Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Исчисление высказываний

Лекция 3

Определение формального исчисления

Будем говорить, что *формальное исчисление* I определено, если выполняются четыре условия.

1. Имеется некоторое множество *A* символов – *алфавит* исчисления I. Конечные последовательности символов называются *словами* или *выражениями* исчисления I. Обозначим через S множество всех слов алфавита исчисления I.

2. Задано подмножество $F \subseteq S$, называемое *множеством формул исчисления* I. Элементы множества *F* называются *формулами.*

Определение формального исчисления

3. Выделено множество $Ax \subseteq F$ формул, называемых *аксиомами* исчисления I.

4. Имеется конечное множество *K* отношений $R_1, R_2, \dots, R_n$ между формулами, называемых *правилами вывода,* причем если $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi) \in R_i$, то φ называется *непосредственным следствием формул* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ *по правилу* R_i.

Итак, исчисление I есть четверка (A, F, Ax, K).

Выводом в исчислении I называется последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ такая, что для любого $i \ (1 \leq i \leq n)$ формула φ_i есть либо аксиома исчисления I, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул.

Формула φ называется *теоремой исчисления* I, *выводимой в* I, или *доказуемой в* I, если существует вывод $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$, который называется *выводом формулы* φ или *доказательством* теоремы φ.

Если существует алгоритм, с помощью которого для произвольной формулы φ через конечное число шагов можно определить, является ли φ выводимой в исчислении I или нет, то исчисление называется *разрешимым.*

Исчисление называется *непротиворечивым,* если не все его формулы доказуемы.

Система аксиом и правил вывода

Используя понятие формального исчисления, определим *исчисление высказываний* (ИВ).

Алфавит ИВ состоит из букв x, y, z, u, v, возможно с индексами (которые называются *пропозициональными переменными*), *логических символов* (связок) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, а также *вспомогательных* символов $($, $)$.

Множество формул ИВ определяется индуктивно:

а) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

б) если φ, ψ - формулы ИВ, то $\neg\varphi, (\varphi \land \psi), (\varphi \lor \psi), (\varphi \ \rightarrow \ \psi)$ – формулы ИВ;

в) выражение является формулой ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов "а" и "б".

Таким образом, любая формула ИВ строится из пропозициональных переменных с помощью связок $\neg, \land, \lor, \rightarrow$.

Подформулой ψ формулы φ ИВ называется подслово φ*,* являющееся формулой ИВ.

Под *длиной формулы* φ будем понимать число символов, входящих в слово φ.

Аксиомами ИВ являются следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИВ:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;
3. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;
5. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;
7. $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;
8. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to x) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;
9. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
10. $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Указанные формулы называются *схемами аксиом ИВ.* При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается *частный случай схемы аксиом.*

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, \text{ если } & \delta = 1, \\ \bar{x}, \text{ если } & \delta = 0 \end{cases}$$

Единственным *правилом вывода в ИВ* является *правило заключения (modus ponens):* если φ и $\varphi \to \psi$ - выводимые формулы, то ψ - также выводимая формула. Символически это записывается так:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Говорят, что формула φ *выводима в ИВ из формул* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (обозначается $\varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash \varphi$ *),* если существует последовательность формул $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$*,* в которой любая формула либо является аксиомой, либо принадлежит множеству формул $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, называемых *гипотезами,* либо получается из предыдущих по правилу вывода. Выводимость формулы φ из $\emptyset$ *(*$\vdash \varphi$*)* равносильна тому, что φ - теорема ИВ или доказуемая формула ИП$^{\Sigma}$.

Пример

Покажем, что $\vdash \varphi \to \varphi$.

Квазивыводом в ИВ формулы φ *из формул* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ называется последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула, либо принадлежит множеству формул $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, либо выводима из предыдущих.

Замечание 1. Если существует квазивывод в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то φ выводима в ИВ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Примеры

Покажем, что $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Покажем, что $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.