k)}, x_n, \ldots x_{n-k}\right)\Delta x_{n+1}^{(k)} = -F\left(x_{n+1}^{(k)}, x_n, \ldots x_{n-k}\right)} \qquad (13)$$

где $\Delta x_{n+1}^{(k)} = x_{n+1}^{(k+1)} - x_{n+1}^{(k)}$ — вектор поправок; $F'(\cdot)$ — матрица Якоби;

k — индекс ньютоновских итераций.

3.3 Неявная форма математической модели

- *После вычисления с заданной точностью* значений x_{n+1} полагаем $x_n = x_{n+1}$, $x_{n-1} = x_n$, и т.д., т.е. сдвигаем рассчитываемые точки на один шаг по оси автоматного времени и снова решаем (13) относительно нового значения x_{n+1}.
- *Этот процесс повторяется до тех пор*, пока не будет пройден заданный интервал времени t.

4. Моделирование частотных характеристик

- *Амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ) определяется как отношение:

$$F(jw) = \frac{u_{вых}(jw)}{u_{вх}(jw)}$$

где *j(w)* — комплексная частота.

- Существуют различные способы расчета АЧХ.

4. Моделирование частотных характеристик

- **Аналитические способы** основаны н вычислении АЧХ как отношения полиномов:

$$F(jw) = \frac{M(jw)}{N(jw)} = \frac{a_m (jw)^m + a_{m-1}(jw)^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n (jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} + \ldots + b_0}$$

- Моделирование АЧХ на ЭВМ основано на трех подходах: символьном, численно-символьном и численном.

4. Моделирование частотных характеристик

- *При символьном подходе программы* составляются так, чтобы вычислить коэффициенты a_i, b_i в виде формул.
- *Наибольшее распространение получил численный подход*, когда АЧХ вычисляется как численное значение $F(jw)$ при разных значениях w, т.е. поточечно.

4. Моделирование частотных характеристик

- *В качестве входного сигнала* используется источник напряжения $E_{вх}(jw)=1\cdot e^{jw}$ с единичной комплексной амплитудой, нулевой начальной фазой и малым внутренним сопротивлением.
- *В базисе узловых потенциалов* этот источник напряжения преобразуется в единичный источник тока $I_{вх}(jw)=1\cdot e^{jw}$ с большой параллельно включенной проводимостью.

4. Моделирование частотных характеристик

- Таким образом при указанном входном сигнале будет верно соотношение

$$\boxed{F(jw) = \frac{u_{вых}(jw)}{E_{вх}(jw)} = u_{вых}(jw)}$$

F(jw) — комплексная АЧХ.

- *Следовательно*, рассчитывая $u_{вых}(jw)$ в любой ветви схемы, мы тем самым рассчитываем АЧХ схемы для этой ветви. *Если один из полюсов ветви* с входным сигналом — земляной, то $E_{вх}=\varphi_{вх}$; тогда вместо $u_{вых}(jw)$ можно рассчитать $\varphi_{вых}(jw)$.

4. Моделирование частотных характеристик

- *Следовательно, рассчитывая* $u_{вых}(jw)$ в любой ветви схемы, мы тем самым рассчитываем АЧХ схемы для этой ветви. *Если один из полюсов ветви* с входным сигналом — земляной, то $E_{вх}=\varphi_{вх}$; тогда вместо $u_{вых}(jw)$ можно рассчитать $\varphi_{вых}(jw)$.

$$\boxed{i_c = jwC(\varphi_{нач} - \varphi_{кон})} \qquad \boxed{i_L = -\frac{j}{wL}(\varphi_{нач} - \varphi_{кон})} \quad (14)$$

где $\varphi_{нач}$, $\varphi_{кон}$ — потенциалы на концах реактивных ветвей; j — мнимая единица; w — частота.

4. Моделирование частотных характеристик

- *Проводимости реактивных ветвей* равны:

$$y_c = jwC, \qquad y_L = -j/(wL) \qquad (15)$$

- Уравнения (14) используются при *формировании вектора узловых токов*, а (15) — матрицы узловых проводимостей. При этом в схеме замещения постоянные источники напряжения *E* закорачиваются, а постоянные источники тока *I* размыкаются.

4. Моделирование частотных характеристик

- В результате получим *узловое уравнение линейной схемы в частотной области*:

$$Y(jw)\cdot\varphi(jw)=-I(jw) \qquad (16)$$

Если интерес *представляет частотная характеристика* в каком-нибудь одном узле схемы k, то на каждой частоте w_i нужно выбирать из вектора $\varphi(jw_i)$ комплексное значение потенциалов $\varphi_k(jw_i)=A_k(w_i)+jB_k(w_i)$ и вычислять точку амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристики в узле k:

$$\varphi_{kАЧХ}(w_i)=\sqrt{A_k^2(w_i)+B_k^2(w_i)} \qquad \varphi_{kФЧХ}(w_i)=arctg\left[\frac{B_k(w_i)}{A_k(w_i)}\right]$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под схемотехническим моделированием?

2. Совокупность каких уравнений образует математическую модель объекта?

3. Что такое базовый набор схемных элементов и как моделируются элементы схемы, не вошедшие в базовый набор?

4. Перечислите известные вам варианты модели биполярного транзистора и области их применения.