ВВЕДЕНИЕ

В современной науки и технике математические методы исследования, моделирования и проектирования играют все большую роль. Это обусловлено совершенствованием вычислительной техники, благодаря которой существенно расширяется возможность успешного применения математики при решении конкретных задач.

Курс математического анализа является фундаментом математического образования экономиста и инженера, имеющим важное значение для успешного изучения общетеоретических (например, физика), специальных (например, электротехника, теория цепей), а также таких дисциплин как «Вычислительная математика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», «Эконометрика», «Математическая экономика», «Экономико-математические методы и модели», предусмотренных учебными планами.

Данный конспект лекций построен в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта России к дисциплине «Математический анализ»

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Основные понятия

Пусть $X=\{x\}$ – произвольное множество действительных чисел.

Множество X называется ограниченным сверху, если существует такое действительное число M, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $x \leq M$.

Множество X называется ограниченным снизу, если существует такое действительное число m, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $x \geq m$.

Множество X называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу одновременно.

Очевидно, что для ограниченного множества X существует такое положительное число M, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $|x| \leq M$.

Окрестностью точки x_0 числовой прямой называется любой интервал $(a;b)$, содержащий эту точку. Произвольная окрестность точки x_0 обозначается символом U_{x_0}.

ε-окрестностью точки x_0 числовой прямой называется интервал $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$, который обозначается $U_{x_0}^{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$. Очевидно, что если $x \in U_{x_0}^{\varepsilon}$, то $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ или $|x-x_0|<E$. Точка x_0 называется центром, а число ε – радиусом ε -окрестности точки x_0.

Проколотой окрестностью или ε -окрестностью точки x_0 называется соответствующая окрестность без самой точки x_0. Проколотые окрестности обозначаются символами: $\overset{0}{U}_{x_0}$ и $\overset{0}{U}{}_{x_0}^{\varepsilon}$.

Внешность любого интервала $(a;b)$ называется окрестностью бесконечности и обозначается символом U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon;\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется Е-окрестностью бесконечности и обозначается символом U_∞^{ε}.

1.2. Предел функции

Пусть y=f(x) определена в U_a или в U_∞.

Число А называется пределом функции y=f(x) при $x\to a$ (a – конечное число), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in \overset{0}{U}{}_{a}^{\delta}$ выполняется условие: $f(x) \in U_A^{\varepsilon}$ или $|f(x)-A|<\varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Число А называется пределом функции y=f(x) при $x\to\infty$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x$\in U_{\infty}^{\delta}$ выполняется условие: f(x)$\in U_{A}^{\varepsilon}$ или |f(x)-A|<ε. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Бесконечность называется пределом функции y=f(x) при x→*a* (*a* – конечное или бесконечное), если для любого положительного числа M существует такое положительное число δ, зависящее от M, что для всех x$\in \overset{0}{U}{}_{a}^{\delta}$ выполняется условие: f(x)$\in U_{\infty}^{M}$ или |f(x)|>M. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Если x→*a* и при этом x>*a*, то говорят, что x стремится к *a* справа и обозначают: x→*a*+.

Если x→*a* и при этом x<*a*, то говорят, что x стремится к *a* слева и обозначают: x→*a*-.

Пределы функции y=f(x) при x→*a*+, x→*a*-, x→+∞. x→-∞ называются односторонними пределами.

Интервалы (*a*-δ;*a*), (*a*;*a*+δ), (-∞;-δ) и (δ;+∞) будем называть соответственно левой и правой δ-окрестностью точки *a* и точки ∞ и обозначать: U_{a-}^{δ}, U_{a+}^{δ}, $U_{-\infty}^{\delta}$ и $U_{+\infty}^{\delta}$.

Теорема 1. (о равенстве односторонних пределов).

Равенства $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ эквивалентны существованию предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. По условию теоремы $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$. Это означает, что для любого положительного числа ε, существуют такие положительные числа δ_1 и δ_2, зависящие от ε, что для всех x$\in U_{a+}^{\delta_1}$ и для всех x$\in U_{a-}^{\delta_2}$ выполняется условие: f(x)$\in U_{A}^{\varepsilon}$. Выберем δ=min(δ_1;δ_2) в случае конечного числа *a* и δ=max(δ_1;δ_2) в случае *a*=∞. Тогда для любого положительного числа ε и для всех x$\in \overset{0}{U}{}_{a}^{\delta}$ выполняется условие: *f(x)*$\in A_{A}^{\varepsilon}$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

1.3. Бесконечно малые и ограниченные функции

Функция *y=f(x)* называется бесконечно малой при x→∞ (здесь и далее *a* – конечное число или бесконечное), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Часто бесконечно малые функции обозначают символами: α(x), β(x), γ(x). Например, функция $y=\dfrac{k}{x}$ является бесконечно малой при x→∞ и любом числе k, так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{k}{x}=0$. Функция y=(x+1)^3 является бесконечно малой при x→-1, так как $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^3=0$.

Функция y=f(x) называется ограниченной при x→*a*, если существует такие положительные числа M и δ, что для всех $x\in U_a^\delta$ выполняется условие: |f(x)|≤M. В противном случае функция называется неограниченной при x→*a*.

Функция y=f(x) называется ограниченной в некоторой области D, если существует такое положительное число M, что для всех x∈D выполняется условие: |f(x)|≤M.

Теорема 2. (о сумме бесконечно малых функций).

Пусть α(x) и β(x) – бесконечно малые функции при x→*a*. Тогда α(x)+β(x) – тоже бесконечно малая функция при x→*a*.

Доказательство. По условию α(x) и β(x) – бесконечно малые функции при x→*a*, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Это означает, что для любого положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ существуют такие положительные числа δ_1 и δ_2, зависящие от ε, что для всех $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_1}$ выполняется условие: $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, а для всех $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$ выполняется условие: $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Получаем, что для всех $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}=\overset{0}{U}{}_a^{\delta_1}\cap\overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$ выполняются оба неравенства: $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $\overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие: |α(x)+β(x)| ≤|α(x)|+|β(x)|< $\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$=ε, а это означает, что $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x))=0$, то есть α(x)+β(x) – бесконечно малая функция при *a*→∞.

Замечание. Теорема выполняется не только для двух, но и для любого конечного числа бесконечно малых функций.

Теорема 3 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел).

Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то функция f(x) является ограниченной при x→*a*. Если при этом A≠0, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ также является ограниченной при x→*a*.

Доказательство. По условию теоремы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Это означает, что для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие |f(x)-A|<ε или A-ε<f(x)<A+ε, откуда следует, что f(x)<A+ε для всех $x \in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$, а это и означает, что функция f(x) ограничена при x→*a*.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Теорема 4 (о произведении бесконечно малой и ограниченной функции).

Пусть функция α(x) – бесконечно малая при x→*a*, а функция f(x) – ограниченная при x→*a*. Тогда функция α(x)·f(x) является бесконечно малой функцией при x→*a*.

Доказательство. По условию теоремы функция α(x) – бесконечно малая, а f(x) ограниченная функция при x→*a*. Это означает, что существуют такие положительные числа M и δ_1, что для всех $x \in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_1}$ выполняется условие: |f(x)|≤M и для любого положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{M}$ существует такое положительное число δ_2, зависящее от ε, что для всех $x \in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$ выполняется условие: $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Выберем $\overset{0}{U}{}_a^{\delta} = \overset{0}{U}{}_a^{\delta_1} \cap \overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$, тогда для всех $x \in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие:

$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, а это и означает, что функция α(x)·f(x) – бесконечно малая при x→*a*.

Следствия:

1. Пусть k – константа, а α(x) – бесконечно малая функция при x→a. Тогда функция k·α(x) является бесконечно малой функцией при x→a.
2. Пусть α(x) и β(x) – бесконечно малые функции при x→a. Тогда функция α(x)·β(x) является бесконечно малой функцией при x→a.
3. Пусть α(x) – бесконечно малая функция при x→a и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$, причем A≠0. Тогда функция $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ является бесконечно малой функцией при x→a.

1.3. Свойства пределов

Лемма. Для того, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, необходимо и достаточно, чтобы f(x) можно было представить в виде: f(x)=A+α(x), где α(x) – бесконечно малая функция при x→a.

Доказательство. Необходимость. Обозначим f(x)-A=α(x). По условию существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Это означает, что для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x$\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие: |f(x)-A|<ε или |α(x)|<ε, то есть α(x) – бесконечно малая функция при x→a.

Достаточность. По условию f(x)=A+α(x), где α(x) – бесконечно малая функция при x→a. Это означает, что для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x$\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие: |α(x)|<ε или |f(x)-A|<ε, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Свойства пределов сформулируем в виде теорем.

Теорема 5

Если f(x)=c, где c – константа, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

Доказательство следует непосредственно из определения предела.

Теорема 6

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то существуют и конечные пределы:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B\,, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B\,, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (при условии B≠0)}, \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = A^{B} \text{ (при условии A≠0 или B≠0)}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Докажем соотношение (1). По лемме f(x)=A+α(x), g(x)=B+β(x), где α(x) и β(x) – бесконечно малые функции при x→*a*.

Тогда f(x)±g(x)=(A+α(x))±(B+β(x))=(A±B)+(α(x)±β(x)), а это означает, что (1) верно, так как α(x)±β(x) – бесконечно малая функция при x→*a*.

Докажем соотношение (2). Аналогично,

f(x)·g(x)=(A+α(x))·(B+β(x))=(A·B)+(B·α(x)+A·β(x)+α(x)·β(x)), а это и означает, что (2) верно, так как B·α(x) +A·β(x)+α(x)·β(x) – бесконечно малая функция при x→*a*.

Соотношение (3) предлагаем аналогично доказать самостоятельно. Соотношение (4) примем без доказательства.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где k – число, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует.

Теорема 7. (о зажатой переменной).

Пусть в некоторой окрестности точки *a* функции f(x), φ(x) и Φ(x) удовлетворяют неравенству φ(x)≤ f(x) ≤Φ(x) и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\Phi(x) = A$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. По условию в некоторой окрестности точки *a* φ(x)≤f(x)≤Φ(x), значит верно неравенство

$$\varphi(x)-A\le f(x)-A\le\Phi(x)-A. \qquad (5)$$

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$ по условию. Это означает, что для любого ε>0 существует $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ такое, что для любого x: $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_1}$ выполняется условие

$$|\varphi(x) - A|<\varepsilon. \qquad (6)$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)=A$. Это означает, что для любого ε>0 существует $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что для любого x: $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$ выполняется условие

$$|\Phi(x)-A|<\varepsilon. \qquad (7)$$

Выберем $\overset{0}{U}{}_a^{\delta}=\overset{0}{U}{}_a^{\delta_1}\cap\overset{0}{U}{}_a^{\delta_2}$, тогда для любого x: $x\in\overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется (6) и (7), то есть $-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon$ и $-\varepsilon<\Phi(x)-A<\varepsilon$. Учитывая (5), выполняется также $-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$ или $|f(x)-A|<\varepsilon$ для любого ε>0 и для любого x: $x\in\overset{0}{U}{}_a^{\delta}$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Теорема 8.

Если $f(x)\geq 0$ ($f(x)\leq 0$) в некоторой окрестности точки *a* и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $A\geq 0$ ($A\leq 0$).

Доказательство. Пусть $f(x)\geq 0$ в некоторой окрестности точки *a*. Предположим противное: A<0. Но тогда $|f(x)-A|\geq A$, следовательно, невозможно для любого ε>0 $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x\to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$. Полученное противоречие доказывает теорему. Случай $f(x)\leq 0$ предлагаем аналогично доказать самостоятельно.

Следствие. Если $\varphi(x)\geq f(x)$ в некоторой окрестности точки *a* и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\geq\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 9.

Если функция f(x) монотонно возрастает и ограничена при $x\to a$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Теорему 9 примем без доказательства.

Теорема 10. (первый замечательный предел).

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, где α(x) бесконечно малая функция при $x\to a$.

Теорема 11. (второй замечательный предел).

$\lim\limits_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$, где α(x) бесконечно малая функция при $x\to a$.

Теоремы 10 и 11 примем без доказательства.

Заметим, что I замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, а II замечательный предел – вида 1^{∞}.

Рассмотрим некоторые примеры, в которых применяются I и II замечательные пределы.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^{-1}=\frac{3}{5}.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}.$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=1.$

Сделаем замену переменной: $a^x-1=y$, $x=\log_a(1+y)$, $y\to 0$ при $x\to 0$. Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\log_a(1+y)}{y}\right)^{-1}=\ln a$. В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$

Гиперболические функции

Гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом называются соответственно следующие функции: $shx=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$, $chx=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$, $thx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, $cthx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$. Для гиперболических функций выполняются следующие тождества: $ch^2x-sh^2x=1$, $ch^2x+sh^2x=ch2x$, $thx=\dfrac{shx}{chx}$, $cthx=\dfrac{chx}{shx}$, $sh2x=2shx\cdot chx$.

Бесконечно большие функции

Функция f(x) называется бесконечно большой при x→*a*, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Теорема 12. (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Для того, чтобы функция f(x) была бесконечно большой при x→*a*, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ была бесконечно малой при x→*a*.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f(x) – бесконечно большая при x→*a*, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Это означает, что для любого $M=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$ существует δ(M)> δ такое, что для любого $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие |f(x)|>M или $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\dfrac{1}{M}$, то есть |α(x)|<ε, а это и означает, что α(x) – бесконечно малая функция при x→*a*.

Достаточность. Пусть функция α(x) – бесконечно малая функция при x→*a*, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Это означает, что для любого $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$ существует δ(ε)>0 такое, что для любого $x\in \overset{0}{U}{}_a^{\delta}$ выполняется условие $|\alpha(x)|<\dfrac{1}{M}$ или $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\dfrac{1}{M}$, то есть |f(x)|>M, а это и означает, что f(x) – бесконечно большая функция при x→*a*.

Заметим, что из последней теоремы следуют пределы: $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{k}{f(x)}=\infty$ и $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\dfrac{k}{f(x)}=0$, где k≠0 – число.

1.4. Сравнение бесконечно малых функций

Бесконечно малые функции α(x) и β(x) при x→*a* называются бесконечно малыми функциями одного и того же порядка малости, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq 0$.

Бесконечно малые функции α(x) и β(x) при x→*a* называются эквивалентными бесконечно малыми функциями, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. При этом обозначают: α(x)~ β(x) при x→*a*.

Например, sinx~ x при x→0, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Бесконечно малая функция α(x) при x→*a* называется бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем бесконечно малая функция β(x) при x→*a*, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. При этом β(x) называется бесконечно малой функцией более низкого порядка, чем α(x) при x→*a*. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$.

Например, бесконечно малая функция $\alpha(x)=\sin^2 x$ при x→0 является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем бесконечно малая функция β(x)=x при x→0, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0$.

Бесконечно малые функции α(x) и β(x) при x→*a* называются несравнимыми, если не существует предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Например, бесконечно малые функции $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при x→∞ являются несравнимыми, так как предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует.

Теорема 13.

Пусть α(x), α_1(x), β(x), β_1(x) – бесконечно малые функции при x→*a*, причем α(x)~α_1(x), β(x)~β_1(x), и пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta_1(x)\alpha_1(x)}{\beta(x)\beta_1(x)\alpha_1(x)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}$.

Теорема 14.

Сумма конечного числа бесконечно малых функций при x→*a* различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство. Пусть α_1(x), α_2(x), …, α_n(x) бесконечно малые функции при x→*a*, причем α_1(x) – более низшего порядка, чем остальные. Вычислим предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\ldots+\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}=$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}+\ldots+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}$ =1+0+…+0=1, а это и означает, что α_1(x)+α_2(x)+ …+α_n(x)~ α_1(x) при x→*a*.

Пример. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin x+tg^3x}$ заметим, что по теореме 14 5x+6x^2~5x и sin+tg^{3}x~sinx при x→0. Тогда по теореме 13 получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin x+tg^3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-1}$=5.

1.5. Непрерывность функции

Функция y=f(x) называется непрерывной в точке *a*, если она определена в некоторой окрестности этой точки, существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Точка *a* при этом называется точкой непрерывности функции y=f(x).

Заметим, что условие $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ можно записать в виде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$, так как $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Таким образом при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции. Например,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Классификация точек разрыва

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого числового множества, называется непрерывной на этом числовом множестве.

Точка, которая не является точкой непрерывности функции, но принадлежит области её определения, либо является граничной точкой области её определения, называется точкой разрыва функции.

Точка разрыва *a* функции y=f(x) называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. При этом разность h= $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ - $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ называется скачком функции f(x) в точке *a*.

Точка разрыва *a* функции f(x) называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ не существует или равен бесконечности.

Точка *a* разрыва первого рода функции y=f(x) называется точкой устранимого разрыва, если $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ =A. В этом случае функцию можно доопределить до непрерывности, положив f(*a*)=A. Функция $F(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a \\ A, x = a \end{cases}$ является непрерывной в точке *a*.

Отметим, без доказательства два свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке a, то в точке a непрерывны также функции $\varphi(x)\pm\psi(x)$ и $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Если, кроме того, $\psi(a)\neq 0$, то в точке a непрерывна функция $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

2. Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке a, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(a)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.

Заметим, что первое свойство справедливо для любого конечного числа функций, непрерывных в точке a.

Свойства функций непрерывных на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она определена на этом отрезке, непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, и на концах интервала непрерывна соответственно слева и справа, то есть выполняются условия: $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$.

Теорема 15 (Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют такие числа m и M, что $m\leq f(x)\leq M$ для любого $x\in[a;b]$.

Теорема 16 (Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений, то есть существуют такие числа x_1, $x_2\in[a;b]$, что для любого $x\in[a;b]$ выполняется условие $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$.

Теорема 17 (Больцано-Коши).

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах различные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, существует такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=C$.

Следствие. Если в условиях теоремы 17 A и B имеют разные знаки, то существует такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=0$.

Контрольные вопросы

1. Окрестность и ε – окрестность точки.
2. Окрестность и ε – окрестность бесконечности.
3. Ограниченное и неограниченное множество.
4. Верхняя и нижняя границы множества.
5. Верхняя и нижняя грани множества.
6. Внутренняя, изолированная, граничная точка множества.

7. Граница множества.
8. Предел функции.
9. Геометрический смысл предела функции.
10. Свойства предела функции.
11. Односторонние пределы.
12. Бесконечно малая функция.
13. Бесконечно большая функция.
14. Ограниченная функция.
15. Свойства бесконечно малых и ограниченных функцией.
16. Сумма бесконечно малых функций.
17. Произведение бесконечно малой и ограниченной функций.
18. Произведение бесконечно малой функции и функции, имеющей конечный предел.
19. Первый замечательный предел.
20. Второй замечательный предел.
21. Определения и свойства гиперболических функций.
22. Основные тождества для гиперболических функций.
23. Графики гиперболических функций.
24. Бесконечно малые функции одного и того же порядка.
25. Эквивалентные бесконечно малые функции.
26. Бесконечно малая функция более высокого и более низкого порядков, чем другая бесконечно малая функция.
27. Несравнимые бесконечно малые функции.
28. Теорема об эквивалентных бесконечно малых функциях.
29. Применение свойств эквивалентных бесконечно малых функций к вычислению пределов функций.
30. Определение функции, непрерывной в точке.
31. Свойства функций, непрерывных в одной и той же точке.
32. Непрерывность сложной функции.
33. Классификация точек разрыва.
34. Точка разрыва первого рода.
35. Точка разрыва второго рода.
36. Точка устранимого разрыва.
37. Скачок функции.
38. Определение функции, непрерывной на отрезке.
39. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная

Основные понятия

Пусть дана функция y=f(x). Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x. Разности $\Delta x=x-x_0$ и $\Delta y=f(x)-f(x_0)=y-y_0$ называются соответственно приращением аргумента и приращением функции в точке x_0. Очевидно, что $x=\Delta x+x_0$, $y=\Delta y+y_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. В дальнейшем будем считать значение x_0 фиксированным, а x – переменным. При этом Δx и Δy являются переменными величинами. Если функция непрерывна в точке x_0, то выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, что равносильно условию $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Производной функции y=f(x) в точке x_0 называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует. Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть X={x} – множество всех таких x, для которых существует $y'(x)$. Очевидно, что $y'(x)$ является функцией, определенной на множестве X.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции. Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала $(a;b)$, называется дифференцируемой на интервале $(a;b)$.

Из курса средней школы известен геометрический смысл производной. Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0, тогда угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке $(x_0;f(x_0))$ равен $y'(x_0)$.

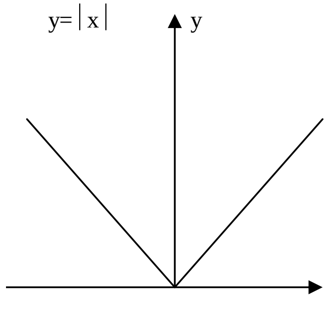
Из курса средней школы известен также физический смысл производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону S=f(t), где t время, S – путь, проходимый точкой за время t. Тогда скорость точки в момент времени t равна: V=S´(t).

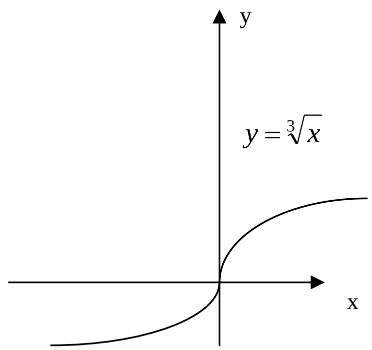
Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности).

Если функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение $\Delta x \neq 0$. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy. Вычислим предел: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y'(x_0) \cdot 0 = 0$, а это и означает непрерывность функции в точке x_0.

Заметим, что обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не дифференцируемы. Примерами могут служить функции $y=|x|$ и $y=\sqrt[3]{x}$ в точке x=0. В обоих случаях y´(0) не существует.





Заметим, что график $y=|x|$ в точке x=0 не имеет касательной, а график $y=\sqrt[3]{x}$ в точке x=0 имеет вертикальную касательную – ось OY.

Можно показать, что для того, чтобы функция y=f(x) была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее график имел невертикальную касательную в точке $(x_0;f(x_0))$.

Вычисление производной

Формулы вычисления производной некоторых элементарных функций получены в курсе средней школы:

1. C´=0, где C – константа.
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n – натуральное число.
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a>0$, $a \neq 1$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, где $a>0$, $a\neq 1$. В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.

В курсе средней школы установлены основные правила дифференцирования.

Пусть u=u(x) и v=v(x) – функции, дифференцируемые в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемы функции u+v, u·v, $\dfrac{u}{v}$. Последнее при условии, что $v'(x)\neq 0$. Причем, $(u+v)'=u'+v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Следствием последних трех соотношений являются следующие два: $(cu)'=c\cdot u'$, где c – константа, и $(u-v)'=u'-v'$.

Используя правило нахождения производной частного, легко получаются формулы: $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, которые выполняются для любого x, при котором существуют tgx или ctgx.

Производная обратной функции

Теорема. Пусть функция x=f(y) монотонна и дифференцируема в некотором интервале (a;b) и имеет в точке y этого интервала производную $f'(y)$, не равную нулю. Тогда в соответствующей точке x обратная функция $y=f^{-1}(x)$ имеет производную $(f^{-1}(x))'$, причем

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Доказательство. По условию теоремы функция x=f(y) монотонна и дифференцируема, следовательно, по теореме о существовании обратной функции функция $y=f^{-1}(x)$ существует, монотонна и непрерывна на соответствующем интервале. Дадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$. Тогда функция $y=f^{-1}(x)$ получит приращение Δy, которое в силу ее монотонности отлично от нуля. Так как функция $y=f^{-1}(x)$ непрерывна, то $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Тогда $\left(f^{-1}(x)\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^{-1} = \dfrac{1}{f'(y)}$.

Пользуясь доказанной теоремой, вычислим производные обратных тригонометрических функций. Для функции y=arcsinx обратной является функция x=siny, которая является в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ монотонной и дифференцируемой. Её производная x′=cosy в этом интервале в нуль не обращается. Поэтому $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом, (arcsinx)′= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогично получаются формулы

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},\ (\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная сложной функции

Пусть y=f(u), а u=φ(x). Тогда функция y=f(φ(x)) называется сложной функцией от x.

Теорема. Если функция u=φ(x) имеет производную в точке x, а функция y=f(u) имеет производную в соответствующей точке u=φ(x), то сложная функция y=f(φ(x)) имеет производную в точке x, причем $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Доказательство. Дадим x приращение Δx. Тогда u и y получат соответственно приращения Δu и Δy. Будем считать, что Δu при Δx→0 не принимает значений равных нулю. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Так как функция u=φ(x) дифференцируема, а следовательно, непрерывна, то Δu→0 при Δx→0. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$, а это и означает, что $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Заметим, что теорема верна и в случае, когда при Δx→0 Δu принимает значения, равные нулю.

Примеры. Найти производную функции.

1. *y*=ln*arctgx*.

$$y'=\frac{1}{arctgx}\cdot(arctgx)'=\frac{1}{(1+x^2)arctgx}.$$

2. $y=\cos^3 x^2$.

$y'=3\cos^2x^2\cdot(\cos x^2)'=3\cos^2x^2\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x=-6\cdot x\sin x^2\cdot\cos^2x^2$.

3. $y=\arcsin^4 e^{x^3}$.

$$y'=4\arcsin^3 e^{x^3}\cdot(\arcsin e^{x^3})'=4\arcsin^3 e^{x^3}\cdot\frac{1\cdot e^{x^3}\cdot 3x^2}{\sqrt{1-e^{2x^3}}}=$$

$$=\frac{12x^2e^{x^3}\arcsin^3 e^{x^3}}{\sqrt{1-e^{2x^3}}}.$$

Производные гиперболических функций

$shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, поэтому

$$(shx)'=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=chx.$$

Аналогично $(chx)'=shx$.

$$(thx)'=\left(\frac{shx}{chx}\right)'=\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}=\frac{1}{ch^2x}.$$

Аналогично $(cthx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}$.

Производная степенной функции с любым действительным показателем

Известно, что $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ для натурального n. Пусть теперь n – любое действительное число и x>0. Справедливо тождество $x^n=e^{n\cdot\ln x}$. Тогда $y=e^{n\cdot\ln x}$ – сложная функция и ее производная вычисляется следующим образом: $y'=e^{n\cdot\ln x}\cdot(n\ln x)'=\dfrac{n}{x}\cdot e^{n\ln x}=\dfrac{n}{x}\cdot x^n=nx^{n-1}$. Итак, при любом действительном n и x>0 верна формула $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$. Можно показать, что эта формула справедлива и при x<0, если при этом функция $y=x^n$ определена.

Таблица формул дифференцирования.

В таблице приняты обозначения: c, n – любые действительные числа; *a* – любое положительное действительное число, кроме единицы; u=u(x) – функция, дифференцируемая в точке x. Таблица составлена на основании формул дифференцирования основных элементарных функций и теоремы о производной сложной функции.

Таблица формул дифференцирования

1. $c'=0$	8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
2. $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$	9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(a^u)'=a^u\cdot \ln a\cdot u'$	10. $(\arccos u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3а. $(e^u)'=e^u\cdot u'$	11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4а. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	13. $(chu)'=shu\cdot u'$
5. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	14. $(shu)'=chu\cdot u'$
6. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	16. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Производные высших порядков

Предположим, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$. Тогда ее производная $f'(x)$ в этом интервале является функцией x. Пусть эта функция также имеет производную в $(a;b)$. Эта производная называется второй производной или производной второго порядка функции $y=f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Таким образом, $f''(x)=(f'(x))'$. При этом $f'(x)$ называется первой производной или производной первого порядка функции $f(x)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, производной n-го порядка функции $y=f(x)$ в точке x называется первая производная производной $(n-1)$-го порядка функции $y=f(x)$ при условии, что в точке x существуют все производные от первого до n-го порядков. Обозначение: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Таким образом, $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Примеры.

1. Найти y''' для функции $y=\cos^2 x$.

$$y'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x,\ y''=-2\cos 2x,\ y'''=4\sin 2x.$$

2. Найти $y^{(n)}$ для функции $y=e^{3x}$.

$$y'=3e^{3x},\ y''=3^2\cdot e^{3x},\ y'''=3^3\cdot e^{3x},\ \ldots,\ y^{(n)}=3^n\cdot e^{3x}.$$

Механический смысл второй производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону $S=f(t)$, где t – время, $S=f(t)$ – путь, пройденный за время t. Из физики известно, что ускорение точки в момент времени t равно производной скорости по t. Таким образом, ускорение $w(t)=v'(t)=S''(t)$ равно второй производной пути по времени.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана параметрически уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in(\alpha;\beta)$. Предположим, что функции $x(t)$, $y(t)$ имеет производные на $(\alpha;\beta)$ и функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi(x)$, которая также имеет производную в соответствующих точках x. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию $y=y(t)$, $t=\varphi(x)$, t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\varphi'(x)$. По теореме о дифференцировании обратной функции $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x'_t}$. Учитывая это, получаем $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Если существует y''_x, то рассуждая аналогично, получаем $y''_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Вообще, $y_x^{(n)}=\dfrac{(y_x^{(n-1)})'_t}{x'_t}$ при условии, что все производные от первого до n – го порядка существуют.

Пример.

$x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$. Вычислить y''_x.

$x'_t=-3\cos^2 t\cdot\sin t$, $y'_t=3\sin^2 t\cdot\cos t$, поэтому

$$y'_x=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-tgt\cdot(y'_x)'_t=(-tgt)'_t=-\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Тогда

$$y''_x = \frac{-1/\cos^2 t}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3\sin t \cos^4 t}.$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть значения переменных x и y связаны уравнением F(x,y)=0. (1)

Если функция y=f(x), определенная на некотором интервале (α;β), такая, что уравнение (1) при постановке в него вместо y выражения f(x) обращается в тождество, то говорят, что уравнение (1) задает функцию y=f(x) неявно или что функция y=f(x) есть неявная функция.

Укажем правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, то есть не представляя в виде y=f(x), так как часто это преобразование бывает технически сложным или невозможным.

Для нахождения производной y'_x неявной функции нужно продифференцировать по x обе части равенства (1), учитывая, что y есть функция от x, затем из полученного равенства выразить y'_x.

Примеры.

1. Вычислить y'_x, если $y^5+xy-x^2=0$.

Продифференцируем обе части по x. Получим $5y^4y'+y+xy'-2x=0$, откуда $y'(5y^4+x)=2x-y$ и $y' = \dfrac{2x-y}{5y^4+x}$.

2. Вычислить y'_x, если tg(x+y)=xy.

Продифференцируем обе части по x. Получим

$$\frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y') = y + xy'$$

или $$\frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot y' = y + xy'$$

или $$\left(\frac{1}{\cos^2(x+y)} - x\right) \cdot y' = y - \frac{1}{\cos^2(x+y)}$$

или $$\frac{1 - x\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y)} \cdot y' = \frac{y\cos^2(x+y) - 1}{\cos^2(x+y)},$$

откуда $$y' = \frac{y\cos^2(x+y) - 1}{1 - x\cos^2(x+y)}.$$

Заметим, что производная неявной функции выражается через x и y, то есть получается равенство

$$y'_x = \varphi(x,y). \qquad (2)$$

Для вычисления второй производной неявной функции, нужно продифференцировать обе части равенства (2) по x и затем подставить выражение φ(x,y) вместо y'_x. Аналогично можно вычислить производные любого порядка неявной функции.

Пример. Вычислить y'', если $x^2+y^2-1=0$.

Продифференцируем обе части данного равенства по x, получим $2x+2yy'=0$, откуда $y'=-\frac{x}{y}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x, получим $y''=-\frac{y-xy'}{y^2}$ или $y''=-\frac{xy'-y}{y^2}$.

Логарифмическое дифференцирование

Функция вида $y=(u(x))^{v(x)}$ называется степенно – показательной. Для вычисления ее производной при условии, что производная существует, нужно сначала прологарифмировать функцию по любому основанию (обычно по основанию *e*). Затем нужно вычислить производную полученной неявной функции.

Пример. Найти производную функции $y=(\sin x)^x$.

Логарифмируем функцию по основанию e: $\ln y=x\cdot\ln\sin x$. Дифференцируем обе части равенства по x:

$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\sin x+x\cdot\mathrm{ctg}x$, отсюда $y'=y\cdot(\ln\sin x+x\cdot\mathrm{ctg}x)$ или $y'=(\sin x)^x\cdot(\ln\sin x+x\cdot\mathrm{ctg}x)$.

Рассмотренный прием называется логарифмическим дифференцированием. Он применяется не только для вычисления производных степенно – показательной функции, но и в случаях, когда аналитическое выражение функции содержит несколько множителей.

2.2. Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y=x^3$. Дадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$, тогда функция получит соответствующее приращение Δy. Вычислим его.

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+(3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3).$$

Приращение функции можно рассматривать как сумму двух слагаемых: $3x^2\cdot\Delta x$ – линейного относительно Δx и $3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ – нелинейного относительно Δx. При $\Delta x\to 0$ оба слагаемые являются бесконечно малыми функциями, однако второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка, чем первое. Действительно,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{3x^2 \cdot \Delta x} = \frac{1}{3x^2} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 0$. Обозначим $3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 0(\Delta x)$. Таким образом, $\Delta \cdot y = 3x \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$. При малых Δx получаем: $\Delta y \approx 3x^2 \cdot \Delta x$.

Определение. Пусть приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x можно представить в виде: $\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$, где Δx – приращение аргумента; A – величина, не зависящая от Δx; $0(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Тогда главная часть приращения функции $A \cdot \Delta x$, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции в точке x и обозначается dy. Итак, по определению $dy = A \cdot \Delta x$.

Теорема (о связи между существованием производной и дифференциала).

Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела в точке x дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал. Это означает, что ее приращение в этой точке можно представить в виде: $\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$. Разделим обе части последнего равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} = A$, то есть $f'(x)$ существует и $f'(x) = A$. Отметим, что выражение дифференциала функции принимает вид: $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Достаточность. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. По свойству предела функции $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Умножим обе части последнего равенства на Δx, получим $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$.

Действительно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Мы получим: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$, а это и означает, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Замечание. Рассмотрим функцию $y=x$. Ее дифференциал равен: $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$. Таким образом, дифференциал независимой переменной равен ее приращению $dx=\Delta x$. Тогда выражение дифференциала функции можно записать в виде: $dy=f'(x)\cdot dx$. Заметим, что $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

Свойства дифференциала

1. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые в точке x функции. Тогда в точке x имеют место следующие формулы: $d(u\pm v)=du\pm dv$, $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$ (при условии, что $v(x)\neq 0$). Эти формулы следуют из определения дифференциала и свойств производной.

2. Инвариантность формы дифференциала. Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, то есть y является сложной функцией t: $y=f(\varphi(t))$. Тогда $dy=y'_t dt$. По правилу дифференцирования сложной функции $y'_t= y'_x \cdot x'_t$. Отсюда $dy=y'_x\cdot x'_t dt=y'_x dx=f'(x)dx$, так как $dx=x'_t dt$. Таким образом, дифференциал сложной функции имеет такой же вид, как и дифференциал функции независимой переменной. Это свойство дифференциала сложной функции называется инвариантностью формы дифференциала.

Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим дифференцируемую функцию независимой переменной $y=f(x)$. Дифференциал этой функции $dy=f'(x)dx$ зависит от x и $dx=\Delta x$. Приращение dx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от этой точки. Рассматривая $dy=f'(x)dx$ только как функцию от x (то есть считая dx постоянным), можно найти дифференциал этой функции. Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ называется ее вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка и обозначается символом d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, по определению $d^2y=d(dy)$. Вычислим второй дифференциал функции $y=f(x)$. $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'\cdot dx=f''(x)\cdot(dx)^2=f''(x)dx^2$.

Аналогично определяются и вычисляются дифференциалами третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, дифференциалом n – го порядка или n – м дифференциалом функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее (n-1) – го дифференциала: $d^ny=d(d^{n-1}y)$. Легко установить, что $d^ny=f^{(n)}(x)dx)^n$. Дифференциал dy называют дифференциалом первого порядка. Из последней формулы следует $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Замечание. Для сложной функции форма дифференциала d^ny при $n>1$ не обладает свойством инвариантности, а значит $f^{(n)}(x)\neq\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Однако и для сложной функции часто $f^{(n)}(x)$ обозначают $\frac{d^n y}{dx^n}$, понимая $\frac{d^n y}{dx^n}$ не как отношение дифференциалов, а как символ, обозначающий $f^{(n)}(x)$.

2.3. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в интервале $(a;b)$ и принимает в точке c этого интервала наибольшее или наименьшее на $(a;b)$ значение. Если существует $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть, например, $f(c)=M$ – наибольшее значение функции в интервале $(a;b)$ и существует $f'(c)$. По определению производной $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$ при любом знаке Δx, так как $f(c)$ – наибольшее значение функции в $(a;b)$. Если $\Delta x>0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0$ и, следовательно, $f'(c)\le 0$. Если $\Delta x<0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0$ и $f'(c)\ge 0$. Следовательно, $f'(c)=0$.

Геометрически теорема означает, что касательная, проведенная к графику функции в точке $(c;f(c))$, параллельна оси OX.

Теорема Ролля.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=0$. Тогда ее производная $f'(x)$ обращается в ноль хотя бы в одной точке $c\in(a;b)$.

Доказательство. По условию функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, поэтому она достигает на $[a;b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений. Если $M=m$, то функция постоянна на $[a;b]$ и ее производная $f'(x)=0$ во всех точках $(a;b)$. Пусть теперь $M\neq m$, тогда хотя бы одно из этих чисел, например, $m\neq 0$. Поэтому существует такая точка $c\in(a;b)$, что $f(c)=m$, следовательно, по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Геометрически теорема означает, что если функция $y=f(x)$ удовлетворяет теореме Ролля, то найдется хотя бы одна точка $(c;f(c))$, где $c\in(a;b)$, такая, что касательная к графику функции в этой точке параллельна оси OX.

Теорема Лагранжа.

Пусть функция y=f(x) непрерывна на отрезке [*a*;*b*] и дифференцируема в интервале (*a*;*b*). Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, для которой выполняется условие:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Доказательство. Составим уравнение хорды AB, соединяющей точки графика функции A(*a*;f(*a*)) и B(*b*;f(*b*)): $\dfrac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{x-a}{b-a}$.

Отсюда ордината хорды $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)-\left(f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right)$. Функция F(x) непрерывна на [*a*;*b*] и дифференцируема на (*a*;*b*).

$$F(b)=f(b)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)\right)=0,$$

$$F(a)=f(a)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)\right)=0.$$ Таким образом, функция F(x) удовлетворяет теореме Роля, поэтому существует такая точка $c\in(a;b)$, что $F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, откуда получаем утверждение теоремы.

Геометрически теорема Лагранжа означает, что существует хотя бы одна такая точка $c\in(a;b)$, что касательная к графику функции в точке (c;f(c)) параллельна хорде AB.

Теорема Лопиталя (правило Лопиталя).

Пусть f(x) и φ(x) – функции, непрерывные на [*a*;*b*], дифференцируемые на (*a*;*b*); $\varphi'(x)\neq0$ при всех $x\in(a;b)$ и $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Примем теорему без доказательства.

Замечание 1. Теорема имеет место и в том случае, если функции f(x) и φ(x) не определены при x=*a*, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$. Таким образом, правило Лопиталя можно применить к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Замечание 2. Если f′(x) и φ′(x) удовлетворяют всем условиям теоремы Лопиталя, то к ним также можно применить правило Лопиталя. При этом получим $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и так далее. Таким образом, при выполнении условий теоремы Лопиталя, правило Лопиталя можно применить многократно.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$.

Здесь дважды было применено правило Лопиталя.

2.4. Применение производной к исследованию функций. Интервалы монотонности. Экстремумы

Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей на некотором промежутке, если для любых значений $x_2>x_1$ этого промежутка выполняется условие: $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$).

Функция y=f(x) имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x, $x\neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).

Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами. Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности функции.

Теорема (необходимо условие монотонности функции).

Если дифференцируемая в интервале (*a*;*b*) функция y=f(x) возрастает (убывает) на (*a*;*b*), то для всех $x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$).

Доказательство. Пусть y=f(x) – дифференцируема и возрастает на (*a*;*b*). Пусть точки x и x+Δx принадлежат (*a*;*b*). Если Δx>0, то f(x+Δx)>f(x); если Δx<0, то f(x+Δx)<f(x). В обоих случаях

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Аналогично доказывается теорема и в случае убывающей функции. Рекомендуем сделать это самостоятельно.

Теорема (достаточное условие монотонности функции).

Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет положительную (отрицательную производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$).

Доказательство. Пусть $f'(x)>0$ для всех $x \in (a;b)$. Рассмотрим два произвольных значения $x_2>x_1$, принадлежащих $[a;b]$. По формуле Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(c)$, где $c \in (x_1;x_2)$. $f'(c)>0$ и $x_2-x_1>0$, поэтому $f(x_2-x_1)>0$, откуда $f(x_2)>f(x_1)$, то есть функция возрастает на $[a;b]$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема (необходимый признак существования экстремума функции).

Если дифференцируемая в точке с функция $y=f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке с максимум (минимум). Это означает, что существует также проколотая окрестность точки *c*, что для всех точек *x* этой окрестности выполняется $f(x)<f(c)$ ($f(x)>f(c)$), то есть $f(c)$ – наибольшее (наименьшее) значение функции в этой окрестности. Тогда по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точке, в которой ее производная не существует. Например, функция $y=|x|$ имеет минимум в точке $x=0$, хотя $f'(0)$ не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Однако не во всех критических точках функция имеет экстремум. Например, функция $y=x^3$ не имеет экстремумов, хотя $y'(0)=0$.

Теорема (достаточный признак существования экстремума).

Если непрерывная на интервале функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках этого интервала, за исключением, может быть, критической точки *c*, принадлежащей этому интервалу, и если $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку *c* меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция в точке с имеет максимум (минимум).

Доказательство. Пусть *c* – критическая точка и пусть при переходе аргумента слева направо через точку *c* $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс). Это означает, что на некотором интервале $(c-\varepsilon;c)$ функция возрастает (убывает), а на интервале $(c;c+\varepsilon)$ – убывает (возрастает), $\varepsilon>0$. Следовательно, в точке *c* функция имеет максимум (минимум).

Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента через критическую точку, то функция в этой точке не имеет экстремума.

Выпуклость и вогнутость графика функции

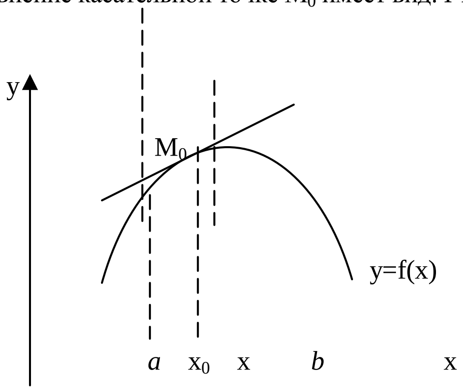
График дифференцируемой функции называется выпуклым (вогнутым) в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая ее выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Теорема (достаточный признак выпуклости и вогнутости).

Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), то график на $(a;b)$ выпуклый (вогнутый).

Доказательство. Пусть $f''(x)<0$ на $(a;b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M_0 с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ и проведем через точку M_0 касательную. Для доказательства теоремы нужно показать, что для одной и той же абсциссы *x* ордината кривой меньше ординаты касательной. Это будет означать, что график функции находится ниже касательной. Уравнение касательной точке M_0 имеет вид: $I-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.



Через I обозначена ордината касательной, соответствующая абсциссе *x*. Разность ординат графика и касательной при одной и той же абсциссе x равна

$$y-I=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Применяя к разности $f(x)-f(x_0)$ формулу Лагранжа, получаем $y-I=f'(c)\cdot(x-x_0))-f'(x_0)\cdot(x-x_0)= (x-x_0)\cdot(f'(c)-f'(x_0))$, где c заключено между x и x_0. Применяя к разности $f'(c)-f'(x_0)$ формулу Лагранжа, получаем $y-I=(x-x_0)\cdot f''(c_1)\cdot(c-x_0)$, где c_1 заключено между c и x_0, а следовательно, между x и x_0. По условию $f''(x)<0$ в интервале $(a;b)$, значит $f''(c_1)<0$. Разности $x-x_0$ и $c-x_0$ одного знака, так как c заключено между x и x_0, значит $(x-x_0)\cdot(c-x_0)>0$. Поэтому $y-I<0$ или $y<I$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что при $f''(x)>0$ график вогнутый.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то точка $(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x)<0$ в интервале $(x_0-\varepsilon;x_0)$ и $f''(x)>0$ в интервале $(x_0;\varepsilon+x_0)$, где ε – положительное число. В этом случае график функции в интервале $(x_0-\varepsilon;x_0)$ выпуклый, а в интервале $(x_0;\varepsilon+x_0)$ – вогнутый. Следовательно, точка $(x_0;f(x_0))$ по определению является точкой перегиба.

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба).

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в интервале $(a;b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$ и пусть точка $x_0\in(a;b)$ является абсциссой точки перегиба графика данной функции. Тогда $f''(x)=0$.

Доказательство. Предположим противное: $f''(x)\neq 0$, например, для определенности $f''(x)>0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)>0$ в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, в этой окрестности график вогнутый, но это противоречит тому, что x_0 – абсцисса точки перегиба. Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции не существует, однако точка x_0 является абсциссой точки перегиба. Например, для функции $y=\sqrt[3]{x^5}$

$y''=\dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ и $y''(0)$ не существует. Очевидно, что $y''<0$ при $x\in(-\infty;0)$ и $y''>0$ при $x\in(0;+\infty)$, то есть точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

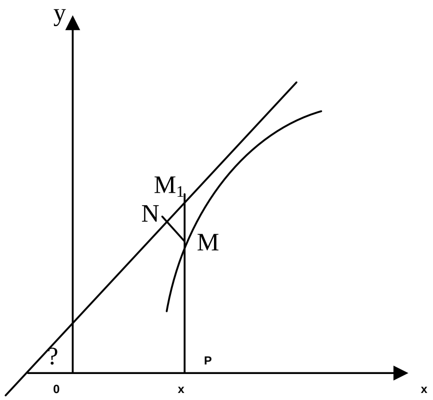
Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции второго порядка. Как мы отметили, не все такие точки являются абсциссами точек перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Для нахождения вертикальных асимптот, то есть асимптот, параллельных оси OY, надо найти точки разрыва функции II рода. Если x_0 – такая точка и хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ равен бесконечности, то прямая $x=x_0$ – вертикальная асимптота. Если функция не имеет точек разрыва II рода, то график функции не имеет вертикальных асимптот.

Пусть график функции имеет невертикальную асимптоту при $x \to +\infty$.



Уравнение невертикальной прямой можно записать в виде y=kx+b. Пусть M(x;y) – текущая точка графика. Опустим из точки M перпендикуляр MN на асимптоту. Из определения асимптоты следует: $\lim\limits_{x \to +\infty} MN = 0$.

Из ΔM_1MN получаем $M_1M = \dfrac{MN}{\cos\alpha}$, где α – угол между асимптотой и осью OX. Поскольку α – величина постоянная, то $\lim\limits_{x \to +\infty} M_1M = \lim\limits_{x \to +\infty} MN = 0$. Заметим, что $M_1M=PM_1-PM=y_{асимпт}-$

$-y_{графика}=(kx+b)-f(x)$, поэтому $\lim\limits_{x \to +\infty} ((kx+b) - f(x)) = 0$. Последнее равенство означает, что функция $f(x)-(kx+b)=\beta(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Разделим обе части последнего равенства на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}=0$$, откуда $k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, так как $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$.

Определим теперь b. Так как f(x)-(kx+b)=β(x), то b=f(x)-kx-β(x). Переходя к пределу при x→+∞, получаем $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$.

Если k или b не существуют, то график функции не имеет невертикальную асимптоту. В частном случае, при k=0 получается горизонтальная асимптота. Аналогично находят асимптоты при x→-∞. График может иметь различные асимптоты при x→+∞ и x→-∞ или иметь только одну из них.

План исследования функции и построение графика

Исследование функции удобно проводить по следующему плану.

1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность функции.
4. Исследование функции на непрерывность. Вертикальные асимптоты.
5. Невертикальные асимптоты.
6. Интервалы монотонности и экстремумы.
7. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
8. Дополнительные точки, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, периодичность (по мере необходимости).
9. Построение графика.

Подчеркнем, что пункт 8 не является необходимым. Его выполняют, если необходимо уточнить график.

Пример 1. Исследовать функцию y=x-2arctgx и построить ее график.

1. Область определения: (-∞;+∞).
2. Пусть x=0, тогда y=0.

Пусть y=0, тогда x-2arctgx=0 – решить такое уравнение точно не удается.

Найдена точка (0;0) пересечения графика с осями координат.

3. y(-x)=-x-2arctg(-x)=-(x-2arctgx)=-y(x) – функция нечетная.
4. Функция непрерывна во всей области определения. Вертикальных асимптот нет.
5. Невертикальные асимптоты.

$$y=kx+b.$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2arctgx}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2arctgx}{x}\right)=1$$

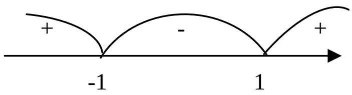
$$b=\lim_{x\to+\infty}(x-2arctgx-x)=-2\lim_{x\to+\infty}arctgx=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi\ .$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(x-2arctgx-x)=-2\lim_{x\to-\infty}arctgx=-2\cdot(-\frac{\pi}{2})=\pi\ .$$

$y=x+\pi$ – асимптота при $x\to-\infty$, $y=x-\pi$ – асимптота при $x\to+\infty$.

6. $\quad y'=1-\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$; $1+x^2\neq0$ при $x\in(-\infty;\infty)$.

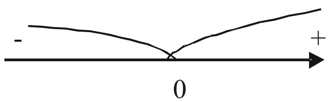
$y'=0$, если $x^2-1=0$, откуда $x=-1$ и $x=1$ – критические точки. Нанесем критические точки на числовую прямую и определим знаки производной в образовавшихся интервалах.



На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция возрастет, а на интервале $(-1;1)$ – убывает.

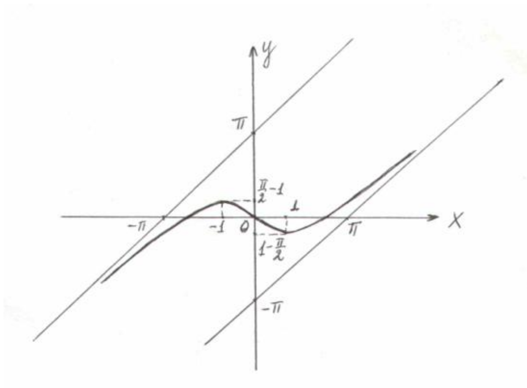
$Y_{max}(-1)=-1-2arctg(-1)=-1+\dfrac{\pi}{2}\approx0{,}57$, $y_{min}(1)=1-2arctg1=1-\dfrac{\pi}{2}\approx-0{,}57$.

7. $y''=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$; $y''=0$, если $4x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка второго порядка. Нанесем ее на числовую прямую и определим знаки второй производной в образовавшихся интервалах.



На интервале $(-\infty;0)$ график выпуклый, а на интервале $(0;+\infty)$ – выгнутый. $(0;0)$ – точка перегиба.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2arctgx)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2arctgx)=-\infty$.



Пример 2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ и построить ее график.

1. Область определения: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$, так как при x=-2 и x=2 знаменатель дроби обращается в ноль.
2. Пусть x=0, тогда y=0.

Пусть y=0, тогда $\dfrac{x}{x^2-4}=0$, откуда x=0.

(0;0) – точка пересечения графика с осями координат.

3. $y(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}=y(x)$ - функция четная.

4. Функция имеет разрывы в точках x=-2 и x=2, так как f(-2) и f(2) не определены.

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-2+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty,\qquad \lim_{x\to2-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty,$$

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=-\infty$, следовательно, x=-2 и x=2 – точки разрыва II рода и прямые x=-2 и x=2 – вертикальные асимптоты.

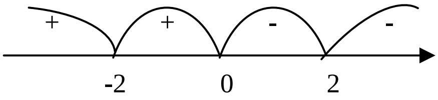
5. невертикальные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1,$$ следовательно, прямая y=1 – асимптота.

6. $$y'=\frac{2x\cdot(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2}=-\frac{8x}{(x^2-4)^2}.$$

y′=0, если -8x=0, откуда x=0 – критическая точка. y′ не существует, если $(x^2-4)^2=0$, откудах=-2 и x=2 – критические точки.



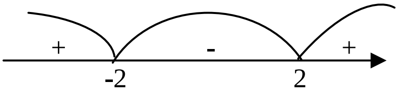
На интервалах (-∞;-2) и (-2;0) функция возрастает, а на интервалах (0;2) и (2;+∞) – убывает.

$У_{max}(0)=0$.

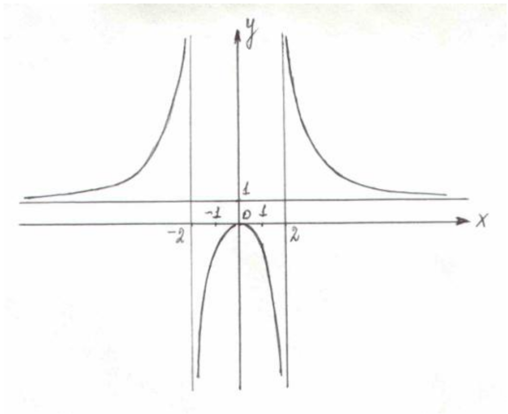
7. $$y''=-\frac{8\cdot(x^2-4)^2-8x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=-\frac{8(x^2-4)-32x^2}{(x^2-4)^3}=$$

$$=-\frac{8x^2-32-32x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}.$$

y′′≠0 при $x\in(-\infty;\infty)$, y′′ не существует, если $(x^2-4)^3=0$, откуда x=-2 и x=2 – критические точки второго порядка.



На интервалах (-∞;-2) и (2;+∞) – график функции вогнутый, а на интервале (-2;2) – выпуклый. Точек перегиба нет.



Контрольные вопросы

1. Определение производной функции.
2. Геометрический смысл производной.
3. Физический смысл первой и второй производных.
4. Свойства производных.
5. Таблица производных основных элементарных функций.
6. Связь непрерывности и дифференцируемости функции.
7. Дифференциал функции.
8. Свойства дифференциала функции.
9. Инвариантность дифференциала функции.
10. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
11. Дифференциалы высших порядков.
12. Связь производной и дифференциала функции.
13. Производная неявно заданной функции.
14. Производная параметрически заданной функции.
15. Логарифмическое дифференцирование.
16. Правило Лопиталя.
17. Теорема Ферма, Ролля, Ланранжа, Коши.
18. Экстремумы функции.
19. Критические точки функции.
20. Необходимое условие возрастание функции на интервале.
21. Необходимое условие убывания функции на интервале.
22. Достаточное условие возрастания функции.
23. Достаточное условие убывания функции.
24. Необходимое условие экстремума.
25. Первое достаточное условие экстремума.
26. Второе достаточное условие экстремума.
27. Выпуклость, вогнутость графика функции на интервале.
28. Достаточный признак выпуклости и вогнутости.

29. Точка перегиба.
30. Необходимое условие существование точки перегиба.
31. Достаточное условие существование точки перегиба.
32. Определение асимптоты графика функции.
33. Вертикальные асимптоты графика функции.
34. Невертикальные асимптоты графика функции.

Глава 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Основные понятия

Основная задача интегрального исчисления заключается в том, что для функции f(x) нужно найти такую функцию F(x), производная которой равнялась бы f(x), то есть $F'(x)=f(x)$. При этом функция F(x) называется первообразной функции f(x) на промежутке, для всех точек которого выполняется условие $F'(x)=f(x)$ или, что то же самое, $dF(x)=f(x)dx$.

Теорема.

Любая непрерывная на интервале функция имеет на нем первообразную.

Примем эту теорему без доказательства.

Теорема (о структуре первообразной).

Если функция F(x) является первообразной для функции f(x) на отрезке $[a;b]$, то всякая другая первообразная для f(x) имеет вид: F(x)+c, где c – произвольная постоянная.

Доказательство.

Очевидно, что если F(x) – первообразная для функции f(x), то и любая функция F(x)+c тоже является первообразной f(x), так как $(F(x)+c)'=f(x)$. Пусть Φ(x) – любая, возможно другого вида, первообразная функции f(x). Тогда $(\Phi(x)-F(x))'=f(x)-f(x)=0$, а это значит, что $\Phi(x)-F(x)=c$, то есть $\Phi(x)=F(x)+c$.

Из теоремы следует, что функции F(x)+c охватывают совокупность всех первообразных функции f(x).

Множество функций F(x)+c, где F(x) – одна из первообразных функции f(x), а *c* – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x)+c$.

Функция f(x) называется подынтегральной функцией, f(x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Процесс нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Доказательство следует из определения первообразной. Действительно, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx$.

2. $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$.

Доказательство. Из определения первообразной следует, что функция φ(x) является первообразной для функции dφ(x).

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Доказательство. Достаточно показать, что совпадают производные левой и правой частей равенства.

$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx\right)' = f(x) \pm g(x)$ по свойству 1;

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x).$$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где k – любое число.

Доказывается аналогично свойству 3.

Отметим, что свойство 3 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq -1$

4a. $\int e^u du = e^u + c$

5. $\int \sin u du = -\cos u + c$

6. $\int \cos u du = \sin u + c$

9a. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = arctgu + c$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$

10a. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + c$

12. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

13. $\int shudu = chu + c$

14. $\int chudu = shu + c$

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$

9. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{u}{a} + c$.

15. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + c$

16. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + c$

3.2. Методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование.*

Этот метод основан на применении свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразований.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= tgx - ctgx + c.$$

2. *Внесение под знак дифференциала.*

Этот метод основан на применении формулы $f'(x)dx=df(x)$, которая называется внесением под знак дифференциала. В частности,

$u^n du = \frac{1}{n+1} d(u^{n+1}), n \neq -1$ cosudu=dsinu

$\frac{du}{u} = d\ln u$ $\frac{du}{\cos^2 u} = dtgu$

$e^u du = de^u$ $\frac{du}{\sin^2 u} = -dctgu$ $a^u du = \frac{1}{\ln a} da^u$

$\frac{du}{1+u^2} = darctgu = -darcctgu$

sinudu=-dcosu $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d\arcsin u = -d\arccos u$

$\frac{du}{2\sqrt{u}} = d\sqrt{u}$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$

Пример 2.

$$\int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(4+x^2)}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln(4+x^2)+c$$

3. *Замена переменной.*

Этот метод основан на применении формул x=φ(t) или t=φ(x), где t – новая переменная. Вычислив интеграл, нужно вернуться к первоначальной переменной.

Пример. Вычислить $\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx$.

Обозначим 3x+1=t, откуда $x=\frac{1}{3}(t-1)$, $dx=\frac{1}{3}dt$. Получаем

$$\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(t-1)}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int \frac{t-1}{t^2}dt = \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t}-t^{-2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1}\right)+c = \frac{1}{9}\left(\ln|3x+1| + \frac{1}{3x+1}\right)+c.$$

4. *Интегрирование по частям.*

Пусть u=u(x) и v=v(x) – функции, имеющие непрерывные производные, тогда d(uv)=vdu+udv или udv=d(uv)-vdu. Проинтегрировав последнее равенство и учитывая свойство 2 неопределенного интеграла, получаем формулу интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$.

При необходимости эта формула может применяться последовательно несколько раз.

Отметим три вида интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. $\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cdot \cos kxdx$, $\int P_n(x)\cdot \sin kxdx$,

где $P_n(x)$ – многочлен n- й степени от x, k – произвольное число. В этих интегралах нужно обозначить $u=P_n(x)$. Формула интегрирование по частям применяется последовательно n раз. При этом n>0.

2. $\int P_n(x)\log_\alpha kxdx$, $\int P_n(x)\arcsin kxdx$, $\int P_n(x)\arccos kxdx$,

$\int P_n(x) arctgkxdx$, $\int P_n(x) arcctgkxdx$, где $a>0$, $a\neq 1$ – число, $P_n(x)$ – многочлен n – й степени от x, k – произвольное число. В этих интегралах за n нужно обозначать логарифм или обратную тригонометрическую функцию, при этом не исключается случай n=0.

$$3.\ \int e^{mx}\cdot\cos kxdx,\ \int e^{mx}\cdot\sin kxdx,$$

где m, k – числа, отличные от нуля. Эти интегралы вычисляются двукратным применением формулы интегрирования по частям.

Пример 1. $$\int(3x+1)e^x dx=\begin{pmatrix} u=3x+1, du=3dx \\ dv=e^x dx, v=\int e^x dx=e^x \end{pmatrix}=$$

$$=(3x+1)e^x-3\int e^x dx=(3x+1)e^x-3e^x+c=(3x-2)e^x+c.$$

Пример 2.

$$\int(4x^3-2x+1)\ln xdx=\begin{pmatrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=(4x^3-2x+1)dx, v=x^4-x^2+x \end{pmatrix}=$$

$$=(x^4-x^2+x)\ln x-\int\frac{x^4-x^2+x}{x}dx=(x^4-x^2+x)\ln x-\int(x^3-x+1)dx=$$

$$=(x^4-x^2+x)\ln x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x+c.$$

Пример 3.

$$\int e^x\sin xdx=\begin{pmatrix} u=e^x, du=e^x dx \\ dv=\sin xdx, v=-\cos x \end{pmatrix}=-e^x\cos x+$$

$$+\int e^x\cos xdx=\begin{pmatrix} u=e^x, du=e^x dx \\ dv=\cos xdx, v=\sin x \end{pmatrix}=-e^x\cos x+e^x\sin x-$$

$$-\int e^x\sin xdx.$$

Таким образом, получаем

$$\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx,$$

откуда

$$2\int e^x\sin xdx=e^x\sin x-e^x\cos x+c$$

или

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c\ .$$

5. *Интегрирование рациональных дробей.*

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где n, m – степени многочленов.

Если n<m, то рациональная дробь называется правильной, в противном случае, при n≥m, – неправильной.

Если дробь неправильная, то из нее нужно сначала выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель.

Например, $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x - 1}{x^2 + 3}$ – неправильная рациональная дробь. Выполняя деление числителя на знаменатель, получаем $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x - 1}{x^2 + 3} = x^2 - 3x - 3 + \dfrac{14x + 8}{x^2 + 3}$.

Таким образом, неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшими рациональными дробями называются правильные рациональные дроби следующих четырех типов: $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Bx + C}{x^2 + px + q}$, $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}$, где A, B, C, *a*, p, q – любые числа, $k \in N$, k>1.

Дроби первых двух типов интегрируются непосредственно Действительно, $\displaystyle\int \frac{A}{x-a} dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$;

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c =$$

$$= \frac{A}{(1-k)\cdot(x-a)^{1-k}} + c\ .$$

Для интегрирования дроби третьего и четвертого типов нужно выделить полный квадрат в знаменателе и затем сделать замену переменной. Рассмотрим это на примере.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+9}dx =$$

$$= \begin{pmatrix} x-2=z; x=z+2; dx=dz \\ 3x-1=3(z+2)-1=3z+5 \end{pmatrix} = \int \frac{3z+5}{z^2+9}dz =$$

$$= 3\int \frac{z}{z^2+9}dz + 5\int \frac{dz}{z^2+3^2} = \frac{3}{2}\int \frac{2zdz}{z^2+9} + \frac{5}{3}arctg\,\frac{z}{3} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(z^2+9)}{z^2+9} + \frac{5}{3}arctg\frac{z}{3} = \frac{3}{2}\ln(z^2+9) + \frac{5}{3}arctg\frac{z}{3} + c =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13) + \frac{5}{3}arctg\,\frac{x-2}{3} + c\,.$$

Если правильная рациональная дробь не является простейшей, то ее представляют в виде суммы простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Для этого сначала нужно разложить знаменатель на множители. Из алгебры известно, что множители могут быть двух видов: $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^k$, квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант. Каждому такому множителю соответствует сумма k простейших рациональных дробей. Для множителя $(x-a)^k$ это дроби $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$, для множителя $(x^2+px+q)^k$ это дроби $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$, где A_i, B_i, $i=1, \ldots, k$ – числа, которые затем находят методом неопределенных коэффициентов.

Пример. $\int \frac{x+1}{x^3+x}$.

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}\,.$$

Приравниваем числители данной и полученной дробей.

$$(A+B)x^2+Cx+A=x+1.$$

$$\begin{cases} A+B=0; \\ C=1; \\ A=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-1; \\ C=1; \\ A=1. \end{cases}$$

Получаем

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x+1}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + arctgx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctgx + c.$$

6. *Интегрирование тригонометрических функций.*

1. Интегралы вида $\int \sin kx \cdot \sin mxdx$, $\int \sin kx \cdot \cos mxdx$, $\int \cos kx \cdot \cos mxdx$ вычисляются с помощью формулы:

$$\sin kx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x),$$

$$\sin kx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \sin(k+m)x),$$

$$\cos kx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x).$$

Пример. $\int \sin 3x \cdot \cos 5xdx = \frac{1}{2}\int (\sin(-2x) + \sin 8x)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2xdx + \frac{1}{2}\int \sin 8xdx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c.$$

2. Интегралы вида $\int \cos^m kx \cdot \sin^n kxdx$, где хотя бы одно из чисел m и n – нечетное положительное, k и второе число – любое, вычисляются подведением под знак дифференциала.

Пример. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos xdx}{\sin^2 x} = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d\sin x =$

$$= \int (\sin^{-2} x - 1)d\sin x = \frac{\sin^{-1} x}{-1} - \sin x + c = c - \frac{1}{\sin x} - \sin x.$$

3. Интегралы вида $\int \cos^m kx \cdot \sin^n kxdx$, где m и n – четные положительные числа (одно из них может равняться нулю) k – любое число, вычисляются с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Пример.

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3xdx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 6xdx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 12x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{12}\sin 12x) + c = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x + c.$$

4. Интегралы вида $\int tg^m kxdx$ и $\int ctg^m kxdx$, где m – натуральное, k – любое число, вычисляются заменой переменной: tgkx=z или ctgkx=z.

Пример. $\int tg^3 xdx = \begin{pmatrix} tgx = z; dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \\ x = arctgz \end{pmatrix} = \int \dfrac{z^3}{1+z^2}dz =$

$$= \int \frac{(z^3+z)-z}{1+z^2}dz = \int \frac{z(z^2+1)-z}{1+z^2}dz - \int \frac{zdz}{1+z^2} = \int zdz - \frac{1}{2}\int \frac{2zdz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+z^2)}{1+z^2} = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + c = \frac{1}{2}tg^2 x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+tg^2 x) + c.$$

5. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\dfrac{x}{2} = z$, откуда x=2arctgz; $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$; $\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$;

$\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ (так как $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$).

Пример. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{8-4\cdot\frac{2z}{1+z^2}+7\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$

$$= 2\int \frac{dz}{8+8z^2-8z+7-7z^2} = 2\int \frac{dz}{z^2-8z+15} = 2\int \frac{d(z-4)}{(z-4)^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{z-4-1}{z-4+1}\right| + c = \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}-5}{tg\,\frac{x}{2}-3}\right| + c\,.$$

7. *Интегрирование простейших иррациональных функций.*

1. Интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегрируются так же, как простейшие рациональные дроби 3 – го вида: в знаменателе выделяются полный квадрат и вводится новая переменная.

Пример.

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2x-x^2 = -(x^2+2x-3) = -((x+1)^2-4) = \\ = 4-(x+1)^2;\, x+1 = z;\, x = z-1;\, dx = dz \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{2(z-1)-1}{\sqrt{4-z^2}}dz = \int \frac{2zdz}{\sqrt{4-z^2}} - 3\int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = -\int (4-z^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-z^2) -$$

$$-3\arcsin\frac{z}{2} = -2\sqrt{4-z^2} - 3\arcsin\frac{z}{2} + c = c - 2\sqrt{3-2x-x^2} -$$

$$-3\arcsin\frac{x+1}{2}\,.$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}};\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ldots;\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ вычисляются с помощью замены переменной $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, …, n_k; *a*, b, c, d – числа (c и d не равны нулю одновременно).

В частности, корень под знаком интеграла может быть один.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = (x+9=z^2, x=z^2-9; dx=2zdz; z=\sqrt{x+9}) =$$

$$= \int \frac{2zdz}{(z^2-9)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-9} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{z-3}{z+3}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + c\cdot$$

Пример 2.

$$\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx = (x=z^6; dx=6z^5dz; z=\sqrt[6]{x}) = \int \frac{(1+z)6z^5dz}{(1+z^2)z^3} =$$

$$= 6\cdot\int \frac{z^3+z^2}{1+z^2}dx\,.$$

Разделим числитель и знаменатель. Получаем

$$6\int (z+1+\frac{-z-1}{z^2+1})dz =$$

$$= 6\int (z+1)dz - 6\int \frac{zdz}{z^2+1} - 6\int \frac{dz}{z^2+1} = 6\cdot\left(\frac{z^2}{2}+z\right) -$$

$$-\frac{6}{2}\ln(z^2+1) -$$

$$-6arctgz + +c = 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) - 6arctg\sqrt[3]{x} + c$$

3. Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ вычисляются с помощью тригонометрических подстановок соответственно:

1. x=asinz; dx=acoszdz.
2. x=atgz; $dx = \frac{adz}{\cos^2 z}$.
3. $x = \frac{a}{\cos z}$; $dx = \frac{a\sin zdz}{\cos^2 z}$.

Пример 1.

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx=\left(x=tgz;dx=\frac{dz}{\cos^2 z}\right)=\int\frac{\sqrt{1+tg^2z}}{tg^4z}\cdot\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$$=\int\frac{dz}{tg^4z\cdot\cos^3 z}=\int\frac{\cos^4 zdz}{\sin^4 z\cdot\cos^3 z}=\int\frac{\cos zdz}{\sin^4 z}=$$

$$=\int\sin^{-4}zd\sin z==\frac{\sin^{-3}z}{-3}+c=$$

$$=c-\frac{1}{3\sin^3 z}=(ctgz=\frac{1}{x};1+ctg^2z=\frac{1}{\sin^2 z};\sin z=$$

$$=\sqrt{1+ctg^2z}==\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}==\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})=c-\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3x^3}$$

Пример 2.

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=(x=2\sin z;dx=2\cos zdz;\sqrt{4-x^2}=2\cos z)=$$

$$=\int 4\sin^2 z\cdot 2\cos z\cdot 2\cos zdz=16\int\sin^2 z\cdot\cos^2 zdz=$$

$$=16\cdot\frac{1}{4}\int\sin^2 2zdz=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 4z)dz=2\int dz-2\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4zd4z=2z-$$

$$-\frac{1}{2}\sin 4z+c=$$

$$=2z-\sin 2z\cdot\cos 2z+c=2z-2\sin z\cdot\cos z\cdot(1-2\sin^2 z)+$$

$$+c=2\arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{4-x^2}\cdot(1-2\cdot\frac{x^2}{4})+c=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\cdot(2-x^2)+c.$$

Контрольные вопросы

1. Первообразная функции
2. Неопределенный интеграл.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица основных интегралов.
5. Непосредственное интегрирование.
6. Интегрирование с помощью внесения функции под знак дифференциала
7. Основные методы интегрирования.
8. Формула интегрирования по частям.
9. Замена переменной в неопределенном интеграле.
10. Интегрирование простейших рациональных дробей.
11. Выделение целой части из непрерывной рациональной дроби.
12. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов.
13. Интегралы основных тригонометрических функций.
14. Понижение степени.
15. Замена переменной при интегрировании тригонометрических функций.
16. Универсальная тригонометрическая подстановка.
17. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
18. Замена переменной при интегрировании иррациональных функций.
19. Обратная подстановка.
20. Тригонометрические подстановки.
21. Интегралы от дифференциальных биномов. Подстановки Чебышева.
22. Подстановка Эйлера.

Глава 4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Определенный интеграл

Определённый интеграл является мощным средством в математике, механике, физике и других дисциплинах; это одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, длин дуг, объёмов, скорости, пути, моментов инерции и др. сводится к вычислению определенного интеграла.

Задача о площади

Пусть y=f(x) – непрерывная положительная функция, заданная на отрезке [a, b].

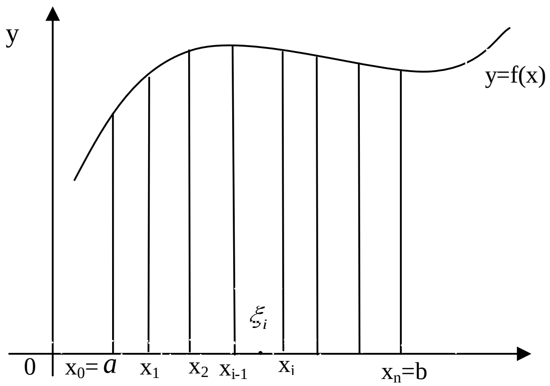


Рис. 1

Фигура, ограниченная кривой y=f(x), линиями $x=a$ и $x=b$ и осью OX называется *криволинейной трапецией.*

Вычислим площадь криволинейной трапеции. Для этого разобьём [a,b] произвольным образом на n частей точками $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}$. Полагая $x_0=a$, $x_n=b$, при разбиении получим n отрезков, длины которых обозначим $\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1,\ldots$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ldots$, $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$. Проведя через точки деления $x_1, x_{2,\ldots,} x_{n-1}$ вертикальные отрезки, мы разобьем криволинейную трапецию на n малых криволинейных трапеций. На каждом отрезке [x_{i-1}, x_i] выберем произвольную точку ξ_i. Обозначим площади малых криволинейных трапеций ΔS_1,

$\Delta S_2, \ldots,$ $\Delta S_i, \ldots,$ ΔS_n. Получим $\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1, \ldots,$ $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, \ldots,$ $\Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n$, а площадь данной криволинейной трапеции $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Эта формула тем точнее, чем больше число разбиений и чем меньше длина каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции примем $S = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Замечания

1) Если нужно вычислить площадь произвольной плоской фигуры, то это можно сделать путём разбиения фигуры на несколько криволинейных трапеций.

2) К нахождению предела сумм, аналогичным только что рассмотренной, приводит целый ряд задач естествознания. Поэтому естественно изучить этот предмет независимо от конкретного содержания той или иной задачи.

Определенный интеграл.

Пусть на $[a, b]$ задана функция y=f(x).Разобьём $[a, b]$ произвольным образом на n отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, где $a = x_0, b = x_n$, с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$.На каждом из этих отрезков выберем произвольн6ую точку : $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$ и вычислим значение функции y=f(x) в этой точке: $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_i), \ldots f(\xi_n)$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой функции y=f(x) на $[a, b]$.

Определенным интегралом функции y=f(x) на $[a, b]$ называется $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиений $[a, b]$ на Δx_i и от выбора точек ξ_i. Определенный интеграл обозначается: $\int_a^b f(x)dx$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования. Очевидно, что интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент функции. Следовательно, и определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.

Геометрический смысл определённого интеграла.

Из задачи о площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой y=f(x), f(x)$\geq$0 при $x \in [a, b]$ получаем $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Возникает вопрос: при каких условиях существует предел интегральной суммы, то есть определённый интеграл.

Теорема (существования определённого интеграла).

Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет на нём определённый интеграл.

Замечание. Теорема утверждает, что для существования определённого интеграла функции достаточно, чтобы эта функция была непрерывной на отрезке интегрирования. Однако определённый интеграл существует и для некоторых разрывных функций.

Перечислим свойства определённого интеграла (свойства 1 и 2 принимают по определению), предполагая, что соответствующие интегралы существуют.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^a f(x) = 0$.

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^a f(x)dx$, *k*-любое число

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx +$

$+\int\limits_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

5. Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a,b,c справедливо:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

6. Если f(x)$\geq$0 (f(x)$\leq$0) при всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ($\int_a^b f(x)dx \leq 0$).

7. Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$

8. ***Теорема*** (о среднем)

Если функция f(x) непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$, такая что

$$\int_a^b f9x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Доказательство. Функция f(x) непрерывна на $[a,b]$, поэтому она достигает на $[a,b]$ своих наименьшего *m* и наибольшего *M* значений, то есть $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a,b]$. По свойству 7 получаем:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a),$$

откуда

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M .$$

Непрерывная на [a,b] функция принимает все значения между *m* и *M*, поэтому существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \text{ или } \int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a) .$$

Геометрически теорема означает, что если f(x) непрерывна на $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника со сторонами f(c) и (b-a).

Производная интеграла по переменному верхнему пределу.

Пусть y=f(x) - непрерывна на $[a,b]$ и пусть в определённом интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел закреплён, а верхний предел меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла, то есть интеграл есть функция верхнего предела. Обозначим верхний предел через *x*, а переменную интегрирования через *t*. Получим функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

***Теорема*.**

Если f(x) – непрерывна на $[a,b]$ и $x\in[a,b]$ и $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$,то имеет место равенство

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \text{ и}$$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем существует точка $c\in[x;\Delta x]$ такая, что

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot\Delta x.$$

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c),$$

т.к. $\Delta x\to 0$, то и $c\to x$, поэтому

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$ в силу непрерывности функции y=f(x).

Из теоремы следует, что всякая непрерывная на [a , x] функция y=f(x) имеет первообразную $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема.

Если *F(x)* есть какая-либо первообразная от непрерывной на [a ,b] функция f(x), то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Доказательство. *F(x)* – первообразная функции f(x); по предыдущей теореме $\int\limits_a^x f(t)dt$ тоже первообразная функции f(x). Две первообразные одной функции отличаются на постоянное слагаемое, то есть $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C$.

Равенство справедливо при любых $x\in[a;b]$. В частности, при $x=a$ находим $C=-F(a)$.

Следовательно $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$ полагая $x=b$, получаем $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Таким образом определённый интеграл равен приращению первообразной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример.

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\ \Big|_0^{0,5}=\arcsin 0,5-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}.$$

Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема.

Пусть функция y=f(x) непрерывная на [a, b], а функции $x=\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, где $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть *F(x)*первообразная для f(x), тогда $F(\varphi(t))$- первообразная для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Действительно, $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=(F(\varphi(t)))'$. Получаем $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=$

$$F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Пример.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$x=\sin t$$

$t=\arcsin x$

x	0	1
t	0	$\pi/2$

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывны вместе со своими производными на $[a, b]$. Тогда $d(u\cdot v)=udv+vdu.$

Проинтегрируем обе части неравенства в пределах от a до b.

$$\int_a^b d(u\cdot v)=a\int_a^b u\cdot dv+\int_a^b v\cdot du.$$

Но $\int\limits_a^b d(uv) = u\cdot v\Big|_a^b$, поэтому $\int\limits_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Пример.

$$\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$$

$$u = x, \cos x dx = dv$$

$$du = dx, v = \sin x$$

4.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площади.

1. Мы уже установили, что если y=f(x)$\geq$0 и непрерывна на [a , b], то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком y=f(x) с основанием [a , b] вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

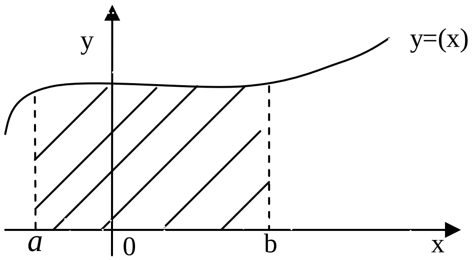


Рис. 2

2. Пусть теперь непрерывная функция y=f(x)<0 на [a , b]. Криволинейная трапеция с основанием [a , b] снизу ограничена графиком y=f(x) . Из симметрии заключаем, что её площадь равна площади криволинейной трапеции с основанием [a , b] и ограниченной сверху кривой y=-f(x)>0. Поэтому $S = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

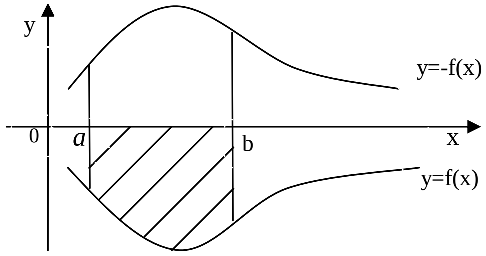


Рис. 3

Объединяя оба случая, получаем $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Последняя формула справедлива и в том случае, когда функция y=f(x) на [a , b] меняет знак.

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=cos x, осями ординат и прямой x= π .

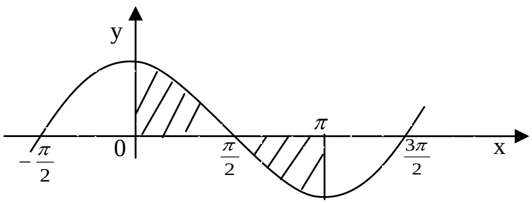


Рис. 4

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = +\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2 \cdot$$

3. Пусть теперь фигура ограничена сверху линией y=f(x), снизу $y=\varphi(x)$ и прямыми x= a , x=b.

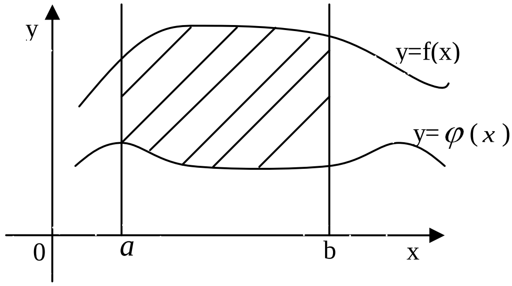


Рис. 5

Площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций.

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{или} \quad S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx.$$

Формула справедлива при любом расположении графиков y=f(x) и y$=\varphi(x)$ при условии $f(x)\geq\varphi(x)$ на [a , b].

Пример.

Вычислить площадь, ограниченную линиями y=$-x^2$,y=e^x, x=0, x=1.

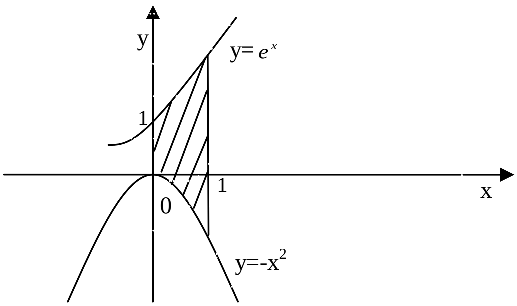


Рис. 6

$$S=\int_0^1 (e^x+x^2)dx=(e^x+\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=e-1+\frac{1}{3}=e-\frac{2}{3}$$

4. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пусть кривая, ограничивающая криволинейную трапецию сверху, задана параметрически: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ (1), где $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, x(t), y(t), x'(t), y'(t) – непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

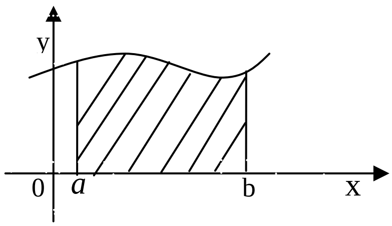


Рис. 7

Пусть уравнения (1) определяют на [a , b] функцию y=f(x). В этом случае площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt.$$

Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды:x= a (t-sin t), y= a (1-cos t).

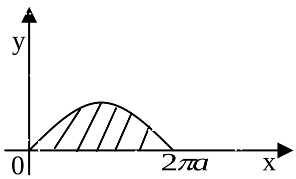


Рис. 8

$$S=\int_0^{2\pi} a\cdot(1-\cos x)\cdot a\cdot(t-\sin t)'\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+a^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=a^2\cdot 2\pi+\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi\cdot a^2+\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi=3\pi a^2$$

Замечание. Если нужно вычислить площадь произвольной фигуры, то это можно сделать, разбив фигуру на несколько криволинейных трапеций.

5. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат.

Пусть функция $\rho=\rho(\varphi)$ непрерывна при $\varphi\in[\alpha,\beta]$.

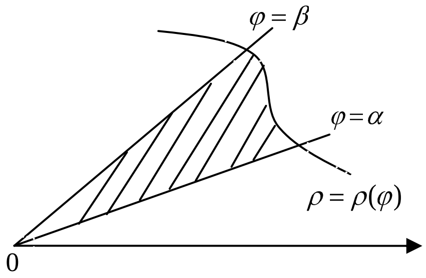


Рис. 9

Площадь изображенного на рис. 9 криволинейного сектора вычисляется по формуле: $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$

Площадь более сложных фигур вычисляется путём их разбиения на криволинейные секторы, или их представления в виде разности криволинейных секторов.

Пример.

Найти площадь, ограниченную лемнискатой $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

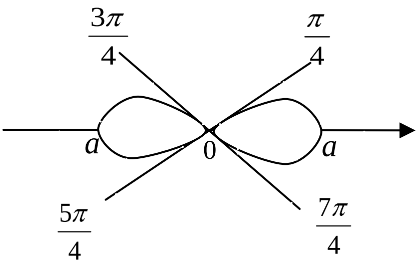


Рис. 10

В силу симметрии $S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = 2 \cdot a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi =$

$= a^2 \cdot \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$.

Вычисление длины дуги кривой.

1. Пусть кривая задана уравнением y=f(x), где f(x) и f'(x) непрерывны на [a , b].

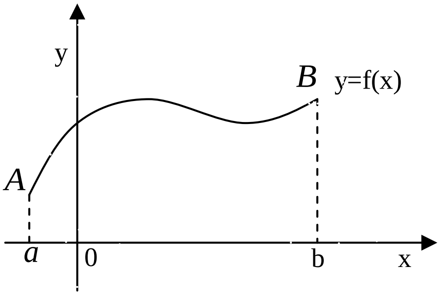


Рис. 11

Длина кривой AB вычисляется по формуле: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

2. Пусть кривая задана в параметрической форме x=x(t), y=y(t), t $\in [\alpha, \beta]$, причём x(t), y(t), x'(t) $\neq$ 0, y'(t) непрерывны на $[\alpha, \beta]$,

$x(\alpha)=a, x(\beta)=b.$ Длина кривой АВ (см.рис 11) вычисляется по формуле $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

Аналогичная формула при аналогичных условиях имеет место для кривой, заданной в пространстве уравнениями x=x(t), y=y(t), z=z(t) при $t\in[\alpha,\beta]$.

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Пример.

Вычислить длину дуги винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$ при изменении t от 0 до 2π.

$$x'(t)=-a\sin t,\ y'(t)=a\cos t,\ z'(t)=a.$$

$$l=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2}\,dt=\int\limits_{0}^{2\pi}a\sqrt{2}\,dt=$$

$$=a\sqrt{2}\cdot t\Big|_0^{2\pi}=2\sqrt{2}\pi a$$

3. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, причем $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны при $\varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$. Длина кривой в этом случае вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример.

Вычислим длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

$\rho'(\varphi)=-a\cdot\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Учитывая симметрию,

$$l=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=2a\int\limits_{0}^{\pi}2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

4.3. Несобственный интеграл

Понятие определённого интеграла было введено в предположении, что областью интегрирования является конечный отрезок[a , b] .

Пусть теперь функция f(x) непрерывна на промежутке [a ; $+\infty$).

Если существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (b> a), то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a ; $+\infty$) и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то есть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Геометрический смысл.

Пусть f(x) $\geq$ 0 при $x \in [a,+\infty)$, тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной области, заключенной между линиями y=f(x), x= a и осью OX.

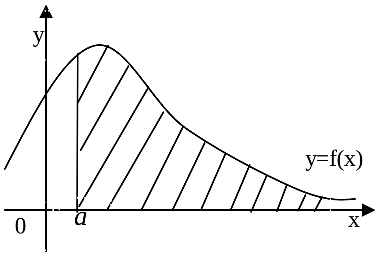


Рис. 12

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Последнее равенство нужно понимать так: если каждый из несобственных интегралов в правой части сходится, то сходится и интеграл в левой части; если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то расходится и интеграл в левой части.

Пример.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb - arctg0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть функция y=f(x) непрерывна при $x \in [a, b)$, а при $x = b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае $\int_a^b f(x)dx$ не является определённым интегралом, так как предел интегральной суммы на [a , b] может и не существовать.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом функции y=f(x), разрывной в точке b. Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Аналогично определяются интегралы:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a+} \int\limits_c^b f(x)dx$, если функция f(x) непрерывна на (a, b]

и терпит разрыв в точке a, и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$,

если функция непрерывна на $[a, c) \cup (c, b]$ и терпит разрыв в точке c.

Интеграл в левой части последнего равенства сходится, если сходятся оба интеграла в правой части и расходится, если один хотя бы один из интегралов в правой части расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов.

Часто достаточно установить сходится данный несобственный интеграл или расходится, не вычисляя его. Для этих целей применимы следующие теоремы, которые мы приведем без доказательства.

Теорема 1.

Пусть в промежутке $[a, +\infty)$ функции *f(x)* и $\varphi(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию $0 \le \varphi(x) \le f(x)$. Тогда

а) если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$;

б) если $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема 2.

Пусть в промежутке $[a, b)$ функций *f(x)* и $\varphi(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, а в точке x=b имеют разрыв. Тогда

а) если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

б) если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример.

Выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Заметим, что $\dfrac{1}{x^2(1+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$, так как 1+e ^{x} >1 при любых *x*.

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} (-\dfrac{1}{x}) \Big|_1^b = 1$, следовательно $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+e^x)}$ сходится по теореме 1.

Пример.

Выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}$.

Подынтегральная функция имеет разрыв при x=0.

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \in (0,1]$. $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$, следовательно, данный интеграл сходится по теореме 2.

Контрольные вопросы

1. Задача о площади криволинейной трапеции.
2. Определение определённого интеграла.
3. Геометрический смысли определённого интеграла.
4. Свойства определённого интеграла.
5. Свойство аддитивности определённого интеграла.
6. Оценка определённого интеграла.
7. Теорема о среднем значении.
8. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Геометрические приложения определённого интеграла.
10. Вычисление площади фигур с помощью определённого интеграла в декартовой системе координат.
11. Вычисление площади фигур с помощью определённого интеграла в полярной системе координат.
12. Вычисление длин кривых с помощью определённого интеграла в декартовой системе координат.
13. Вычисление длин кривых с помощью определённого интеграла в полярной системе координат.
14. Вычисление объёмов тел вращения.
15. Несобственный интеграл с конечными пределами от разрывной функции.
16. Сходимость и расходимость несобственных интегралов.
17. Абсолютная сходимость несобственных интегралов.

Глава 5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Основные понятия

Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой упорядоченной паре чисел (x;y), принадлежащей множеству M, ставится в соответствие единственное действительное число z, принадлежащее множеству L. Множество M называется областью определения функции. Множество L называется областью значения функции при условии, что каждое $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x;y) \in M$.

Функцию двух переменных обозначают: z=f(x; y), где x,y – независимые переменные.

Аналогично определяются функции трёх, четырёх и так далее независимых переменных.

Функции нескольких переменных обычно задаются аналитическим способом, иногда табличным.

Если функция задана аналитически и область определения не указывается, то её областью определения (естественной) считают множество всех значений переменных, при которых выражение, задающее функцию имеет смысл.

Пример.

Найти область определения функции $y = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Должно выполняться условие: $1 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 1$.

Для функции двух переменных каждую пару чисел (x, y) можно изобразить точкой плоскости P(x, y). Таким образом область определения представляет собой множество точек плоскости, а функцию можно рассматривать, как функцию точки: f(x; y)=f(p). В нашем примере, областью определения есть внутренность круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

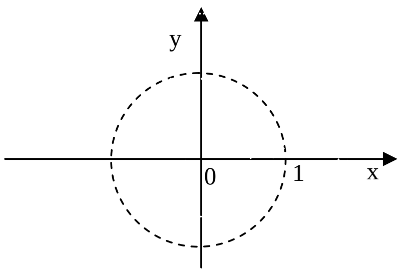


Рис. 13

Точки, лежащие на этой окружности, не входят в область определения.

Графиком функции двух переменных z=f(x,y) в прямоугольной системе координат называют множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению z=f(x,y).

Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является эллиптический параболоид.

5.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

δ – окрестностью $U_{p_0}^{\delta}$ точки $p_0(x_0, y_0)$ называется внутренность круга δ с центром в точке p_0.

Окрестностью бесконечности называется внешность любого круга.

Число A называется пределом функции z=f(x,y) при $p_{(x,y)} \to p_0$ (p_0 – конечно или ∞), если для любого числа ε >0 существует такая $\overset{\circ}{U}{}_{p_0}^{\delta}$, что для всех p(x, y) $\in \overset{\circ}{U}{}_{p_0}^{\delta}$ выполняется равенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{p \to p_0} f(x,y) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Функция z=f(x,y) называется бесконечно малой при $p \to p_0$, если $\lim\limits_{p \to p_0} f(x,y) = 0$.

Функция z=f(x,y) называется непрерывной в точке $p_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой окрестности точки p_0 и $\lim\limits_{p \to p_0} f(x,y) = f(x_0, y_0) = f(p_0)$.

Свойства непрерывных в точке функций.

Пусть функции двух переменных $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ непрерывны в точке $p_0(x_0, y_0)$. Тогда в этой точке непрерывны функции $\varphi(p) \pm \psi(p)$, $\varphi(p) \cdot \psi(p)$ и $\dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}$. Последнее при условии, что $\psi(p_0) \neq 0$.

Областью (открытой областью) называется множество точек плоскости обладающих двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (открытость);

2) любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области(связность).

Точка называется граничной точкой области, если любая окрестность этой точки содержит как точки области, так и точки, ей не принадлежащие. Множество всех граничных точек называется границей области.

Если к открытой области присоединить её границу, то полученное множество называется замкнутой областью.

Область называется ограниченной, если она целиком лежит в некотором круге конечного радиуса. Если же такого круга не существует, то область называется неограниченной.

Точка p_0 называется точкой разрыва функции f(p),если она принадлежит области определения этой функции или её границе и не является точкой непрерывности.

Сформулируем без доказательства свойства функции, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

Теорема Вейерштрасса.

Если функция z=f(p) непрерывна в ограниченной замкнутой области G, то она в этой области ограничена и достигает своих наименьшего m и наибольшего M значений.

Теорема Больцано-Коши.

Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области и m, M её наименьшее и наибольшее в *G* значения, то для любого числа l: m< l <M существует хотя бы одна точка $p_0 \in G$ такая, что $f(p_0) = l$

Следствие.

Если в области G функция f(p) принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в области G существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.

5.3. Частные производные

Рассмотрим функцию z=f(x,y). Дадим *x* приращение Δx , не меняя *y*. Приращение $f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = \Delta_x z$ называется частным приращением z по x.

Аналогично, если x не меняется, а y получает приращение Δy , то приращение $f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta_y z$ называется частным приращением z по y.

Если же x получает приращение Δx и y-приращение Δy, то приращение $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta z$ называется полным приращением функции z.

Пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки $p_0(x_0, y_0)$. Зафиксируем значение одной из переменных, например, положим $y=y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ есть функция одной переменной x.

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует, называется частной производной (I порядка) функции z=f(x,y) по x в точке (x_0, y_0) и обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$; $f'_x(x_0, y_0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Аналогично: $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ называется частной производной (I порядка) функции z=f(x,y) по y в точке (x_0, y_0) и обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$; $f'_y(x_0, y_0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Аналогично определяются частные производные по каждому из аргументов для функции многих переменных.

Например, для функции U=f(x,y,z). $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ и так далее.

Частные производные высших порядков.

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных, для них тоже могут существовать свои частные производные, которые называются частными производными II порядка исходной функции.

Например, для функции z=f(x,y) $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,

$\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ являются частными производными II порядка.

Аналогично определяются частные производные III, IV и так далее порядков. Вообще, частной производной n-го порядка функции многих переменных называется частная производная I порядка от частной производной (n-1)-го порядка этой функции.

Заметим, что частная производная берётся по одной из переменных, а остальные переменные при этом являются постоянными. Поэтому частное дифференцирование не требует никаких новых правил и обладает всеми свойствами производных функций одной переменной.

Пример.

$z=x^2y^3$.Вычислить частные производные II порядка функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot y^3,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2\cdot y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^2\cdot y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6xy^2.$$

Частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6xy^2$ называются смешанными.

Две частные смешанные производные II порядка функции z=f(x, y) равны между собой при условии их непрерывности.

5.4. Полный дифференциал

Если полное приращение функции z=f(x, y) в точке p(x, y) можно представить в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+O(\rho), \qquad (1)$$

где $\Delta x,\Delta y$ – любые приращения переменных x и y в некоторой окрестности точки p;

A и B – величины, не зависящие от Δx и Δy;

$O(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ (то есть $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{O(\rho)}{\rho}=0$), то функция z=f(x, y) называется дифференцируемой в точке p, а главная часть приращения, линейная относительно Δx и Δy, называется полным дифференциалом z=f(x, y) в точке p и обозначается

$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y.$$

Теорема.

Если функция z=f(x, y) дифференцируема в точке p(x, y), то она имеет в точке p первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Доказательство. Функция z=f(x, y) дифференцируема в точке p(x, y), поэтому $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + O(\rho)$. Эта формула справедлива для любых достаточно малых Δx и Δy, в том числе при $\Delta y = 0$. Но при $\Delta y = 0$:

$\Delta z = \Delta_x z = A \cdot \Delta x + O(\rho)$, отсюда $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \frac{O(\rho)}{\Delta x}$.

Переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ и получаем $\frac{\partial z}{\partial x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\rho)}{\Delta x}$.

Вычислим $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\rho)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\rho)}{\pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \pm \lim_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} = 0$, так как $O(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ. Следовательно $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично можно показать, что $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Таким образом $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

Дифференциалом независимой переменной называется её приращение: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда получаем $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$ (2).

Теорема.

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции z=f(x, y) непрерывны в некоторой окрестности точки p(x ,y), то эта функция в точке p(x ,y) дифференцируема.

Пример.

Найти полный дифференциал функции z=x y^2 в произвольной точке.

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$. Следовательно $dz = y^2 dx + 2xydy$.

5.5. Скалярное поле

Часть пространства или всё пространство, в каждой точке p(x,y,z) которого задана скалярная функция U=F(x, y, z)=F(p), называется скалярным полем, а функция U= F(p) называется функцией поля.

Например, неоднородное тело с плотностью U=U(x, y, z) можно рассматривать как скалярное поле.

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению F(x, y, z)=C (C=const).

Давая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

Наряду с пространственными скалярными полями рассматривают плоские скалярные поля с функцией поля z=f(x, y).

Линией плоского скалярного поля называется множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению f(x, y)=c (c=const).

Например, для поля, заданного функцией $z=x^2-y^2$ линиями уровня являются гиперболы $x^2 - y^2 = c$ и их асимптоты, так как при c=0 получаем $x^2 - y^2=0$ или (x+y)(x-y)=0, откуда x+y=0 и x-y=0.

Производная по направлению. Градиент.

Пусть z=f(x, y) – дифференцируемая функция скалярного поля. Вектор $\overline{l_0} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j}$, где α, β – углы вектора $\overline{l_0}$ с осями координат, задает некоторое направление. Пусть точки M(x, y) и M($x + \Delta x, y + \Delta y$) таковы, что $\overline{MM_1} \parallel \overline{l_0}$. Обозначим $\Delta l = MM_1$ – величина приращения точки M.

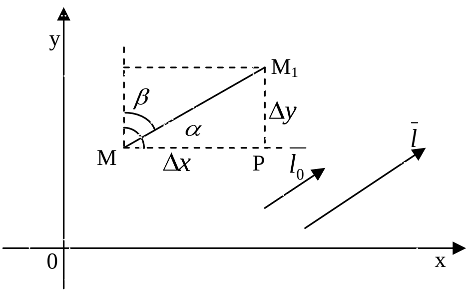


Рис. 14

Разность $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется приращением функции z в направлении $\bar{l}$ в точке M.

Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l z}{\Delta l}$, то он называется производной функции z по направлению $\overline{l}$ в точке М и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ это скорость изменения функции в точке М по направлению $\overline{l}$.

Если $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ >0, то функция z возрастает в точке М в направлении $\overline{l}$, если $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ <0, то убывает.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению.

По условию функция z дифференцируема в точке М, поэтому

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + O(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Разделим обе части на Δl и перейдем к пределу при $\Delta l \to 0$. Получим

$\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l z}{\Delta l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{O(\rho)}{\Delta l}$, так как $\Delta l = \pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pm\rho$, то $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{O(\rho)}{\Delta l} = \pm\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{O(\rho)}{\rho} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \cdot$$

Аналогично для функции трёх переменных U=(x, y, z) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\overline{l_0} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $\overline{l_0} \parallel \bar{l}$.

Градиентом дифференцируемой функции U=F(x, y, z) в точке P(x, y, z) называется вектор

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$$

То есть $gradU = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$

Таким образом каждой точке P(x, y, z) скалярного поля с дифференцируемой функцией U=F(x, y, z) соответствует определённый вектор $gradF(P)$.

Теорема.

Производная скалярного поля в данном направлении в некоторой точке P равна проекции градиента поля в точке P на данное направление.

Доказательство. Пусть $\overline{l_0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, $\overline{l_0} \| \bar{l}$, тогда $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = gradu \cdot \overline{l_0} = |gradu| \cdot |\overline{l_0}| \cdot \cos\varphi = |gradu| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между $\bar{l}$ и $gradu$, следовательно $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = np_{\bar{l}}\, gradu.$

Следствие. Градиент скалярного поля в данной точке указывает направление наибольшего возрастания поля и имеет модуль, равный скорости этого возрастания.

5.6. Экстремумы функции двух переменных

Пусть функция z=f(x, y) задана в некоторой области G. Функция z=f(x, y)=f(p) имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ области G максимум, если существует U_{p_0} такая, что для всех $P(x, y) \in U_{p_0}$ и $P(x, y) \neq P_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство $f(P_0)>f(P)$. Точка P_0 называется точкой максимума. Если же при тех же условиях выполняется неравенство $f(P_0)<f(P)$, то функция z=f(x, y) имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ минимум, а точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой минимума. Максимум и минимум называются экстремумами.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума)

Пусть функция z=f(x, y) в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум и пусть существует $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$. Тогда $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0.$

Доказательство. Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ функции f(x, y) по x в точке $P_0(x_0, y_0)$ есть производная функции одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$ в точке $x=x_0$. В этой точке функция $\varphi(x)$, очевидно, имеет экстремум. Поэтому $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых первые частные производные функции двух переменных обращаются в 0 или не $\exists$, называются критическими точками этой функции.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимум в точке $O(0,0)$, но в этой точке частные производные $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ не существуют.

Таким образом, точки экстремумов функции нужно искать среди её критических точек.

Однако существуют критические точки, которые не являются точками экстремума.

Рассмотрим функцию z=xy. $z'_x = y, z'_y = x$. Критической точкой, очевидно, является точка $P_0(0,0)$, но она не является точкой экстремума.

Сформулируем без доказательства достаточное условие существование экстремума.

Пусть для функции z=f(x, y) в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ существуют производные $f_{xx}''(P_0)$, $f_{yy}''(P_0)$, $f_{xy}''(P_0)$. Выражение

$f_{xx}''(P_0) \cdot f_{yy}''(P_0) - [f_{xy}''(P_0)]^2 = \Delta(P_0)$ назовём дискриминантом функции z=f(x, y) в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Возможны три случая:

1) $\Delta(P_0) > 0$, тогда точка P_0 – точка экстремума:

при $f_{xx}''(P_0) > 0$ – точка минимума;

при $f_{xx}''(P_0) < 0$ – точка максимума.

2) $\Delta(P_0) < 0$, тогда P_0 не является точкой экстремума.

3) $\Delta(P_0) = 0$ – сомнительный случай: экстремум может быть, может и не быть. Нужно дополнительное исследование.

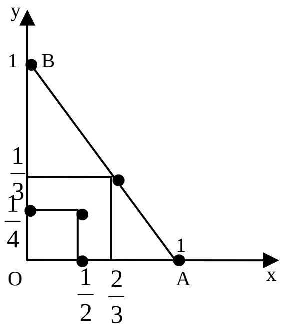
5.7. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных, заданной в замкнутой ограниченной области

Пусть функция z=f(x,y) непрерывна в ограниченной замкнутой области G, следовательно она достигает в области G своего наибольшего и наименьшего значения. Если наибольшее и наименьшее значение функция принимает во внутренних точках области G, то эти точки, очевидно, являются точками экстремума. Таким образом, непрерывная функция z=f(x,y) достигает свои наибольшие и наименьшие значения в ограниченной замкнутой области либо в экстремальных точках, либо на границе области G.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=1-x+x^2+2y^2-y$ в области G: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$.

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-1+2x=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y-1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)\in G$.

2)



Исследуем границу области:

а) [OA]: $y=0, z=1-x+x^2, 0\le x\le 1. z'=-1+2x=0; x=\dfrac{1}{2}; \left(\dfrac{1}{2};0\right)-$ критическая точка.

б) [OB]: $x=0, z=1+2y^2-y, 0\le y\le 1. z'_y=4y-1=0; y=\dfrac{1}{4}; \left(0;\dfrac{1}{4}\right)-$ критическая точка

в) [AB]:
$y=1-x, z=1-x+x^2+2(1-2x+x^2)-1+x=3x^2-4x+2, 0\le x\le 1.$

$z'_x=-4+6x=0; x=\dfrac{2}{3}\in[0,1]; y=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}; \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)-$ критическая точка.

$$z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

$$z\left(0;\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{16}-\frac{1}{4}=1+\frac{1}{8}-\frac{2}{8}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$z\left(\frac{1}{2};0\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4-2+1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$z(0;1)=1+2-1=2$$

$$z(1;0)=1-1+1=1$$

$$z(0;0)=1$$

$$z\left(\frac{2}{2};\frac{1}{3}\right)=1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=\frac{9-6+4+2-3}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Ответ:

$$z_{наиб}(0;1)=2$$

$$z_{наим}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$$

Контрольные вопросы

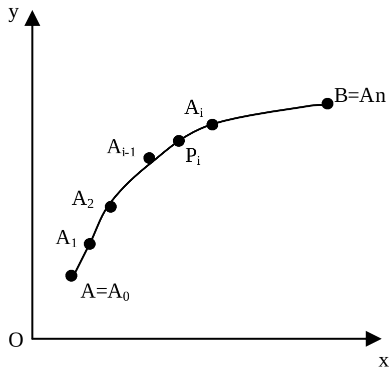
1. Функция нескольких переменных.
2. Область определения функции нескольких переменных.
3. График функции двух переменных.
4. Линии уровня функции двух переменных.
5. Поверхности уровня функции трех переменных.
6. Окрестность точки на плоскости.
7. ε – окрестность точки на плоскости.
8. Окрестность бесконечности на плоскости.
9. ε – окрестность бесконечности на плоскости.
10. Окрестность точки в пространстве.
11. ε – окрестность точки в пространстве.
12. Окрестность бесконечности в пространстве.
13. ε – окрестность бесконечности в пространстве.
14. Предел функции нескольких переменных.
15. Непрерывность в точке и в ограниченной замкнутой области функций двух и трех переменных.
16. Непрерывность функции двух и тех переменных в ограниченной замкнутой плоскости.
17. Частные приращения функций нескольких переменных.
18. Полное приращение функций нескольких переменных.
19. Частные производные функции нескольких переменных.
20. Частные производные высших порядков.
21. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
22. Связь полного дифференциала и частных производных.

23. Полные дифференциалы высших порядков.
24. Дифференцирование сложных функций.
25. Дифференцирование неявно заданных функций.
26. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
27. Экстремумы функций нескольких переменных.
28. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных
29. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.
30. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.
31. Скалярное поле, функция поля.
32. Определение градиента скалярного поля.
33. Геометрический смысл градиента.
34. Определение производной по направлению.
35. Геометрический смысл производной по направлению.
36. Связь производной по направлению и градиента.

Глава 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Криволинейный интеграл по длине дуги (I рода)

Задача о массе дуги:



Обозначим $\cup$AB=l. Пусть вдоль дуги l распределена масса с линейной плотностью f(x;y). Разобьем $\cup$AB произвольным образом на n непересекающихся частей $\Delta l_i, i=1,...,n$. Пусть m-масса $\cup$AB, $m_1, m_2,..., m_n$ -массы участков $\Delta l_1, \Delta l_2,..., \Delta l_n, m=\sum_{i=1}^{n} m_i$. На каждом участке Δl_i выбираем произвольную точку $p_i(x_i, y_i)$. Будем считать, что плотность в каждой точке малой дуги Δl_i постоянна и равна плотности в точке p_i ,т.е. $f(x_i, y_i)$, тогда $m_i \approx f(x_i; y_i)\cdot\Delta l_i$ и $m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\cdot\Delta l_i$.

Под массой дуги будем понимать $m=\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta l_i$

Определение криволинейного интеграла I рода

Пусть в каждой точке дуги l определена функция z=f(x;y). Разобьем l произвольно на n непересекающихся частей: $\Delta l_1, \Delta l_2,..., \Delta l_n$. На каждом участке $\Delta l_i, i=1,...,n$ выберем произвольную точку $p_i(x_i,y_i)$ и рассмотрим предел $m=\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i\to 0)}}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i$.

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения дуги на части Δl_i и от выбора точек p_i, то он называется криволинейным интегралом от функции $z=f(x_i,y_i)$ по длине дуги l или криволинейным интегралом I рода.

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i$ называется интегральной суммой функции $z=f(x,y)$ по дуге *l*.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i\to 0)}}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i = \int\limits_l f(x,y)dl$, dl называется дифференциалом дуги.

Геометрический смысл: если $f(x,y)\equiv 1$, то длина дуги $l=\int\limits_l dl$.

Масса дуги *l* $m=\int\limits_\gamma \gamma(x,y)dl$ - физический смысл.

Теорема существования:

Пусть $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой области D, и пусть кривая $l\in D$. Тогда существует $\int\limits_l f(x,y)dl$.

Вычисление криволинейного интеграла I рода.

Пусть кривая *l* задана уравнением: $y=\varphi(x), a\le x\le b$.

Тогда $dl=\sqrt{1+(\varphi_x')^2}dx$ и $\int\limits_\gamma f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi_x'^2}dx$. Пусть кривая *l* задана параметрически уравнениями: $x=x(t), y=y(t), \alpha\le t\le\beta$. Тогда $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt$ и

$$\int\limits_\gamma f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt$$

Пусть кривая l задана в полярной системе координат: $\rho=\rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$ Тогда $dl=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi$ и

$$\int\limits_\gamma f(x,y)dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Замечание. Криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от выбора направления интегрирования. Свойства криволинейного интеграла I рода аналогичны свойствам определенного интеграла.

Пример. Найти массу дуги кривой l: $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x=1, x=2,$ если плотность

$$\gamma=x^2.m=\int\limits_l x^2 dl=\int\limits_1^2 x^2.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int\limits_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1)=$$

$$\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})\approx 2.784$$

6.2. Криволинейный интеграл по координатам (II рода)

Пространство или часть пространства, каждой точке М которого поставлен в соответствие вектор $\overline{\Phi}$, называется векторным полем.

Проекции вектора поля $\overline{\Phi}$ на координатные оси есть функции координат точки М.

Обозначим $\overline{\Phi}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ -для пространства. Векторное поле может быть плоским: (плоскость - часть пространства). $\overline{\Phi}=P(x,y)\bar{i}+Q(x,y)\bar{j}$ - для плоскости.

Задача о работе.

Пусть материальная точка М(x,y) движется по кривой l от точки В до точки С под действием силы $\overline{\Phi}=P(x,y)\bar{i}+Q(x,y)\bar{j}$, которая меняется при перемещении точки. Требуется найти работу А силы поля $\overline{\Phi}$ при перемещении точки М из положения В в положение С. Для прямолинейного участка (рис. 17а) работа $A=\overline{\Phi}\cdot\bar{l}$. Разобьем l на n произвольных частей $\Delta l_1,\Delta l_2,...,\Delta l_n$, точками $A_0=B, A_1, A_2,...,A_n=C$ и впишем в кривую l ломаную, $A_0A_1A_2...A_n$. На каждой дуге Δl_i выберем произвольную точку $p_i(x_i,y_i)$. Заменим кривую l ломаной, а силу $\overline{\Phi}$, которая, вообще говоря, меняется по величине и напралению от точки к точке, будем считать постоянной вдоль каждого звена ломаной $A_{i-1}A_i$ и равной силе в точке M_i дуги Δl_i. Тогда работа силы $\overline{\Phi}(M_i) = P(x_i, y_i)\bar{i} + Q(x_i, y_i)\bar{j}$ вдоль дуги Δl_i приблизительно равна работе вдоль звена ломаной $A_{i-1}A_i$ и равна $\overline{\Phi}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i}$. Тогда вся работа по перемещению точки М от В к С $A \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i}$ или в координатной форме $A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right] (*)$, где $\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \bar{i} + \Delta y_i \cdot \bar{j}$.

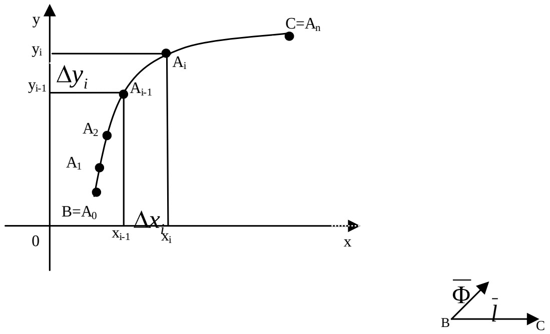


Рис. 17

За точное значение работы примем $A = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$, если этот предел существует.

Сумма вида (*) называется интегральной суммой для вектор-функции $\overline{\Phi}(x, y, z)$.

Для пространства аналогично $A = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i\right]$.

Определение криволинейного интеграла II рода.

Пусть в некоторой области трехмерного пространства задана непрерывная кривая $l = \cup BC$ и вектор-функция

$\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, определенная в каждой точке кривой *l*. Разобьем дугу *l* произвольным образом точками $A_0 = B, A_1, A_2, ..., A_n = C$ на n дуг $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. На каждой дуге Δl_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Найдем скалярное произведение векторов $\overline{\Phi}(M_i) = P(x_i, y_i, z_i)\bar{i} + Q(x_i, y_i, z_i)\bar{j} + R(x_i, y_i, z_i)\bar{k}$ и $\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \bar{i} + \Delta y_i \cdot \bar{j} + \Delta z_i \bar{k}$.

$$\overline{\Phi}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i .$$

Передел

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \right]$$

называется криволинейным интегралом по координатам (II рода) от вектор-функции $\overline{\Phi} = P\bar{i} + Q\bar{i} + R\bar{i}$ вдоль кривой *l* в направлении от B к C, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой на участки Δl_i, и от выбора точек M_i.

Обозначение

$$\int_{BC} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Таким образом работа $A = \int_{l} Pdx + Qdy + Rdz$ - это физический смысл.

Так как подынтегральное выражение есть скалярное произведение вектора $\overline{\Phi} = P\bar{i} + Q\bar{i} + R\bar{i}$ и дифференциала $d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$ радиуса-вектора $\bar{r}$ переменной точки кривой *l*, то криволинейный интеграл можно записать в векторной форме $\int_{l} \overline{\Phi} d\bar{r}$

Теорема существования. Пусть кривая *l* в параметрической форме задана уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, где x(t), y(t), z(t) – функции, имеющие непрерывные производные I порядка при $\alpha \le t \le \beta$. Тогда для любой вектор-функции $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, непрерывной вдоль этой кривой, существует криволинейный интеграл II рода вдоль кривой *l*.

Свойства криволинейного интеграла II рода.

1. Значение криволинейного интеграла зависит от направления, в котором проходится кривая *l*. Если кривую *l* проходить в обратном направлении, то значение криволинейного интеграла изменит знак: $\int\limits_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{CB} Pdx + Qdy + Rdz$. Это объясняется тем, что при изменении направления обхода кривой $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, входящие в интегральную сумму, изменят свои знаки.

2. Аддитивность. Если кривая *l* состоит из нескольких непересекающихся кривых $l_1, l_2, ..., l_k$, то

$$\int\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{l_1} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{l_2} Pdx + Qdy + Rdz + ... + \int\limits_{l_k} Pdx + Qdy + Rdz.$$

При этом предполагается, что все кривые $l_1, l_2, ..., l_k$ проходятся в одном направлении.

Вычисление криволинейного интеграла II рода.

Пусть кривая $l = \cup BC$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta$, причем функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные I порядка. Пусть точке B соответствуют значения параметра $t = \alpha$, а точке C соответствует $t = \beta$. Пусть $P(x, y, z), Q(x, y, z) R(x, y, z)$-непрерывные функции вдоль кривой *l*. Тогда

$$\int\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\big] dt \quad (**)$$

В частном случае, пусть плоская кривая *l* задана уравнением $y = \varphi(x)$ и при интегрировании вдоль *l* x изменяется от *a* до *b*. В плоском случае в формуле (**) нужно положить z=0. x будем считать параметром, то есть *l* задана параметрически $l: \begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = 0 \end{cases}$, тогда

$$\int\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = \int\limits_{a}^{b} \big[P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\big] dx$$

Пример. Вычислить $Y = \int\limits_{AB} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, где $\cup AB$ есть один виток винтовой линии $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases}$. Один виток винтовой линии соответствует изменению параметра от 0 до 2π.

1)

$$Y = \int\limits_0^{2\pi} \left(-2\cos t \sin^2 t + \sin^2 t \cos t + 8t^2\right) dt = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + 8t^2) dt =$$

$$-\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t d \sin t + 8\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64\pi^3}{3}.$$

2) Вычислить $Y = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ вдоль дуги $y = x^3$ от точки A(1,1) до B(2,8). $Y = \int\limits_1^2 (x^2 + x^6 + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 + x^7\Big|_1^2 = 129\frac{1}{3}$.

Криволинейный интеграл $\oint\limits_l \overline{\Phi} d\bar{r}$ по замкнутому контуру *l* называется циркуляцией векторного поля $\overline{\Phi} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ по замкнутому контуру *l*.

Формула Остроградского-Грина

Формула Остроградского-Грина связывает двойной интеграл по некоторой плоской области σ и криволинейный интеграл по границе *l* этой области.

Пусть в области σ заданы непрерывные функции $P(x, y) u Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y} u \frac{\partial Q}{\partial x}; l$ – граница области σ, тогда имеет место формула Остроградского-Грина: $\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где *l* обходится против часовой стрелки. Такой обход называется положительным.

Пологая в формуле Остроградского-Грина $P(x,y)\equiv 0, Q(x,y)=x$, получим $\iint\limits_{\sigma} dxdy = \oint\limits_{l} xdy$ или $S=\oint\limits_{l} xdy$ - формула площади области σ.

Аналогично пологая $P=-y, Q\equiv 0$, получим $S=-\oint\limits_{l} ydx$.

Складывая почленно эти равенства и умножая на $\frac{1}{2}$ обе части, получим $S=\frac{1}{2}\oint\limits_{l} xdy - ydx$

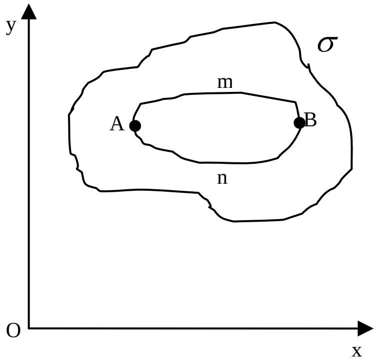
Пример. Найти площадь области, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$.

$$S=\oint\limits_{l} xdy = \int\limits_{0}^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\cdot dt = \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = \pi ab$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.

Пусть задано плоское векторное поле $\overline{\Phi} = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$. Будем предполагать, что функции $P(x,y) u Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y} u \frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области σ. Рассмотрим в области σ две точки A и B.

Значение криволинейного интеграла



$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy (1)$$

вообще говоря, различны, если соединять точки А и В различными линиями. Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл (1) не зависит от формы кривой, соединяющей точки А и В, то есть не зависит от пути интегрирования. Приведем без доказательств две теоремы.

Теорема 1.

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в некоторой области σ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области σ, был равен нулю.

Теорема 2. (удобна для практического применения).

Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области σ, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример.

Определить, зависит ли $\int\limits_{l} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ от пути интегрирования.

$P(x,y) = x^2 + y^2; Q(x,y) = 2xy; \frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Отыскание функции по ее полному дифференциалу

Рассмотрим дифференциальное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где функции $P(x,y) u Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывны во всех точках некоторой односвязной области σ.

Выясним, при каких условиях выражение (1) является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x,y)$, то есть $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Справедлива ***Теорема.***

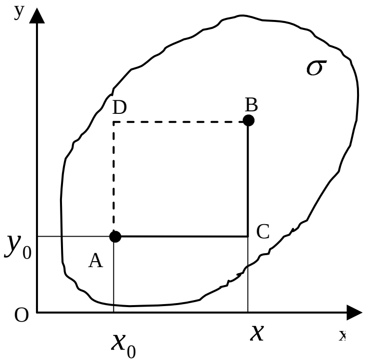
Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ в односвязной области σ было полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы в области σ выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда $U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$, где $(x_0,y_0)\in\sigma,(x,y)\in\sigma$.

Функция $U(x,y)$, полный дифференциал которой равен выражению $Pdx+Qdy$, называется первообразной для этого выражения.

Нахождение первообразной



При нахождении первообразной $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ можно взять любую линию, соединяющую точки $A(x_0,y_0) u B(x,y)$. Удобно в качестве пути интегрирования взять ломаную ACB, где $C(x)$ $C(x,y_0)\in\sigma$. Тогда

$$\int\limits_{A}^{B} Pdx+Qdy=\int\limits_{AC} Pdx+Qdy+\int\limits_{CB} Pdx+Qdy.$$

На [AC] $y=y_0=const$, поэтому $dy=0, x_0\le x\le x$

На [CB] $x=const$, поэтому $dx=0, y_0\le y\le y$

Тогда $U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$.

Вместо точки C можно взять точку $D(x_0,y)\in\sigma$.

Если функция $U(x,y)$ является первообразной выражения $Pdx+Qdy$, то первообразной также является любая функция вида $U(x,y)+C$, где C=const.

Пример. Найти первообразную полного дифференциала $(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$.

$$P=e^y+x, Q=xe^y-2y, \frac{\partial P}{\partial y}=e^y, \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$$

Возьмем $x_0=0, y_0=0$.

$$U(x,y)=\int\limits_0^x (1+x)dx+\int\limits_0^y (xe^y-2y)dy=\left.\frac{(1+x)^2}{2}\right|_0^x+\left.(xe^y-y^2)\right|_0^y=$$

$$=\frac{(1+x)^2}{2}-\frac{1}{2}+xe^y-y^2-x=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+xe^y-y^2-x=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xe^y-y^2.$$

Окончательно, $U(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+xe^y-y^2+c$

Контрольные вопросы

1. Задача о массе неоднородной дуги
2. Интегральная сумма для функции двух переменных по длине дуги.
3. Криволинейный интеграл по длине дуги.
4. Дифференциал дуги.
5. Основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги.
6. Независимость криволинейного интеграла по длине дуги от направления пути интегрирования.
7. Свойство аддитивности для криволинейного интеграла по длине дуги.
8. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги в декартовой системе координат.
9. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги в параметрической форме.

10. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги в полярной системе координат.

11. Вычисление длины дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода.

12. Вычисление массы дуги и длины дуги с помощью криволинейного интеграла по длине дуги.

13. Задача о работе переменной силы вдоль длины кривой.

14. Интегральная сумма для функций $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ по координатам.

15. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода).

16. Основные свойства криволинейного интеграла по координатам.

17. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от направления пути интегрирования.

18. Свойство аддитивности криволинейного интеграла второго рода.

19. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в явной параметрической формах в декартовой системе координат.

20. Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла по координатам.

21. Независимость криволинейного интеграла по координатам от пути направления.

22. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

23. Формула Грина.

24. Вычисление работы, совершаемой переменной силой на криволинейном пути с помощью криволинейного интеграла второго рода.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Провести исследование функций и построить их графики.

1.1. а) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; б) $y = (2x+3)e^{-2(x+1)}$.

1.2. а) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$; б) $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

1.3. а) $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$; б) $y = 3\ln\dfrac{x}{x-3} - 1$.

1.4. а) $y = \dfrac{4x^2}{3+x^2}$; б) $y = (3-x)e^{x-2}$.

1.5. а) $y = \dfrac{12x}{9+x^2}$; б) $y = \dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

1.6. а) $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$; б) $y = \ln\dfrac{x}{x+2} + 1$.

1.7. а) $y = \dfrac{4-x^3}{x^2}$; б) $y = (x-2)e^{3-x}$.

1.8. а) $y = \dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$; б) $y = \dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

1.9. а) $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$; б) $y = 3 - 3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

1.10. а) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$; б) $y = -(2x+1)e^{2(x+1)}$.

1.11. а) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; б) $y = \dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

1.12. а) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$; б) $y = \ln\dfrac{x}{x-2} - 2$.

1.13. а) $y = \dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$; б) $y = (2x+5)e^{-2(x+2)}$.

1.14. а) $y = \dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; б) $y = \dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

1.15. а) $y = \dfrac{-8x}{x^2+4}$; б) $y = 2\ln\dfrac{x}{x+1} - 1$.

1.16. а) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$; б) $y = (4-x)e^{x-3}$.

1.17. а) $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y = -\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

1.18. а) $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$; б) $y = 2\ln\dfrac{x+3}{x} - 3$.

1.19. а) $y = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$; б) $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$.

1.20. а) $y = \dfrac{1-2x^3}{x^2}$; б) $y = -\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

1.21. а) $y = \dfrac{4}{x^2+2x-3}$; б) $y = 2\ln\dfrac{x}{x-4} - 3$.

1.22. а) $y = \dfrac{4}{3+2x-x^2}$; б) $y = -(x+1)e^{x+2}$.

1.23. а) $y = \dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$; б) $y = \dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

1.24. а) $y = \dfrac{1}{x^4-1}$; б) $y = \ln\dfrac{x}{x+1} - 1$.

1.25. а) $y = -\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$; б) $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$.

1.26. а) $y = \dfrac{x^3-32}{x^2}$; б) $y = -\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

1.27. а) $y = \dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$; б) $y = \ln\dfrac{x-5}{x} + 2$.

1.28. а) $y = \dfrac{3x-2}{x^3}$; б) $y = (x+4)e^{-(x+3)}$.

1.29. а) $y = \dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$; б) $y = \ln\dfrac{x+6}{x} - 1$.

1.30. а) $y = \dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$; б) $y = 2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1$.

2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. а) $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$; б) $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2}\, dx$.

2.2. а) $\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$; б) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

2.3. а) $\int_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$.

2.4. а) $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

2.5. а) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$; б) $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

2.6. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$; б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$.

2.7. а) $\int_0^{1/2} \frac{8x - arctg\, 2x}{1+4x^2} dx$; б) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

2.8. а) $\int_1^4 \frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+x)^2} dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2.9. а) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.

2.10.а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

2.11.а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

2.12.а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx + x}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

2.13.а) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx$; б) $\int_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

2.14.а) $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1}dx$; б) $\int_{0}^{5/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

2.15.а) $\int_{0}^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_{0}^{5} x^2\sqrt{25-x^2dx}$.

2.16.а) $\int_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$; б) $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$.

2.17.а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

2.18.а) $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

2.19.а) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

2.20.а) $\int_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$; б) $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

2.21.а) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$; б) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

2.22.а) $\int_{0}^{1} \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

2.23.а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tgx\cdot\ln\cos x\,dx$; б) $\int_{0}^{2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.

2.24.а) $\int_{-1}^{0} \frac{tg(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; б) $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

2.25.а) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

2.26.а) $\int\limits_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$; б) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.

2.27.а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

2.28.а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2.29.а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.30.а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; б) $\int\limits_0^{1.5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3.Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями.

3.1. а) $y=(x-2)^3, y=4x-8$;

б) $x=4\sqrt{2}\cos^3 t; y=2\sqrt{2}\sin^3 t; x \ge 2$.

3.2. а) $y=x\sqrt{9-x^2}; y=0; 0 \le x \le 3$;

б) $\rho = 4\cos 3\varphi; \rho \ge 2$.

3.3. а) $y=4-x^2; y=x^2-2x$;

б) $x=\sqrt{2}\cos t; y=2\sqrt{2}\sin t; y \ge 2$.

3.4. а) $y=\sin x \cdot \cos^2 x; y=0; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

б) $\rho = \cos 2\varphi$.

3.5. а) $y=\sqrt{4-x^2}; y=0; x=0; x=1$;

б) $\begin{matrix} x=4(t-\sin t); y=4(1-\cos t); \\ y \ge 4; 0 \le x \le 8\pi \end{matrix}$.

3.6. а) $y=x^2\sqrt{4-x^2}; y=0; 0 \le x \le 2$;

б) $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi; \rho=\sin\varphi; 0 \le \varphi \le \pi/2$.

3.7. а) $y=\cos x\sin^2 x; y=0; 0\le x\le \frac{\pi}{2}$; б) $x=16\cos^3 t; y=2\sin^3 t; x\ge 2$.

3.8. а) $y=\sqrt{e^x-1}; y=0; x=\ln 2$;

б) $\rho=4\sin 3\varphi; \rho\ge 2$.

3.9. а) $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}; y=0; x=1; x=e^3$;

б) $x=2\cos t; y=6\sin t; y\ge 3$.

3.10а) $y=\arccos x; y=0; x=0$;

б) $\rho=\sin 3\varphi$.

3.11.а) $y=(x+1)^2; y^2=x+1;$

б) $\begin{matrix} x=2(t-\sin t); y=2(1-\cos t); y\ge 3; \\ 0\le x\le 4\pi \end{matrix}$.

3.12.а) $y=2x-x^2+3; y=x^2-4x+3$;

б) $\rho=\cos 3\varphi$.

3.13.а) $y=x\sqrt{36-x^2}; y=0; 0\le x\le 6$;

б) $x=32\cos^3 t; y=\sin^3 t; x\ge 4$.

3.14.а) $x=\arccos y; x=0; y=0$;

б) $x=3\cos t; y=8\sin t; y\ge 4$.

3.15.а) $y=x\cdot arctgx; y=0; x=\sqrt{3}$;

б) $\rho=6\cos 3\varphi; \rho\ge 3$.

3.16.а) $y=x^2\sqrt{8-x^2}; y=0; 0\le x\le 2\sqrt{2}$;

б) $\begin{matrix} x=6(t-\sin t); y=6(1-\cos t); y\ge 6; \\ 0\le x\le 12\pi \end{matrix}$.

3.17.а) $x=\sqrt{e^y-1}; x=0; y=\ln 2$;

б) $\rho=6\cos 3\varphi; \rho\ge 3$.

3.18.а) $y=x\sqrt{4-x^2}; y=0; 0\le x\le 2$;

б) $x=8\cos^3 t; y=4\sin^3 t; x\ge 3\sqrt{3}$.

3.19.а) $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}}; y=0; x=1$;

б) $\rho=\frac{1}{2}+\sin\varphi$.

3.20.а) $y=\dfrac{1}{1+\cos x};y=0;x=-\dfrac{\pi}{2};$
$x=\dfrac{\pi}{2}$

б) $x=6\cos t;y=4\sin t;y\ge 2\sqrt{3}$.

3.21.а) $x=(y-2)^3;x=4y-8$;

б) $\rho=\cos\varphi;\rho=\sin\varphi;0\le\varphi\le \pi/2$.

3.22.а) $y=\cos^5 x\cdot\sin 2x;y=0;$
$0\le x\le \pi/2$

б) $x=\sqrt{2}\cos t;y=4\sqrt{2}\sin t;y\ge 4$.

3.23.а) $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2};y=0;x=1;$

б) $\rho=\sin\varphi;\rho=2\sin\varphi$.

3.24.а) $x=4-y^2;x=y^2-2y$; б) $x=t-\sin t;y=1-\cos t;y\ge 1;$
$0\le x\le 2\pi.$

3.25.а) $x=4-(y-1)^2;x=y^2-4y+3$;

б) $\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.

3.26.а) $y=\dfrac{e^{1/x}}{x^2};y=0;x=1;x=2$;

б) $x=24\cos^3 t;y=2\sin^3 t;x\ge 9\sqrt{3}$.

3.27.а) $y=x^2\sqrt{16-x^2};y=0;0\le x\le 4$;

б) $\rho=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.

3.28.а) $x=\sqrt{4-y^2};x=0;y=0;y=1$; б) $x=3\cos t;y=8\sin t;y\ge 4\sqrt{3}$.

3.29.а) $y=(x-1)^2;y^2=x-1$;

б) $\rho=\dfrac{5}{2}\sin\varphi;\rho=\dfrac{3}{2}\sin\varphi$.

3.30.а) $y=x^2\cos x;y=0;0\le x\le \pi/2$;

б) $x=4(t-\sin t);y=4(1-\cos t);y\ge 6;$
$0\le x\le 8\pi$.

4. Вычислить длины дуг кривых.

4.1. $y=\ln x;\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}.$

4.2. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2};1\le x\le 2.$

4.3. $x=5(t-\sin t);y=5(1-\cos t);0\le t\le \pi$ 4.4. $\rho=3e^{3\varphi/4};-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

4.5. $y=-\ln\cos x;0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

4.6. $x=10\cos^3 t;y=10\sin^3 t;0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

4.7. $\rho=6e^{\frac{12\varphi}{5}};-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

4.8. $y=1-\ln\sin x;\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

4.9. $\rho=4(1-\sin\varphi);0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

4.10. $\begin{matrix} x=3(t-\sin t);y=3(1-\cos t); \\ \pi\le t\le 2\pi \end{matrix}$.

4.11. $y=\ln\cos x+2;0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

4.12. $\rho=2\sin\varphi;0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

4.13. $y=e^x+6;\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

4.14. $x=6\cos^3 t;y=6\sin^3 t;0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

4.15. $y=\ln(x^2-1);2\le x\le 3$.

4.16. $y=\ln\frac{5}{2x};\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

4.17. $\begin{matrix} x=3(\cos t+t\sin t); \\ y=3(\sin t-t\cos t);0\le t\le \pi/3 \end{matrix}$.

4.18. $\rho=1-\sin\varphi;-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$.

4.19. $y=1-\ln\cos x;0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

4.20. $\begin{matrix} x=e^t(\cos t+\sin t); \\ y=e^t(\cos t-\sin t);0\le t\le 2\pi \end{matrix}$.

4.21. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

4.22. $\rho = 2(1-\cos\varphi); -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$.

4.23. $y = \ln\sin x; \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4.24. $\rho = 8\cos\varphi; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

4.25. $x = 2\cos^3 t; y = 2\sin^3 t; 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

4.26. $y = \ln(1-x^2); 0 \le x \le \frac{1}{4}$.

4.27. $\rho = 7(1-\sin\varphi); -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

4.28. $y = chx + 3; 0 \le x \le 1$.

4.29. $\rho = 5(1-\cos\varphi); -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

4.30. $\begin{array}{l} x = 2(t-\sin t); y = 2(1-\cos t); \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{array}$.

5.Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

5.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

5.2. $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

5.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

5.4. $\int\limits_0^{\infty} \sin x dx$.

5.16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$.

5.17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

5.18. $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

5.19. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

5.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

5.6. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

5.7. $\int\limits_{0}^{\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$.

5.8. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

5.9. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

5.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}ctgxdx$.

5.11. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

5.12. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

5.13. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^4}$.

5.14. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

5.15. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}dx$.

5.20. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}$.

5.21. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5.22. $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin xdx$.

5.23. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

5.24. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\sin xdx$.

5.25. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.26. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

5.27. $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

5.28. $\int\limits_{0}^{1}x\ln xdx$.

5.29. $\int\limits_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

5.30. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

6.Даны функция z=f(x;y), точка A(x_0;y_0) и вектор $\bar{a}$. Найти grad z в точке A и производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

6.1. $z = \ln(3x^2 + 2y^3); A(-1;2); \bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j}$.

6.2. $z = x^4 + 5x^2y^2 - 3; A(2;-2); \bar{a} = -2\bar{i} + 5\bar{j}$.

6.3. $z = x^2 + 3xy - 4y^2 + x; A(1;3); \bar{a} = 8\bar{i} - 6\bar{j}$.

6.4. $z = 2x^2 - 4xy + 5x + 6y; A(3;-2); \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.5. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}; A(1;4); \bar{a} = -5\bar{i} + 12\bar{j}$

6.6. $z = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2}; A(1;-1); \bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$.

6.7. $z = arcctg\,\dfrac{y}{x^2}; A(-2;4); \bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.

6.8. $z = \dfrac{x-y}{x+y}; A(4;3); \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

6.9. $z = \ln(3x - 2y)^2; A(2;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$.

6.10 $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}; A(-2;2); \bar{a} = -6\bar{i} + 8\bar{j}$.

6.11. $z = \ln(x + e^{-y}); A(1;0); \bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$.

6.12. $z = xe^{\frac{y}{x}}; A(1;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$.

6.13. $z = arctg\,\dfrac{x}{y}; A(1;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.14. $z = \ln(x + e^y); A(1;0); \bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$.

6.15. $z = e^{xy}; A(1;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$.

6.16. $z = e^{\frac{y}{x}}; A(1;2); \bar{a} = -2\bar{i} - \bar{j}$.

6.17. $z = \ln(e^{-x} + y); A(0;1); \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.18. $z = ye^{\frac{x}{y}}; A(0;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.19. $z = x^y; A(2;1); \bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$.

6.20. $z = \dfrac{y}{x}; A(2;1); \bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$.

6.21. $z = x^2 - xy - 2y^2; A(1;2); \bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j}$.

6.22. $z = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + 1; A(1;2); \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.23. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}; A(1;1); \bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$.

6.24. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; A(-1;2); \bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

6.25. $z = \ln(e^x + e^y); A(2;-1); \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$.

6.26. $z = \arcsin\dfrac{x-y}{x}; A(1;1); \bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j}$.

6.27. $z = arctg\dfrac{x^2}{y}; A(2;1); \bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.

6.28. $z = \ln(1 + \dfrac{x}{y}); A(1;1); \bar{a} = 2\bar{i} - 11\bar{j}$.

6.29. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; A(2;-2); \bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$.

6.30. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}; A(2;\dfrac{\pi}{2}); \bar{a} = 7\bar{i} - \bar{j}$.

7.Найти экстремумы функции или доказать их отсутствие.

7.1. $z = x^2 + xy + y^2$.

7.2. $z = 3x^2 - xy + x + y$.

7.3. $z = x^2 + 3xy - 6y$.

7.4. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$.

7.5. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$.

7.6. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$.

7.7. $z = 3x^2 - xy + 2y^2$.

7.8. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$.

7.9. $z = 4 - x^2 - 2xy^2$.

7.10. $z = 5x + 3y - 6xy$.

7.11. $z = x^2 - xy + 4y^2 + 6$.

7.12. $z = xy + y^2 - 8x$.

7.13. $z = x^2 - y^2 - x + y$.

7.14. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$.

7.15. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$.

7.16. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$.

7.17. $z = xy + 2y^2 - 2x$.

7.18. $z = x^2 + 5y^2 - x + 2y$.

7.19. $z = 3x^2 - xy + 4x - 6$.

7.20. $z = xy - 6x^2 + 3y^2$.

7.21. $z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 + 1$.

7.22. $z = 4xy - 7x + 8y$.

7.23. $z = x^2 - 3xy - 3y^2$.

7.24. $z = -6x^2 + 3xy + 6y^2 + 15x$.

7.25. $z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y$.

7.26. $z = x^2 - xy + 5$.

7.27. $z = x^2 + 6xy - x + 3y$.

7.28. $z = x^2 - 4xy + y^2 + 6y$.

7.29. $z = 5xy - y^2$.

7.30. $z = 3y - 2x - xy$.

8.Вычислить криволинейные интегралы

8.1. $\int\limits_l (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где l – дуга $y = x^2$ от точки A(-1;1) до точки B(1;1).

8.2. $\int\limits_l \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где l – дуга $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$ от точки A(2;0) до точки B(0;2).

8.3. $\int\limits_l (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где l – дуга $y = x^3$ от точки O(0;0) до точки A(1;1).

8.4. $\oint\limits_l (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где l – окружность $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8.5. $\oint\limits_l (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где l – эллипс $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8.6. $\oint\limits_{l}(xy-1)dx+x^2ydy$, где l – эллипс $x=\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8.7. $\int\limits_{l}2xydx-x^2dy$, где l – ломаная OBA; O(0;0), A(2;1), B(2;0).

8.8. $\int\limits_{l}(x^2-y^2)dx+xydy$, где l – отрезок AB; A(1;1), B(3;4)

8.9. $\int\limits_{l}\cos ydx-\sin xdy$, где l – отрезок AB; A($2\pi;-2\pi$), B($-2\pi;2\pi$).

8.10. $\int\limits_{l}\dfrac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, где l – отрезок AB; A(1;2), B(3;6).

8.11. $\int\limits_{l}xydx+(y-x)dy$, где l – дуга $y=x^3$ от точки A(0;0) до точки B(1;1).

8.12. $\int\limits_{l}(x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, где l – ломаная ABC; A(1;2), B(3;2), C(3;5).

8.13. $\int\limits_{l}xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где l – отрезок OB; O(0;0;0), B(-2;4;5).

8.14. $\int\limits_{l}ydx+xdy$, где l – дуга окружности $x=R\cos t, y=R\sin t$ от точки O(R;0) до точки A(0;R).

8.15. $\int\limits_{l}xydy+(y-x)dy$, где l – дуга $y^2=x$ от точки O(0;0) до точки A(1;1).

8.16. $\int\limits_{l}xdx+ydy+(x-y+1)dz$, где l – отрезок AB; A(1;1;1), B(2;3;4).

8.17. $\int\limits_{l}(xy-1)dx+x^2ydy$, где l – дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки A(1;0) до точки B(0;2).

8.18. $\int\limits_{l}xydx+(y-x)dy$, где l – дуга $y=x^2$ от точки O(0;0) до точки B(1;1).

8.19. $\int\limits_l (xy - y^2)dx + xdy$, где l – дуга $y = x^2$ от точки O(0;0) до точки B(1;1).

8.20. $\int\limits_l xdy - ydx$, где l – дуга $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$ от точки A(2;0) до точки B(0;2).

8.21. $\int\limits_l (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$, где l – дуга $y^2 = 4x$ от точки A(0;0) до точки B(1;2).

8.22. $\int\limits_l (xy - 1)dx + x^2 ydy$, где l – отрезок AB; A(1;0), B(0;2).

8.23. $\int\limits_l 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, где l – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ от точки A(1;0;0) до точки B(1;0;4π).

8.24. $\int\limits_l \frac{y}{x}dx + xdy$, где l – дуга $y = \ln x$ от точки A(1;0) до точки B(l;1).

8.25. $\oint\limits_l ydx - xdy$, где l – эллипс $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8.26. $\int\limits_l 2xydx - x^2 dy$, где l – дуга $y = \frac{x^2}{4}$ от точки O(0;0) до точки A(2;1).

8.27. $\int\limits_l (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где l – ломаная $y^2 = |x|$ от точки A(-1;1) до точки B(2;2).

8.28. $\int\limits_l 2xydx - x^2 dy + zdz$, где l – отрезок OA; O(0;0;0), A(2;1;-1).

8.29. $\oint\limits_l xdy - ydx$, где l – контур треугольника ABC;A(-1;0), B(1;0),C(0;1) при положительном направлении обхода.

8.30. $\int\limits_l (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, где l – ломаная ACB; A(2;1), C(2;0), B(5;3).

9. Вычислить криволинейные интегралы.

9.1. $\int\limits_l \sqrt{2-z^2}\,(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, где l – дуга $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\le t\le 2\pi$.

9.2. $\oint\limits_l (x^2+y^2)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=4$ при положительном направлении обхода.

9.3. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где l – отрезок OB; O(0;0), B(2;2).

9.4. $\int\limits_l (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, где l – отрезок AB; A(-1;0), B(0;1).

9.5. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где l – отрезок AB; A(0;4), B(4;0).

9.6. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где l – дуга $\rho=2(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

9.7. $\int\limits_l ydl$, где l – дуга $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ между точками A(1;0) и B(0;1).

9.8. $\int\limits_l ydl$, где l – дуга $y^2=\frac{2}{3}x$ между точками O(0;0) и B($\frac{\sqrt{35}}{6}$;$\frac{\sqrt{35}}{3}$).

9.9. $\int\limits_l (x^2+y^2+z^2)dl$, где l – дуга $x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}t, 0\le t\le 2\pi$.

9.10. $\int\limits_l arctg\frac{y}{x}dl$, где l – дуга $\rho=(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

9.11. $\int\limits_l \sqrt{2y}dl$, где l – первая арка циклоиды $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$.

9.12. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где l – отрезок OA; O(0;0) и A(1;2).

9.13. $\oint_l (x-y)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=ax.$

9.14. $\oint_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами О(0;0), А(4;0), В(4;2), С(0;2).

9.15. $\oint_l (x+y)dl$, где l – контур треугольника с вершинами А(1;0), В(0;1), О(0;0).

9.16. $\int_l \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, где l – первый виток винтовой линии $x=2\cos t, y=2\sin t, z=2t$.

9.17. $\oint_l (x+y)dl$, где l – контур треугольника с вершинами О(0;0),А(-1;0), В(0;1).

9.18. $\int_l (x+y)dl$, где l – дуга $\rho^2 = \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

9.19. $\oint_l \sqrt{x^2+y^2}dl$, где l – окружность $x^2+y^2=2y$.

9.20. $\oint_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами О(0;0), А(5;0), В(5;3), С(0;3).

9.21. $\oint_l \sqrt{x^2+y^2}dl$, где l – окружность $x^2+y^2=4y$.

9.22. $\int_l (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})dl$, где l – дуга $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ между точками А(1;0) и В(0;1).

9.23. $\int_l xydl$, где l – контур квадрата со сторонами $x=\pm 1, y=\pm 1$.

9.24. $\int_l y^2dl$, где l – первая арка циклоиды $x=t-\sin t, y=1-\cos t$.

9.25. $\oint_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами А(2;0), В(4;0),С(4;3),D(2;3).

9.26. $\int\limits_l \frac{dl}{x-y}$, где l – отрезок AB;A(1;2),B(6;1).

9.27. $\int\limits_l (x^2+y^2)dl$, где l – первая четверть окружности $\rho = 2$.

9.28. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где l – отрезок AB;A(1;1;1),B(2;2;2).

9.29. $\oint\limits_l (x-y)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=2x$.

9.30. $\int\limits_l (x+y)dl$, где l – первый виток лемнискаты $\rho = 7\cos 2\varphi$.

ОГЛАВЛЕНИЕ