Пример 59. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

Решение. Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды

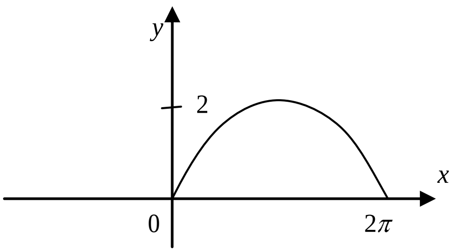
$$x'_t = 2(t - \sin t)' = 2(1 - \cos t),\quad y'_t = 2(1 - \cos t)' = 2\sin t,$$

тогда

$$(x'_t)^2 = 4(1 - \cos t)^2,\quad (y'_t)^2 = 4\sin^2 t,$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4 - 8\cos t + 4(\sin^2 t + \cos^2 t) =$$

$$= 4 - 8\cos t + 4 = 8 - 8\cos t = 8(1 - \cos t) = 8\cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 16\sin^2\frac{t}{2}.$$



$$t_1 = 0,\quad t_2 = 2\pi.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (2.21), получаем

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{2\pi}4\sin\frac{t}{2}\,dt = 4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

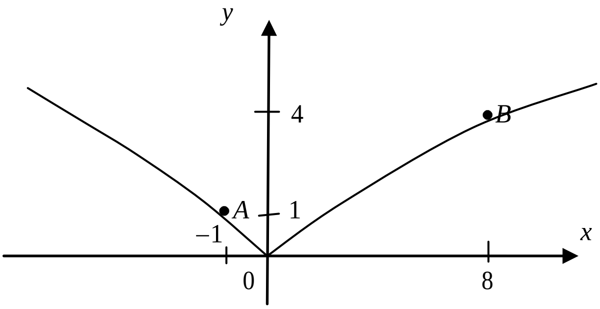
$$= 4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cdot 2d\left(\frac{t}{2}\right) = 8\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\,\frac{t}{2} = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8\cos\pi +$$

$$+ 8\cos 0 = -8(-1) + 8\cdot 1 = 8 + 8 = 16.$$

Пример 60. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^3 = x^2$ между точками $A(-1;1)$ и $B(8;4)$.

Решение. Разрешаем данное уравнение относительно x и находим x': $x = \pm y^{3/2}$, $x' = \pm\frac{3}{2}y^{1/2}$, $(x')^2 = \frac{9}{4}y$, $c = 1$, $d = 4$.

Согласно формуле (2.20) получим



$$l=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy=\left|\begin{array}{l}\text{пусть } 1+\frac{9}{4}y=t,\quad y=\frac{4}{9}(t-1),\\ dy=d\left(\frac{4}{9}(t-1)\right)=\frac{4}{9}dt,\ \text{при } y=1\quad t=\frac{13}{4},\\ \text{при } y=4\quad t=10\end{array}\right|=$$

$$=\int_{13/4}^{10}\sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}dt=\frac{4}{9}\int_{13/4}^{10}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{\frac{13}{4}}^{10}=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-\frac{13}{8}\sqrt{13}\right).$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить длины дуг кривых:

1. $9y^2=4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.

2. $x=3\cos^3 t,\quad y=3\sin^3 t,\quad t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. 3. $y=\ln(\sin x)$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$. 4. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ от $y=1$ до $y=e$.

Ответы. 1. $\frac{28}{3}$. 2. 4,5. 3. $\ln\sqrt{3}$. 4. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

3. Вычисление объема тела вращения плоской фигуры.

Если тело образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси Ox, будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y = f(x)$. Объем тела вращения определяется формулой

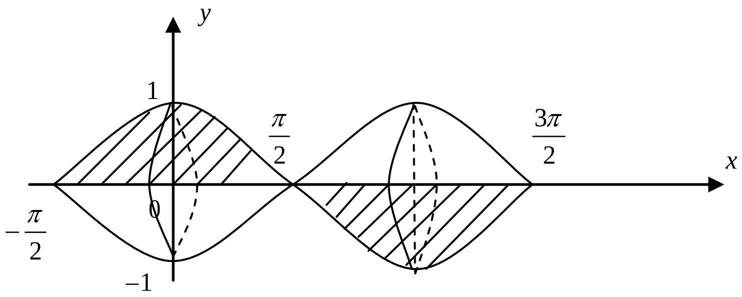
$$V_{ox} = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2(x)\,dx \quad (x_1 < x_2). \tag{2.22}$$

Если тело образуется при вращении криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, то объем тела вращения определяется формулой

$$V_{oy} = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x^2(y)\,dy \quad (y_1 < y_2). \tag{2.23}$$

Пример 61. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$ (одной волной), $y = 0$ вокруг оси Ox.

Решение. Построим плоскую фигуру, вращение которой вокруг оси Ox образует нужное тело:



Искомое тело состоит из двух тел одинаковых объемов, тогда $V_T = 2V_1$. Найдем V_1.

$$V_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi/2} (1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos \pi\right) - \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos(-\pi)\right) =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)\right)-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)=$$

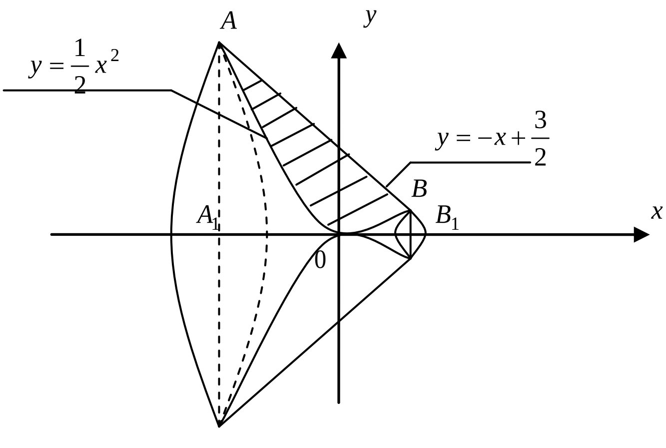
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

Тогда искомый объем

$$V_T=2\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi^2\ (\text{ед}^3).$$

Пример 62. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$ вокруг оси Ox.

Решение. Построим данную плоскую фигуру. Графиком функции $2y=x^2$ или $y=\frac{1}{2}x^2$ является парабола, симметричная оси Oy, ветви направлены вверх, вершина лежит в начале координат. Графиком функции $2x+2y-3=0$ или $y=-x+\frac{3}{2}$ является прямая



Найдем абсциссы точек A и B

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2, \\ y=-x+\frac{3}{2}. \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x^2=-x+\frac{3}{2},\quad x^2=-2x+3,\quad x^2+2x-3=0,$$
$$x_1=-3,\quad x_2=1.$$

Объем полученного тела вращения можно найти как разность объемов тела, образованных вращением вокруг оси Ox трапеций A_1ABB_1 и A_1AOBB_1.

Объем V_1, образованный вращением трапеции A_1ABB_1 найдем по формуле (2.22):

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{1}\left(-x+\frac{3}{2}\right)^2 dx = \pi\int_{-3}^{1}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\pi\left(\frac{(-3)^3}{3}-\frac{3}{2}(-3)^2+\frac{9}{4}(-3)\right)=$$

$$= \pi\left(\frac{4-18+27}{12}\right)-\pi\left(-9-\frac{27}{2}-\frac{27}{4}\right)=\frac{13}{12}\pi+\frac{117}{4}\pi=\frac{364}{12}\pi=\frac{91}{3}\pi.$$

Объем V_2, образованного вращением криволинейной трапеции A_1AOBB_1, также найдем по формуле (2.22):

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \pi\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}x^4 dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{\pi}{20}\left(1-(-3)^5\right)=$$

$$= \frac{\pi}{20}(1+243)=\frac{244}{20}\pi=\frac{61}{5}\pi.$$

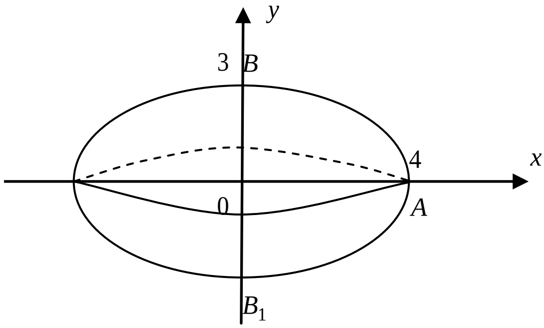
Тогда искомый объем

$$V = V_1 - V_2 = \frac{91}{3}\pi-\frac{61}{5}\pi=\frac{455-183}{15}\pi=18\frac{2}{15}\pi\ (\text{ед}^3).$$

Пример 63. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, вокруг оси Oy.

Решение. Большая полуось эллипса $a=\sqrt{16}=4$, малая полуось $b=\sqrt{9}=3$.

Построим эллипс. Так как $b<a$, то при вращении его вокруг малой оси получается сжатый эллипсоид вращения.



Вычислим объем этого тела по формуле (2.23):

$$V_{oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy.$$

Ординаты точек B и B_1 являются пределами интегрирования y_2 и y_1 соответственно. Для эллипса точки B и B_1 имеют координаты $B(0;b)$ и $B_1(0;-b)$, то есть $B(0;3)$ и $B_1(0;-3)$, поэтому $y_2 = 3$, $y_1 = -3$. Из уравнения эллипса выразим x^2 :

$$\frac{x^2}{16} = 1 - \frac{y^2}{9}, \quad x^2 = 16 - \frac{16}{9} y^2.$$

Получим искомый объем:

$$V_{oy} = \pi \int_{-3}^{3} \left(16 - \frac{16}{9} y^2\right) dy = \pi \left(16y - \frac{16}{9} \cdot \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= \pi\left(16 \cdot 3 - \frac{16}{27} \cdot 3^3\right) - \pi\left(16(-3) - \frac{16}{27}(-3)^3\right) = \pi(48 - 16) -$$

$$-\pi(-48 + 16) = 32\pi + 32\pi = 64\pi \text{ (ед}^3\text{.)}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных заданными линиями, вокруг указанных осей координат:

1. $y = \sin x$ (одной волной), $y = 0$ вокруг оси Ox.

2. $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oy. **3.** $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ вокруг оси Ox. **4.** $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{8}x^3$ вокруг оси Oy.

5. $y=e^x$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Ox. **6.** $y^2=x^3$, осью Ox, прямой $x=1$ вокруг оси Oy.

Ответы. 1. π^2. **2.** $34\frac{2}{15}\pi$. **3.** 12π. **4.** $\frac{2}{5}\pi$. **5.** $\frac{\pi}{2}$. **6.** $\frac{4}{7}\pi$.

2.5. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования или от разрывных функций называются собственными.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (несобственные интегралы I рода) от непрерывной функции $f(x)$ определяются посредством предельного перехода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2.24}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2.25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \tag{2.26}$$

где c – произвольное число.

Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами (несобственные интегралы II рода) также определяются посредством предельного перехода:

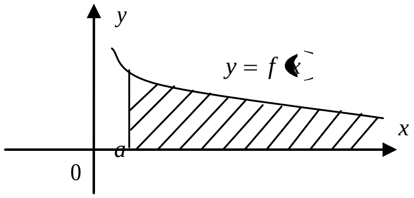
Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащей отрезку $[a;b]$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f'(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \tag{2.27}$$

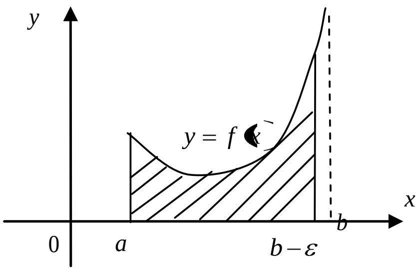
где ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга.

Несобственные интегралы называются сходящимися, если существуют и конечные определяющие их пределы. Если же указанные пределы не существуют, то данные несобственные интегралы называются расходящимися.

Если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции



В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции



Пример 64. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx.$

Решение. Пользуясь равенством (2.24), получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} + e^{0}\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{b}}\right) = \left[1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1\right] = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

Пример 65. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx.$

Решение. Используя определение (2.25), получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} xe^{-x}dx.$$

Рассмотрим интеграл $\int xe^{-x}dx.$ Для его нахождения воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Пусть $u = x,\ \ dv = e^{-x}dx,$ тогда $du = dx,\ \ v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}.$

$$\int xe^{-x}dx = x\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}\left(x+1\right).$$

Вернемся к данному интегралу:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-e^{-x}\left(x+1\right)\right)\Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left(-e^{0}\left(0+1\right)+e^{-a}\left(a+1\right)\right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-1+e^{-a}\left(a+1\right)\right) = -1 + \lim_{a\to-\infty} e^{-a}\left(a+1\right) =$$

$$= \left[e^{-(-\infty)}\left(-\infty+1\right) = e^{+\infty}\left(-\infty\right) = -\infty\right] = -1-\infty = -\infty.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Пример 66. Найти несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}.$

Решение. Пользуясь определением (2.26), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} = \lim_{a\to-\infty}\left(arctg0 - arctga\right) +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left(arctgb - arctg0\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-arctga\right) + \lim_{b\to+\infty} arctgb =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Значит данный несобственный интеграл сходится.

Пример 67. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ или установить его расходимость.

Решение. Здесь при $x = 0$ подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв. Согласно определению (2.27)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} (\ln 1 - \ln\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} (0 - \ln\varepsilon) = [0 - (-\infty)] = +\infty,$$

то есть несобственный интеграл расходится.

Пример 68. Найти несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;2]$. Поэтому, согласно формуле (2.27),

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_{-1}^{1-\varepsilon_1} (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon_2}^{2} (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \frac{(x-1)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \frac{(x-1)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_{1+\varepsilon_2}^{2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0} 3\cdot\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0} 3\cdot\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0} \left(3\cdot\sqrt[3]{1-\varepsilon_1-1} - 3\cdot\sqrt[3]{-1-1}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \left(3\cdot\sqrt[3]{2-1} - 3\cdot\sqrt[3]{1+\varepsilon_2-1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0} \left(3\cdot\sqrt[3]{-\varepsilon_1} - 3\cdot\sqrt[3]{-2}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \left(3\cdot\sqrt[3]{1} - 3\cdot\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right) = 3\cdot 0 + 3\sqrt[3]{2} + 3 - 3\cdot 0 = 3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. **2.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **3.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. **4.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

5. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-1}$. **6.** $\int\limits_{0}^{\infty} \sin xdx$. **7.** $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

Ответы. 1. $6\sqrt[3]{2}$. **2.** π. **3.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **4.** Расходится. **5.** Расходится. **6.** Расходится. **7.** $-\frac{1}{2}$.

Контрольная работа на тему «Определенный интеграл и его приложения»

Вариант 1.

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos xdx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - 0{,}5x^2$, $x + y = 2$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

Вариант 2.

1. Найти интеграл $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Вариант 3.

1. Найти интеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^3 x dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2 - 4y = 0,\ 2x - 4y + 1 = 0.$

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^3,\ y = 2,\ \ x = 0,$ вокруг оси $Oy.$

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{xdx}{7x^2 + 4}.$

Вариант 4.

1.. Найти интеграл $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{16}{x^2},\ y = 17 - x^2.$

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2,\ \ y = 0,$ вокруг оси $Ox.$

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2}.$

Вариант 5.

1. Найти интеграл $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 2.$

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = \frac{4}{3}x,\ \ x = 3,$ вокруг оси $Oy.$

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Вариант 6.

1. Найти интеграл $\int_1^2 3x\ln xdx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2=4y,\ y^2=4x$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^3=x^2,\quad y=1$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Вариант 7.

1. Найти интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x,\ y^2=9x$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2,\quad y=x^2$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{+\infty} 4^{1-\frac{x}{2}}dx$.

Вариант 8.

1.Найти интеграл $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x^2+1,\ y=3x+7$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\quad 2x+y=6$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos^2 x dx$.

Вариант 9.

1.Найти интеграл $\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4^{2x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2$, $y = 3$, $x \geq 0$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

Вариант 10.

1.Найти интеграл $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + x^4}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x + 3)^2}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Основные понятия и определения

Определение. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если независимая переменная одна, то уравнение называется обыкновенным; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Например:

$y'' + 3xy'' - x^3 y^2 = 0$ – ДУ второго порядка,

$\dfrac{d^3 y}{dx^3} - xy^2 \cdot \dfrac{dy}{dx} = 5$ – ДУ третьего порядка,

$y' - ye^x = tg\,3x$ – ДУ первого порядка,

$F(x; y; y') = 0$ – общий вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Определение. Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \qquad (3.1)$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и её производную y'. Если уравнение (3.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \qquad (3.2)$$

и называют ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной.

Уравнение (3.2) можно записать в дифференциальной форме

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (3.3)$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – известные функции. Уравнение (3.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, то есть любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами).

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, то есть $y = y_0$ называется начальным условием и записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y\Big|_{x = x_0} = y_0. \qquad (3.4)$$

Определение. Общим решением (общим интегралом) ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x;c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

функция $\varphi(x;c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c;

Каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ (или $y\big|_{x=x_0} = y_0$), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение. Частным решением (частным интегралом) ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x;c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x;c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x;c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y = \varphi(x;c_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (3.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (3.4), называется задачей Коши.

Рассмотрим методы интегрирования ДУ первого порядка определенного типа.

3.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение вида:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0. \tag{3.5}$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое – от y. Обычно такие ДУ называют уравнениями с разделенными переменными. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C \text{ – его общий интеграл.}$$

Пример 69. Проверить, что данная функция $y=\sqrt{x}$ является решением (интегралом) данного дифференциального уравнения $2yy'=1$.

Решение. Найдем производную данной функции $y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Подставив в данное уравнение $y=\sqrt{x}$ и $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, убедимся, что оно обращается в тождество:

$$2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=1,\ 1=1.$$

Пример 70. Найти общий интеграл уравнения $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$.

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3\cdot(y-2)^2$:

$$\frac{(x+1)^3dy}{(x+1)^3(y-2)^2}-\frac{(y-2)^2dx}{(x+1)^3(y-2)^2}=0,\quad \frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0.$$

Почленно интегрируя, получим искомый общий интеграл:

$$\int\frac{dy}{(y-2)^2}-\int\frac{dx}{(x+1)^3}=0,\quad \int(y-2)^{-2}dy-\int(x+1)^{-3}=0,$$

$$\frac{(y-2)^{-1}}{-1}-\frac{(x+1)^{-2}}{-2}=C,\quad -\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2(x+1)^2}=C,$$

$$\frac{1}{y-2}=\frac{1}{2(x+1)^2}-C,\quad y-2=\frac{1}{\dfrac{1}{2(x+2)^2}-C},\quad y=2+\frac{1}{\dfrac{1}{2(x+2)^2}-C}.$$

Пример 71. Найти общее решение данного ДУ $y' + x = 5$.

Решение. Выразим производную y' через дифференциалы переменных $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$\frac{dy}{dx} + x = 5, \quad dy + xdx = 5dx.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим общее решение данного уравнения:

$$\int dy + \int xdx = \int 5dx, \quad y + \frac{x^2}{2} = 5x + C$$

или

$$y = 5x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 72. Найти общее решение уравнения $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней с одинаковыми основаниями степеней:

$$2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0, \quad 2^x \cdot 2^y + 3^x \cdot 3^{-2y} \cdot y' = 0, \quad 2^x \cdot 2^y + 3^x \cdot \left(3^2\right)^{-y} \cdot y' = 0,$$

$$2^x \cdot 2^y + 3^x \cdot 9^{-y} \cdot y' = 0, \quad 2^x \cdot 2^y + \frac{3^x}{9^y} \cdot y' = 0.$$

Выразим производную функции через дифференциалы переменных $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx :

$$2^x \cdot 2^y + \frac{3^x}{9^y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad 2^x \cdot 2^y \cdot dx + \frac{3^x}{9^y} \cdot dy = 0.$$

Разделяем переменные, умножая уравнение на $\dfrac{1}{2^y \cdot 3^x}$:

$$2^x \cdot 2^y dx \cdot \frac{1}{2^y \cdot 3^x} + \frac{3^x}{9^y} dy \cdot \frac{1}{2^y \cdot 3^x} = 0, \quad \frac{2^x}{3^x} \cdot dx + \frac{1}{9^y \cdot 2^y} dy = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \frac{1}{18^y} dy = 0, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 18^{-y'} dy = 0.$$

$$2^x \cdot 2^y dx \cdot \frac{1}{2^y \cdot 3^x} + \frac{3^x}{9^y} dy \cdot \frac{1}{2^y \cdot 3^x} = 0, \quad \frac{2^x}{3^x} \cdot dx + \frac{1}{9^y \cdot 2^y} dy = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \frac{1}{18^y} dy = 0, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 18^{-y'} dy = 0.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение данного уравнения:

$$\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \int 18^{-y} dy = 0, \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} - \frac{18^{-y}}{\ln 18} = C.$$

Пример 73. Найти частный интеграл уравнения $ydx + ctgxdy = 0$, удовлетворяющий начальному уравнению $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Решение. Разделяя переменные (делим уравнение на $y \cdot xtgx$) и интегрируя, находим сначала общий интеграл данного уравнения:

$$ydx + ctgxdy = 0, \quad \frac{dx}{ctgx} + \frac{dy}{y} = 0, \quad tgxdx + \frac{dy}{y} = 0,$$

$$\int tgxdx + \int \frac{dy}{y} = 0, \quad -\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C,$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C, \quad |y| = C|\cos x|,$$

$$y = \pm C \cos x = C_1 \cos x.$$

Здесь произвольную постоянную взяли в виде логарифма для удобства нахождения общего интеграла, а поскольку $\pm C$ – это тоже некоторая постоянная величина, поэтому её обозначим через C_1 $(\pm C = C_1)$.

Затем, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных $\left(x = \frac{\pi}{3},\ y = -1\right)$ и определяем соответствующее значение произвольной постоянной:

$$-1 = C_1 \cos\frac{\pi}{3}, \quad -1 = C_1 \cdot \frac{1}{2}, \quad C_1 = -2.$$

При этом значении C_1 из общего интеграла получаем искомый частный интеграл, удовлетворяющий заданному начальному условию, $y = -2\cos x$.

Пример 74. Найти частный интеграл уравнения $y = y' \cdot \cos^2 x \ln y$, удовлетворяющий начальному условию $y(\pi) = 1$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, неразрешенное относительно y'.

Выразим производную y' через дифференциалы переменных $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$y = \frac{dy}{dx} \cdot \cos^2 x \ln y, \quad ydx = \cos^2 x \ln y dy.$$

Разделяя переменные (делим уравнение на $y \cdot \cos^2 x$) и интегрируя, находим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{ydx}{y\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x \ln y dy}{y\cos^2 x}, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\ln y dy}{y},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y dy}{y}, \quad tgx = \int \frac{\ln y}{y} = dy.$$

Найдем полученный интеграл, пользуясь методом замены переменной. Пусть $\ln y = z$, тогда $dz = (\ln y)' dy, \quad dz = \frac{1}{y} dy$. Получим:

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{\ln^2 y}{2} + C. \text{ Тогда } tgx = \frac{\ln^2 y}{2} + C.$$

Используя указанное начальное условие $y(\pi) = 1$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных $(x = \pi, \ y = 1)$ и определяем соответствующее значение произвольной постоянной C:

$$tg\pi = \frac{\ln^2 1}{2} + C, \quad 0 = 0 + C, \quad C = 0.$$

Таким образом, частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий указанному начальному условию, имеет вид:

$$tgx = \frac{\ln^2 y}{2}.$$

3.2.2. Однородные дифференциальные уравнения I порядка

Определение. Функция $f(x;y)$ называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если при умножении каждого её аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, то есть

$$f(\lambda x;\lambda y) = \lambda^n \cdot f(x;y).$$

Например, функция $f(x;y) = x^3 - xy^2 + 5x^2 y$ есть однородная функция третьего порядка, поскольку

$$f(\lambda x;\lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)(\lambda y)^2 + 5(\lambda x)^2 \cdot (\lambda y) = \lambda^3 x^3 - \lambda x \cdot \lambda^2 y^2 +$$
$$+ 5\lambda^2 x^2 \cdot \lambda y = \lambda^3 x^3 - \lambda^3 xy^2 + 5\lambda^3 x^2 y = \lambda^3 (x^3 - xy^2 + 5x^2 y) = \lambda^3 f(x;y)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x;y) \qquad (3.6)$$

называется однородным, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка или если $f(x;y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x;y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то есть уравнение вида

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (3.7)$$

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (3.8)$$

где $P(x;y)$, $Q(x;y)$ – однородные функции одинакового порядка.

Однородное уравнение (3.7) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\frac{y}{x} = u \text{ или, что то же самое, } y = u \cdot x. \qquad (3.9)$$

Пример 75. Проинтегрировать уравнение $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Решение. Уравнение задано в дифференциальной форме (3.8). $P(x;y) = x^2 + y^2$, $Q(x;y) = -2xy$. Проверим однородность этих функций:

$$P(\lambda x;\lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 P(x;y).$$

Функция $P(x;y)$ является однородной второго порядка.

$Q(\lambda x; \lambda y) = -2(\lambda x)(\lambda y) = -2\lambda^2 xy = \lambda^2(-2xy) = \lambda^2 Q(x; y)$. Функция $Q(x; y)$ также является однородной второго порядка. В силу этого данное уравнение является однородным ДУ первого порядка.

Разрешим данное уравнение относительно производной, для этого разделим его на dx, а так как $\frac{dy}{dx} = y'$, получим

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ или } x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

Выразим из последнего уравнения y':

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad y' = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy}, \quad y' = \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\frac{y}{x}.$$

Воспользуемся подстановкой $y = u \cdot x$, тогда $y' = u'x + u$. Подставим правые части этих равенств в последнее уравнение

$$u'x + u = \frac{1}{2}\frac{x}{u \cdot x} + \frac{1}{2}\frac{ux}{x}, \quad u'x + u = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2},$$

$$u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} - u, \quad u'x = \frac{1}{2u} - \frac{u}{2}, \quad u'x = \frac{1 - u^2}{2u}.$$

Так как $u' = \frac{du}{dx}$, тогда получим $\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1-u^2}{2u}$ или $xdu = \frac{1-u^2}{2u}dx$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на $x \cdot \frac{1-u^2}{2u}$

$$\frac{xdu}{x \cdot \frac{1-u^2}{2u}} = \frac{\frac{1-u^2}{2u}dx}{x \cdot \frac{1-u^2}{2u}}, \quad \frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x}, \quad -\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| - \ln C,$$

$$\ln C - \ln\left|1-u^2\right| = \ln|x|, \quad \ln\left|\frac{c}{1-u^2}\right| = \ln|x|,$$

$$\frac{c}{1-u^2}=x \text{ или } x\left(1-u^2\right)=C.$$

Исключая вспомогательную функцию $u\left(u=\dfrac{y}{x}\right)$, окончательно получим

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=C, \quad x-\frac{y^2}{x}=C, \quad \frac{y^2}{x}=\text{x - C} \text{ или } y^2=x^2-Cx.$$

Это и есть искомый общий интеграл.

Пример 76. Найти общее решение дифференциального уравнения $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$.

Решение. Вначале устанавливаем, что данное уравнение – однородное. Разрешим это уравнение относительно y':

$$xy'=y-y\ln\frac{x}{y}, \quad xy'=y\left(1-\ln\frac{x}{y}\right),$$

$$y'=\frac{y}{x}\left(1-\ln\frac{x}{y}\right), \quad y'=\frac{y}{x}\cdot\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Получили уравнение вида (3.7), поэтому оно, а следовательно и данное уравнение является однородным. Заменим функцию y. Полагая $y=u\cdot x$, при этом $y'=u'x+u$, подставим правые части в последнее уравнение

$$u'x+u=\frac{ux}{x}\left(1+\ln\frac{ux}{x}\right), \quad u'x+u=u\left(1+\ln u\right),$$

$$u'x+u=u+u\ln u, \quad u'x=u\ln u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Так как $u'=\dfrac{du}{dx}$, тогда получим: $x\cdot\dfrac{du}{dx}=u\ln u$.

Разделим переменные. Для этого обе части уравнения умножим на dx:

$$xdu=u\ln udx,$$

затем умножим уравнение на $\dfrac{1}{xu\ln u}$:

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем это уравнение:

$$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u\ln u} = \ln|x| + \ln C.$$

Для нахождения интеграла, стоящего в левой части уравнения, воспользуемся методом замены переменной. Пусть $\ln u = z$, тогда $dz = (\ln u)' \cdot du, \quad dz = \frac{1}{u}du$, а значит $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dz}{z}$. $\int \frac{dz}{z} = \ln|z| = \ln|\ln u|$.

Таким образом, получим

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C, \quad \ln|\ln u| = \ln C|x|, \quad |\ln u| = C|x|, \quad u = e^{Cx}.$$

Исключая вспомогательную переменную u, найдем искомый общий интеграл:

$$\frac{y}{x} = e^{Cx}, \quad y = xe^{Cx}.$$

Пример 77. Найти частный интеграл уравнения $xdy - ydx = ydy$, удовлетворяющий начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Выясним, является ли данное уравнение однородным. Разделим уравнение на dx и преобразуем его:

$$x\frac{dy}{dx} - y = y\frac{dy}{dx}, \quad x \cdot \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{dy}{dx} = y, \quad (x - y)\frac{dy}{dx} = y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}, \quad y' = \frac{y}{x-y} = \frac{x \cdot \frac{y}{x}}{x \cdot \left(\frac{x-y}{x}\right)} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

то есть $y' = \dfrac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Полученное уравнение является однородным, соответствующим уравнению (3.7). Поэтому, полагая $y = u \cdot x$, откуда $y' = u'x + u$, получим уравнение

$$u'x + u = \frac{u}{1-u}, \quad u'x = \frac{u}{1-u} - u, \quad u'x = \frac{u - u + u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{u^2}{1-u} \text{ или } x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1-u}.$$

Разделим переменные полученного уравнения с разделяющимися переменными $xdu = \frac{u^2}{1-u}dx$, умножим уравнение на $\frac{1-u}{x \cdot u^2}$:

$$\frac{1-u}{u^2}du = \frac{dx}{x}, \quad \left(\frac{1}{u^2} - \frac{u}{u^2}\right)du = \frac{dx}{x}, \quad \left(u^{-2} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\int\left(u^{-2} - \frac{1}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x}, \quad \int u^{-2}du - \int\frac{du}{u} = \ln|x| - C,$$

$$\frac{u^{-1}}{-1} - \ln|u| = \ln|x| - C, \quad -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| - C,$$

$$C = \frac{1}{u} + \ln|u| + \ln|x|, \quad C = \frac{1}{u} + \ln|xu|.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общий интеграл:

$$C = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \ln\left|x \cdot \frac{y}{x}\right|, \quad C = \frac{x}{y} + \ln|y|, \quad \frac{x}{y} = C - \ln|y|, \quad x = y(C - \ln|y|).$$

Подставив заданные значения переменных $y = 1$, при $x = -1$, найдем значение C: $-1 = 1 \cdot (C - \ln 1)$, $C = -1$.

Следовательно, искомый частный интеграл уравнения имеет вид:

$$x = y(-1 - \ln y) \text{ или } x = -y(1 + \ln|y|).$$

3.2.3. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно записать в виде:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (3.10)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные заданные функции, в частности – постоянные.

Особенность ДУ (3.10): искомая функция y и её производная y' входят в уравнение первой степени, не перемножаясь между собой.

Решение уравнения (3.10) ищется посредством замены функции y произведением двух вспомогательных дифференцируемых функций, зависящих от x, то есть $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. С помощью такой подстановки линейное ДУ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \; n \in z, \; n \neq 0, \; n \neq 1 \qquad (3.11)$$

называется уравнением Бернулли.

Если $n = 0$, то ДУ (3.11) является линейным, а при $n = 1$ – с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли (3.11), отличающееся от линейного уравнения тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y, решается так же, как линейное. Посредством подстановки $y = u \cdot v$ оно также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 78. Найти общее решение уравнение $y' - yctgx = \sin x$.

Решение. Данное уравнение соответствует (3.10), где $p(x) = ctgx$, $q(x) = \sin x$, поэтому является линейным. Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + u \cdot v'$ и данное уравнение преобразуется к виду:

$$u'v + u \cdot v' - u \cdot vctgx = \sin x \text{ или } u'v + u(v' - vctgx) = \sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно взять произвольно, то подберем функцию v такой, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' - vctgx = 0.$$

Или можно сказать так: выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' - vctgx = 0$. Тогда для отыскания u получим уравнение $u'v = \sin x$.

Решим первое уравнение. Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $v' = \frac{dv}{dx}$, получим $\frac{dv}{dx} = vctgx$. Умножим уравнение на $\frac{dx}{v}$: $\frac{dv}{v} = ctgxdx$.

Интегрируя последнее уравнение, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx; \; \ln v = \ln \sin x; \; v = \sin x.$$

Подставляя $v = \sin x$ во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения:

$$u'\sin x = \sin x\,,\ u' = 1,\ \frac{du}{dx} = 1\,,\ du = dx\,,\ \int du = \int dx\,,\ u = x + C\ .$$

Знаая функции u и v, находим искомую функцию y:

$$y = u \cdot v = (x + C)\sin x\,.$$

Пример 79. Найти частное решение уравнения $xy' - y = x\sqrt{x}$, удовлетворяющее условию $y($[illegible]$)=3$.

Решение. Разделим данное уравнение на x:

$y' - \dfrac{1}{x}y = \sqrt{x}$. Здесь $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \sqrt{x}$, согласно (3.10) данное уравнение является линейным.

Полагая $y = uv$, имеем $y' = u'v + uv'$. Данное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = \sqrt{x} \text{ или } u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = \sqrt{x}\,.$$

Отсюда, как и в решении примера 78, получаем два уравнения с разделяющимися переменными: 1) $v' - \dfrac{1}{x}v = 0$ и 2) $u'v = \sqrt{x}$.

Решая первое уравнение, находим v как частный интеграл этого уравнения: $v' - \dfrac{1}{x}v = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{x}v$. Умножим последнее уравнение на $\dfrac{dx}{v}$ и проинтегрировав, находим функцию v:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}\,,\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}\,,\ \ln|v| = \ln|x|\,,\ v = x\,.$$

Подставляя $v = x$ во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения:

$$u'v = \sqrt{x},\ \ u'x = \sqrt{x},\ \ u' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \ \frac{du}{dx} = x^{-\frac{1}{2}},\ \ du = x^{-\frac{1}{2}}dx,$$

$$\int du = \int x^{-\frac{1}{2}}dx,\ \ u = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C,\ \ u = 2x^{\frac{1}{2}} + C,\ \ u = 2\sqrt{x} + C.$$

Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения:

$$y = u \cdot v = \left(2\sqrt{x} + C\right)x .$$

Подставляя сюда заданные значения переменных $y = 3$ при $x = 1$, находим значение произвольной постоянной C :

$$3 = \left(2\sqrt{1} + C\right)\cdot 1,\ 3 = 2 + C\ ,\ C = 1 .$$

Таким образом, искомый частный интеграл будет

$$y = \left(2\sqrt{x} + 1\right)x .$$

Пример 80. Найти общий интеграл уравнения $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2 y^2$:

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2 y^2} \ \text{ или } \ y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^{-2} .$$

Убеждаемся, что это уравнение Бернулли (3.11), где $p(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$q(x) = \frac{1}{x^2} .$$

Заменяя функцию y по формуле $y = uv$, имеем $y' = u'v + uv'$, $u'v + uv' + \dfrac{1}{x} uv = \dfrac{1}{x^2 u^2 v^2}$, $u'v + u\left(v' + \dfrac{1}{x} v\right) = \dfrac{1}{x^2 u^2 v^2}$. Получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' + \frac{1}{x} v = 0 \ \text{ и } 2)\ u'v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2} .$$

Решая первое уравнение, находим v как частный интеграл этого уравнения:

$v' + \dfrac{1}{x} v = 0$, $v' = -\dfrac{1}{x} v$, $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{x} v$. Умножая уравнение на $\dfrac{dx}{v}$ и интегрируя, получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}\ ,\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln|v| = -\ln|x|\ ,\ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$v = \dfrac{1}{x}$ – частный интеграл первого уравнения.

Подставим v во второе уравнение:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2\cdot u^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2},\ u'\frac{1}{x}=\frac{1}{u^2},\ \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{u^2}.$$

Умножим уравнение на u^2xdx и проинтегрируем $u^2du=xdx$, $\int u^2du=\int xdx$, $\frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{3}$, $u^3=\frac{3}{2}x^2+C$, $u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}$.

Тогда искомый общий интеграл данного уравнения

$$y=u\cdot v=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}\ \text{ или }\ y=\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}.$$

Пример 81. Найти частное решение уравнения $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0$, удовлетворяющее условию $y(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$y'-xy=-y^3e^{-x^2}.$$

Здесь $p(x)=-x$, $q(x)=e^{-x^2}$. Убеждаемся, что это уравнение Бернулли (3.11). Заменяя функцию y по формуле $y=u\cdot v$, имеем $y'=u'v+uv'$, $u'v+uv'-xuv=-(uv)^3e^{-x^2}$ или $u'v+u(v'-vx)=-u^3v^3e^{-x^2}$.

Отсюда, как и в решении предыдущего примера, получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1)\ v'-vx=0 \text{ и } 2)\ u'v=-u^3v^3e^{-x^2}.$$

Решим первое уравнение:

$$v'-vx=0,\ v'=vx,\ \frac{dv}{dx}=vx.$$

Умножим уравнение на $\frac{dx}{v}$ и проинтегрируем

$$\frac{dv}{v}=xdx,\ \int\frac{dv}{v}=\int xdx,\ \ln|v|=\frac{x^2}{2},\ v=e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Нашли v как простейший частный интеграл первого уравнения.

Подставим найденную функцию v во второе уравнение и преобразуем его:

$$u'e^{\frac{x^2}{2}} = -u^3 \cdot e^{\frac{3x^2}{2}} \cdot e^{-x^2}, \; u'e^{\frac{x^2}{2}} = -u^3 e^{\frac{x^2}{2}}, \; u' = -u^3.$$

Так как $u' = \dfrac{du}{dx}$, тогда получим: $\dfrac{du}{dx} = -u^3$. Умножим уравнение на $\dfrac{dx}{u^3}$: $\dfrac{du}{u^3} = -dx$, $u^{-3}du = -dx$. Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int u^{-3}du = -\int dx, \; \frac{u^{-3+1}}{-3+1} = -x - \frac{C}{2}, \; \frac{u^{-2}}{-2} = -x - \frac{C}{2}, \; -\frac{1}{2u^2} = -x - \frac{C}{2}.$$

Умножим на -2: $\dfrac{1}{u^2} = 2x + C$, тогда $u^2 = \dfrac{1}{2x+C}$.

Получили общий интеграл второго уравнения. Так как вторая вспомогательная функция u получена в четной степени $\left(u^2\right)$, удобнее выразить общий интеграл данного уравнения как y^2:

$$y^2 = u^2 v^2 = \frac{1}{2x+C} \cdot \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}.$$

Подставляя сюда заданные значения переменных $x = 0$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, находим значение произвольной постоянной C:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{e^0}{2 \cdot 0 + C}, \; \frac{1}{3} = \frac{1}{C}, \; C = 3.$$

Следовательно, искомый частный интеграл будет

$$y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+3}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Проверить, является ли указанная функция решением данного уравнения:

а) $y = Ce^{-2x}$, $y' + 2y = 0$; **б)** $x^2 + 2xy = C$, $(x+y)dx + xdy = 0$;

в) $y = Cx^4$, $xy' - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}$; **г)** $y = C_1 x + C_2 x^2$, $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; **д)** $y = -5\ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, $y''' = \dfrac{5}{x^2}$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Если даны начальные условия, найти частные решения:

2. $2dy - xdx = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$. **3.** $(2x+5)dy + ydx = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. **4.** $y' - (2x+2)\sqrt{1-y^2} = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. **5.** $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 4$. **6.** $y'(4+x^2) + y^2 = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = \dfrac{8}{\pi}$.

7. $\sqrt{x}dy - ydx = dx$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. **8.** $\sqrt{1-x^2}\,y' + x\sqrt{9-y^2} = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. **9.** $y' \cdot \dfrac{1}{\cos 5x} - 5y = 0$, $x_0 = \pi$, $y_0 = \dfrac{1}{5}$. **10.** $3xdx - 2xdy = dx + dy$.

11. $\sqrt{x^2 - 4x + 8}\,y' - \sqrt{16 - y^2} = 0$.

Проинтегрировать однородные дифференциальные уравнения:

12. $xy' = y + \sqrt{25x^2 - y^2}$. **13.** $2xyy' = y^2 - 4x^2$.

14. $x^2 dy = (x^2 + y^2 + xy)dx$. **15.** $y' = tg\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$.

16. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$. **17.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

18. $2x^2 y' = 3x^2 + 6xy + y^2$.

Проинтегрировать линейные ДУ и уравнения Бернулли. Если даны начальные условия, найти частные решения:

19. $y' - y = e^x$. **20.** $(x^2+1)y' + 4xy = 3$; $y(0) = 5$.

21. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$. **22.** $y'x + y + xy^2 = 0$.

23. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$. **24.** $y' + 2xy = 2x^3 y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$.

25. Определить тип дифференциального уравнения:

а) $y'(4 - x^2) - 4y = 0$; **б)** $y' - ytgx = ctgx$; **в)** $y' + 2xy = y^3 x$;

г) $y' = \cos\dfrac{y}{x}$; **д)** $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$; **е)** $\sqrt{1-x^2}\,y' + x\sqrt{9-y^2} = 0$;

ж) $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$; **з)** $\dfrac{xy' - y}{x} = ctg\dfrac{y}{x}$; **и)** $ydy + xdx = 0$;

к) $y' - 5x^2 y = \sin x$.

Ответы. 1. а) является; **б)** является; **в)** не является; **г)** является; **д)** не является. **2.** $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$. **3.** $y = \sqrt{\dfrac{5}{2x+5}}$. **4.** $y = \cos(x^2 + 2x)$.

5. $y=4\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **6.** $y=\dfrac{2}{arctg\,\dfrac{x}{2}}$. **7.** $y=e^{2\sqrt{x}}-1$.

8. $y=3\sin\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)$. **9.** $y=\dfrac{1}{5}e^{\sin 5x}$. **10.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}\ln\left(C(2x+1)\right)$.

11. $y=4\sin\left(\ln\left[C\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right)\right]\right)$. **12.** $y=5x\sin(\ln Cx)$.

13. $y^2+4x^2-8Cx=0$. **14.** $y=xtg(\ln Cx)$. **15.** $Cx=\sin\dfrac{y}{x}$.

16. $\sin\dfrac{y}{x}+\ln x=C$. **17.** $y=\dfrac{2x}{1-Cx^2}$. **18.** $y=\dfrac{3Cx^2-x}{1-Cx}$.

19. $y=(x+C)e^x$. **20.** $y=\dfrac{x^3+3x+5}{(1+x^2)^2}$. **21.** $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

22. $y=\dfrac{1}{x\ln Cx}$. **23.** $y=\dfrac{1}{\ln x+1}$. **24.** $y^2\left(x^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{2x^2}\right)=1$.

25. **а)** с разделяющимися переменными; **б)** линейное; **в)** Бернулли; **г)** однородное; **д)** Бернулли; **е)** с разделяющимися переменными; **ж)** однородное; **з)** однородное; **и)** с разделяющимися переменными; **к)** линейное.

3.3. Дифференциальные уравнения высших порядков

3.3.1. Основные понятия и определения

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ высших порядков. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x; y; y'; y'')=0 \tag{3.12}$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y''=f(x; y; y'). \tag{3.13}$$

Будем в основном рассматривать уравнение вида (3.13): от него всегда можно перейти к (3.12).

Определение. Решением ДУ (3.13) называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Определение. Общим решение ДУ (3.13) называется функция $y=\varphi(x;C_1;C_2)$, где C_1 и C_2 – не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

1. $\varphi(x;C_1;C_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения C_1 и C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0', \tag{3.14}$$

существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0$ и $C_2=C_2^0$ такие, что функция $y=\varphi(x;C^0{}_1;C^0{}_2)$ является решением уравнения (3.13) и удовлетворяет начальным условиям (3.14).

Определение. Всякое решение $y=\varphi(x;C_1^0;C_2^0)$ уравнения (3.13), получающееся из общего решения $y=\varphi(x;C_1;C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$, называется частным решением.

Решения ДУ (3.13), записанные в виде $\Phi(x;y;C_1;C_2)=0$, $\Phi(x;y;C_1^0;C_2^0)=0$, называются общим и частным интегралами соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой. Общее решение ДУ (3.13) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение – одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0;y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)=y'$.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (3.13), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3.14), называется задачей Коши.

Аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ n-го порядка, которое в общем виде записывается как

$$F(x;y;y';y'';...;y^{(n)})=0$$

или

$$y^{(n)}=f(x;y;y';y'';...;y^{(n-1)}). \tag{3.15}$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти такое решение уравнения, которое удовлетворяет условиям: $y=y_0$, $y'=y_0',\ldots,$ $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ при $x=x_0$, где x_0, y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, которые называются начальными данными или начальными условиями.

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка (в конечном виде) удается произвести только в некоторых частных случаях. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков.

3.3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является метод понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже. $y^{(n)} = \dfrac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx}$.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение $n-$порядка $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз. $y^{(n)} = \dfrac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx}$.

Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)-$го порядка:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1.$$

Снова умножая обе части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-2)-$порядка:

$$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(x)dx + \int C_1 dx + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C \text{ и т.д.}$$

После n-кратного интегрирования получаем общий интеграл y этого уравнения в виде явной функции от x и n произвольных постоянных:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

Пример 82. Найти общее решение уравнения $y''' = 60x^2$.

Решение. Умножая обе части данного уравнения 3-го порядка на dx и затем, интегрируя, получим уравнение 2-го порядка:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx},\ d(y'') = 60x^2 dx,\ \int d(y'') = \int 60x^2 dx,$$

$$y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1,\ y'' = 20x^3 + C_1.$$

Далее тем же способом получаем уравнение 1-го порядка:

$$y'' = \frac{dy'}{dx},\ dy' = (20x^3 + C_1)dx,\ \int dy' = \int (20x^3 + C_1)dx,$$

$$y' = 20 \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2,\ y' = 5x^4 + C_1 x + C_2.$$

И, наконец получаем искомую функцию – общий интеграл данного уравнения:

$$y' = \frac{dy}{dx},\ dy = (5x^4 + C_1 x + C_2)dx,\ \int dy = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)dx,$$

$$y = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,\ y = x^5 + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Пример 83. Найти частное решение уравнения $y^{IV} = \cos^2 x$, удовлетворяющее условиям $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$.

Решение. Заменим y^{IV} отношением дифференциалов: $y^{IV} = \frac{d(y''')}{dx}$. Умножим обе части данного уравнения на dx и проинтегрируем:

$$dy''' = \cos^2 x dx,\ \int dy''' = \int \cos^2 x dx,\ y''' = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx,$$

$$y''' = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x)dx,\ y''' = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C_1,$$

$$y''' = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1.$$

Получили уравнение 3-го порядка. Используя одно из начальных условий $y'''(0) = 0$, найдем константу C_1:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \sin 0 + C_1,\ C_1 = 0.$$

Заменяя y''' отношением дифференциалов $y'''=\frac{dy''}{dx}$, умножая обе части уравнения 3-го порядка на dx, а затем, интегрируя, получим уравнение 2-го порядка:

$$dy''=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)dx\,,\quad \int dy''=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)dx\,,$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C_2\,,\quad y''=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\cos 2x+C_2\,.$$

Используя начальное условие $y''(0)=\frac{1}{8}$, найдем константу C_2:

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{8}\cos 0+C_2\,,\quad \frac{1}{8}=-\frac{1}{8}+C_2\,,\quad C_2=\frac{1}{4}\text{, тогда}$$

$$y''=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\,.$$

Выполняя те же действия, получим уравнение 1-го порядка:

$$y''=\frac{dy'}{dx}\,,\quad dy'=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\right)dx\,,$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\right)dx\,,\quad y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}x+C_3\,,$$

$$y'=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x+C_3\,.$$

Так как $y'(0)=0$, найдем постоянную C_3:

$0=\frac{1}{12}\cdot 0-\frac{1}{16}\sin 0+\frac{1}{4}\cdot 0+C_3\,,$ $\qquad C_3=0\,,$ $\qquad$ тогда $y'=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x\,.$

И, наконец, найдем функцию y, используя те же действия:

$$y'=\frac{dy}{dx}\,,\quad dy=\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x\right)dx\,,$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x\right)dx,\quad y=\frac{1}{12}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+C_4,\quad y=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{1}{8}x^2+C_4.$$

По условию $y(0)=\frac{1}{32}$, тогда $\frac{1}{32}=\frac{1}{48}\cdot 0+\frac{1}{32}\cdot\cos 0+\frac{1}{8}\cdot 0+C_4$, $\frac{1}{32}=\frac{1}{32}+C_4$, $C_4=0$.

Таким образом, частный интеграл данного уравнения имеет вид:

$$y=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{1}{8}x^2.$$

II. Дифференциальное уравнение вида $F(x;y^{(k)};y^{(k+1)};...;y^{(n)})=0$, не содержащее явно искомой функции y. Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, то есть, полагая $y^{(k)}=p$, где $p=p(x)$. Тогда получаем уравнение:

$$F(x;p;p';...;p^{(n-k)})=0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

Пример 84. Найти общее решение уравнения $(x-3)y''+y'=0$.

Решение. Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно функции y. Полагая $y'=p$, получим $y''=\frac{dp}{dx}$ и после подстановки данное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$(x-3)\frac{dp}{dx}+p=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$(x-3)dp+pdx=0,\quad \frac{dp}{p}+\frac{dx}{x-3}=0,\quad \int\frac{dp}{p}+\int\frac{dx}{x-3}=0,$$

$$\ln|p|+\ln|x-3|=\ln C_1,\ \ln|p(x-3)|=\ln C_1,\ p(x-3)=C_1,\ p=\frac{C_1}{x-3}.$$

Заменяя вспомогательную переменную p через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x-3}$, решая которое найдем искомый общий интеграл: $dy=\frac{C_1}{x-3}dx$, $\int dy=\int\frac{C_1}{x-3}dx$, $y=C_1\ln|x-3|+C_2$.

Пример 85. Найти частный интеграл уравнения $(y''x - y')y' = x^3$, удовлетворяющий условиям $y(\,) = 1$, $y'(\,) = 0$.

Решение. Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно функции y, поэтому, полагая $y' = p$, получим $y'' = p'$. Подставим правые части полученных равенств в данное уравнение:

$$(p'x - p)p = x^3,\ p'px - p^2 = x^3.$$

Разделим обе части уравнения на px:

$$p' - \frac{p}{x} = \frac{x^2}{p} \text{ или } p' - p \cdot \frac{1}{x} = x^2 \cdot \frac{1}{p}.$$

Получили дифференциальное уравнение Бернулли. Воспользуемся подстановкой $p = u \cdot v$, откуда $p' = u'v + uv'$, тогда получим

$$u'v + uv' - uv \cdot \frac{1}{x} = x^2 \cdot \frac{1}{uv},\ u'v + u\left(v' - v \cdot \frac{1}{x}\right) = x^2 \cdot \frac{1}{uv}.$$

Отсюда получаем два уравнения с разделяющимися переменными

$$1)\ v' - v \cdot \frac{1}{x} = 0 \text{ и } 2)\ u'v = x^2 \cdot \frac{1}{uv}.$$

Решим первое уравнение. $v' = \dfrac{dv}{dx}$. Умножим обе части уравнения на dx и разделим переменные

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \frac{1}{x},\ dv = v \cdot \frac{1}{x} dx,\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, найдем функцию v:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x},\ \ln|v| = \ln|x|,\ v = x.$$

Подставляя $v = x$ во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения

$$u'x = x^2 \cdot \frac{1}{ux},\quad u'x = \frac{x}{u},\quad u' = \frac{1}{u},\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{u},\quad du = \frac{1}{u} dx,\quad udu = dx,$$

$\displaystyle\int udu = \int dx$, $\quad \dfrac{u^2}{2} = x + \dfrac{C_1}{2}$, $\quad u^2 = 2x + C_1$, $\quad u = \sqrt{2x + C_1}$. Тогда $p = u \cdot v = x\sqrt{2x + C_1}$. Поскольку $p = y'$, тогда $y' = x\sqrt{2x + C_1}$.

Получили ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными: $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{2x + C_1}\,,\ dy = x\sqrt{2x + C_1}\,dx.$$

Проинтегрируем полученное уравнение

$$\int dy = \int x\sqrt{2x + C_1}\,dx\,,\ y = \int x\sqrt{2x + C_1}\,dx\,.$$

Воспользуемся методом подстановки.

Пусть $\sqrt{2x + C_1} = z$, $2x + C_1 = z^2$, тогда $2x = z^2 - C_1$, $x = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}C_1$,

$$dx = d\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}C_1\right),\ dx = \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}C_1\right)' dz\,,\ dx = zdz\,.$$

$$\int x\sqrt{2x + C_1}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}C_1\right)\cdot z \cdot zdz = \int\left(\frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{2}C_1 z^2\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1}{2}C_1\frac{z^3}{3} + C_2 = \frac{1}{10}\sqrt{(2x + C_1)^5} - \frac{1}{6}C_1\sqrt{(2x + C_1)^3} + C_2\,.$$

Таким образом общий интеграл данного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{10}\sqrt{(2x + C_1)^5} - \frac{1}{6}C_1\sqrt{(2x + C_1)^3} + C_2\,.$$

Используя начальные условия $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 1$, найдем значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{10}\sqrt{(2 + C_1)^5} - \frac{1}{6}C_1\sqrt{(2 + C_1)^3} + C_2, \\ 0 = 1\sqrt{2 + C_1}\,;\ \Rightarrow 2 + C_1 = 0,\ C_1 = -2. \end{cases}$$

$$1 = \frac{1}{10}\sqrt{(2 - 2)^5} - \frac{1}{6}(-2)\sqrt{(2 - 2)^3} + C_2\,,\ C_2 = 1\,.$$

Тогда частный интеграл данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{10}\sqrt{(2x - 2)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{(2x - 2)^3} + 1.$$

III. Дифференциальное уравнение вида $F(y; y'; y''; ...; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно независимой переменной x. Такое уравнение называется неполным ДУ.Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = p'' \cdot y' \cdot p + p' \cdot p \cdot y =$

$= p'' \cdot p \cdot p + (p')^2 \cdot p = p'' \cdot p^2 + (p')^2 \cdot p$ и так далее.

Пример 86. Найти общее решение уравнения $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$.

Решение. Это неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно аргумента x. Положим $y' = p = p(y)$; тогда $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$ и данное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка:

$$p' \cdot p = \sqrt{1-p^2}\ ;\ p \cdot \frac{dp}{dy} = \sqrt{1-p^2} \text{ или } pdp = \sqrt{1-p^2}\,dy .$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными вида (3.5). Умножим обе части полученного уравнения на $\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ и проинтегрируем:

$$\frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}} = dy,\ \int \frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}} = \int dy,\ y + C_1 = \int \frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}} .$$

Применим к последнему интегралу метод подстановки. Пусть $1-p^2 = z$, тогда $p^2 = 1-z$, $2pdp = dz$, $pdp = -\dfrac{dz}{2}$. Подставим полученные выражения под знак интеграла

$$\int \frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}} = \int \frac{-\frac{dz}{2}}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = -\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-p^2}$$

Тогда получим $y + C_1 = -\sqrt{1-p^2}$, $\sqrt{1-p^2} = -(y + C_1)$,

$1-p^2 = (y+C_1)^2$, $p^2 = 1-(y+C_1)^2$. Так как $p = y'$, тогда

$(y')^2 = 1-(y+C_1)^2$, $y' = \pm\sqrt{1-(y+C_1)^2}$, $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-(y+C_1)^2}$. Умножим полученное уравнение на $\dfrac{dx}{\sqrt{1-(y+C_1)^2}}$ и проинтегрируем

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{1-(y+C_1)^2}}=dx,\ \pm\int\frac{dy}{\sqrt{1-(y+C_1)^2}}=\int dx,\ x+C_2=\pm\arccos(y+C_1),$$

$y+C_1=\cos(x+C_2)$.

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y=\cos(x+C_2)-C_1.$$

Пример 87. Найти частное решение уравнения $y\cdot y''-(y')^2=y^3$, удовлетворяющее условиям $y(0)=-\dfrac{1}{2}$, $y'(0)=0$.

Решение. Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно аргумента x. Поэтому $y'=p$, тогда $y''=p'\cdot p$, данное уравнение примет вид:

$$y\cdot p'\cdot p-p^2=y^3 \text{ или } p'-\frac{p}{y}=\frac{y^2}{p}.$$

Получили уравнение Бернулли 1-го порядка, где p рассматривается как функция от y.

Заменяя функцию по формуле $p=u\cdot v$, имеем $u'v+uv'-\dfrac{uv}{y}=\dfrac{y^2}{u\cdot v}$ или $u'v+u\left(v'-\dfrac{v}{y}\right)=\dfrac{y^2}{uv}$.

Отсюда для нахождения u и v получим два уравнения:

$$1)\ v'-\frac{v}{y}=0 \text{ и } 2)\ u'v=\frac{y^2}{uv}.$$

Из первого уравнения находим u, как его простейший частный интеграл:

$v'=\dfrac{v}{y}$, $\dfrac{dv}{dy}=\dfrac{v}{y}$. Умножим уравнение на $\dfrac{dy}{v}$ и проинтегрируем

$$\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y},\ \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dy}{y},\ \ln v=\ln y,\ v=y.$$

Подставляя v во второе уравнение, находим u, как его общий интеграл:

$u' \cdot y = \dfrac{y^2}{u \cdot y}$, $u' = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{u}$. Умножим обе части уравнения на $u \cdot dy$ и проинтегрируем

$$udu = dy,\ \int udu = \int dy,\ \frac{u^2}{2} = y + C_1,\ u^2 = 2(y + C_1),\ u = \pm\sqrt{2(y + C_1)}.$$

Зная u и v, находим $p = u \cdot v = \pm y\sqrt{2(y + C_1)}$.

Заменяя p через $\dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2(y + C_1)}.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение целесообразно определить значение постоянной C_1, используя заданные значения $y = -\dfrac{1}{2}$, $y' = 0$:

$$0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(-\frac{1}{2} + C_1\right)},\ 2\left(-\frac{1}{2} + C_1\right) = 0,\ C_1 = \frac{1}{2}.$$

Подставляя значение C_1 в последнее уравнение, разделяя в нем переменные и интегрируя, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)},\ \frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2y+1},\ \frac{dy}{y\sqrt{2y+1}} = \pm dx,$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{2y+1}} = \pm\int dx,\ \pm x + C_2 = \int \frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}.$$

Для отыскания полученного интеграла воспользуемся подстановкой $z = \sqrt{2y+1}$, тогда $2y + 1 = z^2$, $2y = z^2 - 1$, $y = \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{1}{2}$, $dy = \dfrac{1}{2} \cdot 2zdz$, $dy = zdz$.

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{2y+1}} = \int \frac{zdz}{\left(\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot z} = \int \frac{dz}{\frac{1}{2}(z^2-1)} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2y+1}-1}{\sqrt{2y+1}+1}\right|.$$

Следовательно,

$$C_2 \pm x = \ln\left|\frac{\sqrt{2y+1}-1}{\sqrt{2y+1}+1}\right|.$$

Наконец, используя заданные значения $x=0$, $y=-\frac{1}{2}$, определяем значение постоянной C_2:

$$C_2 \pm 0 = \ln\left|\frac{\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}-1}{\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}+1}\right|, \quad C_2 = \ln\left|\frac{\sqrt{0}-1}{\sqrt{0}+1}\right| = \ln|-1| = \ln 1, \quad C_2 = 0$$ и

получаем искомый частный интеграл

$$x = \pm\ln\left|\frac{\sqrt{2y+1}-1}{\sqrt{2y+1}+1}\right|.$$

Как показано в решениях примера 83 и примера 87, при отыскании частных интегралов уравнений высших порядков (указанных типов) нет необходимости сначала находить общий интеграл, а лишь затем определять значения всех постоянных. Можно, и лучше, определять значение каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

Задания для самостоятельного решения

Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y''=\sin 2x$. **2.** $y''=\ln x$. **3.** $xy''-2y'=0$. **4.** $xy''-y'=x^2e^x$.

5. $y''+(y')^3\cdot e^y=0$. **6.** $y''(y-4)=(y')^2$.

Найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

7. $y^{(4)}=x$, $y(0)=0$, $y'(0)=-3$, $y''(0)=2$, $y'''(0)=1$.

8. $xy''+x\cdot(y')^2-y'=0$, $y(2)=2$, $y'(2)=1$. **9.** $yy''+(y')^2=1$, $y(0)=y'(0)=1$.

Ответы: 1. $y=-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$.

2. $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$. **3.** $y=C_1x^3+C_2$.

4. $y=(x-1)e^x+C_1x^2+C_2$, **5.** $x=e^y+C_1y+C_2$. **6.** $y=4+C_2e^{C_1x}$.

7. $y=\dfrac{x^5}{120}+\dfrac{x^3}{6}+x^2-3x$. **8.** $y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}$. **9.** $y=x+1$.

3.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

3.4.1 Основные понятия и определения

Определение. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{3.16}$$

где y – искомая функция, p и q – некоторые постоянные.

Если $f(x)=0$, то уравнение (3.16) называется линейным однородным уравнением (ЛОДУ), в противном случае оно называется линейным неоднородным уравнением (ЛНДУ).

Функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ называется линейно независимыми на некотором интервале $(a;b)$, если отношение этих функций является некоторой функцией для всех $x\in(a;b)$, то есть $\dfrac{y_1}{y_2}=y_3(x)$.

Функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, то есть для всех $x\in(a;b)$ выполняется равенство $\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$, или $y_1=\lambda y_2$, $\lambda=const$.

Например, функции $y_1=2e^{3x}$ и $y_2=e^x$ линейно независимы.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый определитель Вронского или вронскиан.

Для двух дифференцируемых функций $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ на интервале $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Теорема 3. (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y^2 = y^2(x)$ ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$ линейно независимы на интервале $(a;b)$, то общим решением этого уравнения является функция

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 , \tag{3.17}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Выражение y_{00} читается: общее решение однородного уравнения.

3.4.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Перед тем, как рассмотреть основные свойства решения ЛОДУ вида

$$y'' + py' + qy = 0 , \tag{3.18}$$

рассмотрим понятие комплексных чисел.

Определение. Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$.

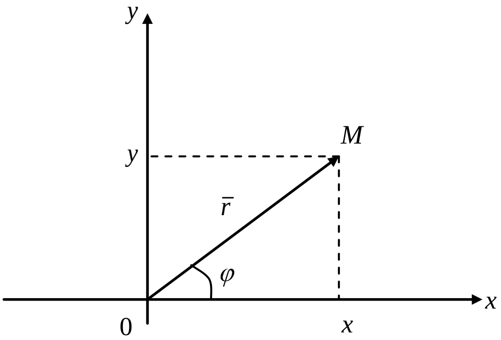
Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x. А это означает, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, то есть $R \subset C$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью z , $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать, как образ комплексного числа $z = x + iy$.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абцисс называется действительной осью, ось ординат – мнимой осью.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус – вектора $\bar{r} = \overline{OM}(x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается $Argz$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0; -1; 1; -2; 2; \ldots)$: $Argz = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi)$, то есть $-\pi < \arg z < \pi$.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Например, $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$; $z=3-4i$, $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$. Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|},\ \sin\varphi=\frac{y}{|z|},\ tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1\cdot z_2=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2=-1.$$

Например,

$$(1-2i)(3+4i)=3-6i+4i-8i^2=3-2i+8=11-2i\ .$$

Произведение сопряженных комплексных чисел $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+ixy-ixy-i^2y^2=x^2+y^2$ – действительное число.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2\neq 0$ называется комплексное число z, определяемое равенством

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ .$$

Пример 88. Выполнить деление $\dfrac{2+3i}{4-3i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на число $(4+3i)$, сопряженное знаменателю

$$\frac{2+3i}{4-3i}=\frac{(2+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{8+12i+6i+9i}{16-9i^2}=\frac{8+18i-9}{16+9}=$$
$$=\frac{-1+18i}{25}=-\frac{1}{25}+\frac{18}{25}i.$$

Пример 89. Вычислить а) $\sqrt{-100}$; б) $\sqrt{-11}$.

Решение. а) $\sqrt{-100}=\sqrt{100\cdot(-1)}=\sqrt{10^2\cdot i^2}=10i$;

б) $\sqrt{-11}=\sqrt{-11\cdot(-1)}=\sqrt{11\cdot i^2}=i\sqrt{11}$.

Пример 90. Решить уравнение $x^2-2x+2=0$.

Решение. Дано квадратное уравнение. Найдем дискриминант $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4<0$. Действительных корней данное уравнение не имеет, но имеет комплексные корни. $\sqrt{D}=\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{2^2\cdot i^2}=2i$. Тогда получим $x_{1,2}=\frac{2\pm2i}{2}=\frac{2}{2}\pm\frac{2}{2}i=1\pm i$, то есть $x_1=1-i$, $x_2=1+i$ – сопряженные комплексные числа, которые и являются решениями данного квадратного уравнения.

Вернемся к линейному однородному уравнению (3.18) $y''+py'+qy=0$, где p и q – вещественные числа. Будем искать решение этого уравнения в виде $y=e^{kx}$, где k – некоторое число. Найдем первую и вторую производные $y'=ke^{kx}$ и $y''=k^2e^{kx}$ и подставим полученные правые части в данное уравнение:

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0.$$

Сокращая обе части этого равенства на e^{kx}, получаем квадратное уравнение:

$$k^2+pk+q=0. \qquad (3.19)$$

Если число k является корнем уравнения (3.19), то функция $y=e^{kx}$ есть решение однородного уравнения (3.18). Уравнение (3.19) называется характеристическим уравнением для уравнения (3.18).

Вид решения уравнения (3.18) существенно зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение (3.19). Обозначим эти корни через k_1 и k_2.

При решении характеристического уравнения (3.19) возможны следующие три случая, зависящие от того, какой знак имеет дискриминант квадратного уравнения (3.19): $D = p^2 - 4q$.

Случай 1. Если корни уравнения (3.19) действительные и различные $k_1 \neq k_2$ $(D > 0)$, то общее решение однородного уравнения (3.18) согласно формуле (3.17) имеет вид:

$$y_{00} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (3.20)$$

Пример 91. Решить уравнение $y'' - 5y + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Решаем его: $D = (-5)^2 - 4\cdot\cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$, тогда $k_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$, $k_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$, то есть $k_1 \neq k_2$ – действительные различные числа. Следовательно, согласно формуле (3.20), общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y_{00} = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Случай 2. Если корни уравнения (3.19) действительные и равные $k_1 = k_2 = k$ $(D = 0)$, то имеем лишь одно частное решение $y_1 = e^{kx}$. Тогда наряду с y_1 решением уравнения (3.18) будет и $y_2 = xe^{kx}$, линейно независимое относительно y_1. $k = -\dfrac{p}{2}$. Поэтому общее решение однородного уравнения (3.18) согласно формуле (3.17) имеет вид:

$$y_{00} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \text{ или } y_{00} = e^{kx} \cdot (C_1 + C_2 x). \qquad (3.21)$$

Пример 92. Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного ЛОДУ имеет следующий вид: $k^2 + 8k + 16 = 0$. $D = 8^2 - 4\cdot 16 = 64 - 64 = 0$, поэтому $k_1 = k_2 = k = -\dfrac{8}{2} = -4$. Так корни характеристического уравнения действительные равны, тогда согласно формуле (3.21) общее решение данного уравнения примет вид:

$$y_{00} = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 x).$$

Случай 3. Если характеристическое уравнение ЛОДУ таково, что его $D < 0$, тогда корнями такого уравнения являются комплексные числа $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$, α и β – вещественные числа, то общее решение уравнения (3.18) имеет вид:

$$y_{00} = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (3.22)$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$ $\left(\text{или } \beta = \frac{\sqrt{|p^2 - 4q|}}{2}\right)$.

Во всех трех случаях C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Заметим, что в случае 3 корни характеристического уравнения с постоянными коэффициентами представляют собой комплексно-сопряженные числа в алгебраической форме.

Пример 93. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного уравнения $k^2 - 2k + 10 = 0$. $D = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 < 0$. Тогда корнями этого уравнения являются комплексные числа. Найдем вещественные числа α и β: $\alpha = -\frac{-2}{2} = 1$, $\beta = \frac{\sqrt{|-36|}}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Корни характеристического уравнения $k_1 = 1 + 3i$, $k_2 = 1 - 3i$. Тогда общее решение данного уравнения согласно формуле (3.22) примет вид:

$$y_{00} = e^{x} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (3.18) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (3.19) и использованию формул (3.20–3.22) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

Составим таблицу, использование которой облегчает отыскание общего решения уравнения (3.18).

<table>
<tr><td>№</td><td colspan="2">$y'' + py' + qy = 0$, $k^2 + pk + q = 0$, $D = p^2 - 4q$, C_1, $C_2 - const$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>$D > 0$; $k_1 \neq k_2$; k_1, $k_2 \in R$</td><td>$y_{00} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

2.	$D=0$, $k_1=k_2=k$, $k\in R$	$y_{00}=e^{kx}\cdot(C_1+C_2x)$
3.	$D<0$, $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$	$y_{00}=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

Заметим, что при составлении характеристического уравнения ЛОДУ (3.18) заменяем функцию y единицей, её первую производную – первой степенью k, а вторую производную – второй степенью k.

Пример 94. Найти общее решение уравнения: $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}=0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение. Так как $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$, $\dfrac{dy}{dx}=y'$, получим уравнение $y''-4y'=0$. Составим характеристическое уравнение $k^2-4k=0$. Получили неполное квадратное уравнение, которое решим более простым способом: $k(k-4)=0$, $k_1=0$, $k_2=4$. Получили два различных действительных корня, поэтому общее решение данного уравнения согласно формуле (3.20) будет иметь вид:

$$y_{00}=C_1e^{ox}+C_2e^{4x} \text{ или } y_{00}=C_1+C_2e^{4x}.$$

Пример 95. Найти частное решение уравнения $y''+4y'+5y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-3$, $y'(0)=0$.

Решение. Вначале находим общее решение данного уравнения. Его характеристическое уравнение $k^2+4k+5=0$. Найдем корни этого уравнения: $D=4^2-4\cdot 5=16-20=-4<0$, корни уравнения – комплексные числа, $\alpha=\dfrac{-4}{2}=-2$, $\beta=\dfrac{\sqrt{|-4|}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$, тогда $k_1=-2+i$, $k_2=-2-i$. Согласно формуле (3.22) общее решение данного уравнения примет вид:

$$y_{00}=e^{-2x}\cdot(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Далее, используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя в общее решение заданные значения $x=0$ и $y=-3$ (первое начальное условие), получим

$$-3=e^{0}\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right) \text{ или } -3=1\cdot\left(C_1\cdot 1+0\right),\ C_1=-3.$$

Дифференцируем общее решение (как произведение)

$$y'_{00}=\left(e^{-2x}\right)'\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{-2x}\cdot\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)',$$

$$y'=-2e^{-2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{-2x}\left(-C_1\sin x+C_2\cos x\right).$$

Подставляя в результат заданные значения $x=0$, $y'=0$, получим второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2:

$$0=-2e^{0}\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right)+e^{0}\left(-C_1\sin 0+C_2\cos 0\right),$$

$$0=-2\left(C_1+0\right)+\left(0+C_2\right),\ 0=-2C_1+C_2,\ C_2=2C_1,\ C_2=-6.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_{чо}=e^{-2x}\cdot\left(-3\cos x-6\sin x\right) \text{ или } y_{чо}=-3e^{-2x}\left(\cos x+2\sin x\right).$$

Пример 96. Найти частное решение уравнения $y''+y'-12y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Найдем общее решение данного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение $k^2+k-12=0$ и решим его: $D=1-4(-12)=1+48=49>0$. $k_1=\dfrac{-1-7}{2}=-4$, $k_2=\dfrac{-1+7}{2}=3$. Так как корни этого уравнения – различные действительные числа, тогда согласно формуле (3.20) общее решение данного уравнения примет вид:

$$y_{00}=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}.$$

Используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Заданные значения $x=0$, $y=1$ подставим в общее решение:

$$1=C_1e^{0}+C_2e^{0},\ C_1+C_2=1.$$

Дифференцируя общее решение и подставляя в результат заданные значения $x=0$, $y'=2$, получим второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2:

$$y'_{00}=C_1\left(-4e^{-4x}\right)+C_2\left(3e^{3x}\right),\ y'=-4C_1e^{-4x}+3C_2e^{3x},$$

$$2=-4C_1e^{0}+3C_2e^{0},\ 2=-4C_1+3C_2.$$

Решим полученные уравнения как систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -4C_1 + 3C_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ -4(1 - C_2) + 3C_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 4C_2 + 3C_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 7C_2 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{6}{7}, \\ C_1 = \dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y_{чо} = \frac{1}{7}e^{-4x} + \frac{6}{7}e^{3x} \text{ или } y_{чо} = \frac{1}{7}\left(e^{-4x} + 6e^{3x}\right).$$

Пример 97. Зная корни характеристического уравнения ЛОДУ, записать общее решение уравнения:

а) $k_1 = 5$**,** $k_2 = 7$; **б)** $k_1 = k_2 = -8$; **в)** $k_1 = 3 + 4i,\ k_2 = 3 - 4i$;

г) $k_1 = 5i,\ k_2 = -5i$.

Решение. а) Так как корни характеристического уравнения различные действительные числа, тогда согласно формуле (3.20) общее решение примет вид

$$y_{00} = C_1e^{5x} + C_2e^{7x}.$$

б) Корни характеристического уравнения действительные и равные, поэтому согласно формуле (3.21) общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$y_{00} = e^{-8x} \cdot (C_1 + C_2x).$$

в) Имеем два сопряженных комплексных числа, значит согласно формуле (3.22) получаем общее решение уравнения

$$y_{00} = e^{3x} \cdot (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

г) Корни характеристического уравнения чисто мнимые числа, где $\alpha = 0$, $\beta = 5$, тогда общее решение примет вид

$$y_{00} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

3.4.3. Интегрирование ЛОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения ЛОДУ *n*-го порядка $(n > 2)$ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_ny = 0, \quad (3.23)$$

где p_i, $i=\overline{1,n}$ – числа, решается аналогично случаю уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общий интеграл уравнения (3.23) имеет вид

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где y_1, y_2, …, y_n – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Частные решения уравнения (3.23) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k – постоянное число.

Характеристическим для уравнения (3.23) является алгебраическое уравнение n-го порядка вида

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \cdot k + p_n = 0. \qquad (3.24)$$

Уравнение (3.24) имеет n корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$. При этом выполняются следующие правила:

1) если все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения (3.24) действительны и различны (однократны), то общий интеграл уравнения (3.23) выражается формулой

$$y_{00} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}; \qquad (3.25)$$

2) если все корни характеристического уравнения действительны, но корень k_1, например, имеет кратность $m\,(k_1 = k_2 = \ldots = k_m)$, то соответствующие m членов в формуле (3.25) заменяются слагаемым

$$e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1})$$

и общий интеграл примет вид

$$y_{00} = e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x};$$

3) если характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то в формуле (3.25) соответствующая пара членов заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

и общий интеграл примет вид

$$y_{00} = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \beta x) + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x} + \ldots + C_n e^{k_n x};$$

4) если пара комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ уравнения (3.24) имеет кратность m, то соответствующие m пар членов в формуле (3.25) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x} \cdot \left[\left(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1} \right) \cos \beta x + \left(C_{m+1} + C_{m+2} x + ... + \right. \right.$$

$$\left. \left. + C_{2m} x^{m-1} \right) \sin \beta x \right] + C_{2m+1} e^{k_{2m+1} \cdot x} + ... + C_n e^{k_n x}$$

и общий интеграл примет вид

$$y_{00} = e^{\alpha x} \cdot \left[\left(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1} \right) \cos \beta x + \left(C_{m+1} + C_{m+2} x + ... + + C_{2m} x^{m-1} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \sin \beta x \right] + C_{2m+1} e^{k_{2m+1} \cdot x} + ... + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 98. Решить уравнение $y''' - 4y'' - y' + 4 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 - k + 4 = 0.$$

Преобразуем левую часть полученного кубического уравнения

$$k^3 - 4k^2 - k + 4 = \left(k^3 - 4k^2 \right) - (k - 4) = k^2 (k - 4) - (k - 4) =$$

$$= (k - 4)\left(k^2 - 1\right) = (k - 4)(k - 1)(k + 1).$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$k - 4 = 0,\ k - 1 = 0,\ k + 1 = 0.$$

Тогда $k_1 = 4$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$ – корни характеристического уравнения.

Так как полученные корни являются различными действительными числами, поэтому, согласно правилу 1, искомый общий интеграл данного уравнения будет

$$y_{00} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.$$

Заметим, что безразлично какой из корней считать первым, какой вторым и так далее.

Пример 99. Найти общий интеграл уравнения $y^{(4)} - 3y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' + 6y = 0$.

Решение. Дано ЛОДУ с постоянными коэффициентами четвертого порядка. По указанному правилу составляем характеристическое уравнение

$$k^4 - 3k^3 - 3k^2 + 7k + 6 = 0.$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения

$$k^4-3k^3-3k^2+7k+6=k^4-3k^3-3k^2+9k-2k+6=$$
$$=\left(k^4-3k^3\right)-\left(3k^2-9k\right)-\left(2k-6\right)=k^3\left(k-3\right)-3k\left(k-3\right)-$$
$$-2\left(k-3\right)=\left(k-3\right)\left(k^3-3k-2\right)=\left(k-3\right)\left(k^3-8-3k+6\right)=$$
$$=\left(k-3\right)\left(\left(k^3-8\right)-\left(3k-6\right)\right)=\left(k-3\right)\left(\left(k-2\right)\left(k^2+2k+4\right)-3\left(k-2\right)\right)=$$
$$=\left(k-3\right)\left(k-2\right)\left(k^2+2k+4-3\right)=\left(k-3\right)\left(k-2\right)\left(k^2+2k+1\right)=$$
$$=\left(k-3\right)\left(k-2\right)\left(k+1\right)^2.$$

Характеристическое уравнение примет вид $\left(k-3\right)\left(k-2\right)\left(k+1\right)^2=0$. Его корнями являются действительные числа $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=k_4=-1$, два из которых равные. Согласно правилу 2, общий интеграл данного уравнения:

$$y_{00}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+e^{-x}\left(C_3+C_4x\right).$$

Пример 100. Решить уравнение $y^{(4)}-y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного уравнения $k^4-1=0$. Решим это уравнение

$$\left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)=0 \text{ или } \left(k-1\right)\left(k+1\right)\left(k^2+1\right)=0,$$

$$k-1=0,\ k+1=0,\ k_1=1,\ k_2=-1,\ k^2=-1 \text{ или } k_{3,4}=\pm i.$$

Поэтому, согласно правилу 3, искомый общий интеграл

$$y_{00}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Пример 101. Найти общий интеграл уравнения $y^{(4)}+13y''+36y=0$.

Решение. Дифференциальному уравнению $y^{(4)}+13y''+36y=0$ соответствует характеристическое уравнение $k^4+13k^2+36=0$. Полученное уравнение является биквадратным. Пусть $k^2=z$, тогда получим $z^2+13z+36=0$,

$z_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-4\cdot 36}}{2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-13\pm 5}{2}=-9;-4.$ $k^2=-9$, $k^2=-4$. Характеристическое уравнение имеет две пары мнимых сопряженных корней $k_{1,2}=\pm 3i$, $k_{3,4}=\pm 2i$. Согласно правилу 3, общий интеграл данного уравнения

$$y_{00}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Пример 102. Решить уравнение $y^{(7)}+10y^{(5)}+25y^{(3)}=0$.

Решение. Данному ЛОДУ седьмого порядка соответствует характеристическое уравнение $k^7+10k^5+25k^3=0$ или $k^3\left(k^4+10k^2+25\right)=0$, $k^3\left(k^2+5\right)^2=0$. Оно имеет трехкратный действительный корень $k=0\left(k_1=k_2=k_3=0\right)$ и пару двукратных мнимых сопряженных корней $k=\pm\sqrt{5}\cdot i\left(k_4=k_5=\sqrt{5}i,\ k_6=k_7=-\sqrt{5}i\right)$. Поэтому, согласно правилам 2 и 4, общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$y_{00}=C_1+C_2x+C_3x^2+\left(C_4+C_5x\right)\cos\sqrt{5}x+\left(C_6+C_7x\right)\sin\sqrt{5}x.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений:

1. $y''-y'=0.$ **2.** $y''-25y=0.$

3. $y''+9y'-10y=0.$ **4.** $y''-4y'-7y=0.$

5. $y''-2y'+y=0.$ **6.** $y''+14y'+49y=0.$

7. $y''+y'+\frac{1}{4}=0.$ **8.** $y''-8y'+16y=0.$

9. $y''+36y=0.$ **10.** $y''+4y'+13y=0.$

11. $y''-2\sqrt{3}y'+7y=0.$ **12.** $y''+100y=0.$

13. $y'''-4y''+3y'=0.$ **14.** $y'''-3y''+3y'-y=0.$

15. $y^{(4)}+26y^{(2)}+25y=0.$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

16. $y''-20y'+19y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=18.$

17. $y''+18y'+81y=0,\quad y(0)=\frac{1}{3},\quad y'(0)=1.$

18. $y''+6y'+10y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1.$

Ответы: 1. $y_{00}=C_1+C_2e^x$. **2.** $y_{00}=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$.

3. $y_{00}=C_1e^{-10x}+C_2e^x$. **4.** $y_{00}=C_1e^{\left(2-\sqrt{11}\right)x}+C_2e^{\left(2+\sqrt{11}\right)x}$.

5. $y_{00}=e^x\left(C_1+C_2x\right)$. **6.** $y_{00}=e^{-7x}\cdot\left(C_1+C_2x\right)$.

7. $y_{00}=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(C_1+C_2x\right)$. **8.** $y_{00}=e^{4x}\left(C_1+C_2x\right)$.

9. $y_{00} = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$. **10.** $y_{00} = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

11. $y_{00} = e^{\sqrt{3}x}\cdot(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

12. $y_{00} = C_1\cos 10x + C_2\sin 10x$. **13.** $y_{00} = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{3x}$.

14. $y_{00} = e^{x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

15. $y_{00} = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 5x + C_4\sin 5x$.

16. $y_{чо} = -e^{x} + e^{19x}$.

17. $y_{чо} = e^{-9x}\left(\dfrac{1}{3} + 4x\right)$. **18.** $y_{чо} = e^{-3x}\cdot(\cos x + 7\sin x)$.

3.4.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''' + py' + qy = f(x), \tag{3.26}$$

где p и q постоянны, $f(x) \neq 0$. Уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.27}$$

Левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (3.26), называется соответствующим ему однородным уравнением.

Теорема 4 (структура общего решения ЛНДУ). Общим решением $y_{он}$ уравнения (3.26) является сумма его произвольного (некоторого) частного решения $y_{чн}$ и общего решения y_{00} соответствующего однородного уравнения (3.27), то есть

$$y_{он} = y_{чн} + y_{оо}. \tag{3.28}$$

Укажем некоторые случаи нахождения частного некоторого решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов, не требующим интегрирования. Эти случаи типизируются по виду правой части уравнения $f(x)$.

I. $f(x) = P_n(x)e^{ax}$.

II. $f(x) = e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

Суть метода, называемого методом неопределенных коэффициентов, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (3.26) записывают ожидаемую форму частного некоторого решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют её в уравнение (3.26) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

I. Правая часть уравнения (3.26) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где $a \in R$, $P_n(x)$ – многочлен степени n. Тогда частное некоторое решение $y_{чн}$ ищется в виде:

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{ax} \cdot x^r, \tag{3.29}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, r – количество корней характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, совпадающих с a (то есть r – число, показывающее, сколько раз a является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$). Это означает, что r может принимать одно из следующих значений: 0;1;2.

а) Пусть a не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, то есть $a \neq k_{1,2}$. Следовательно, $r = 0$, тогда $y_{чн} = Q_n(x)e^{ax}$.

б) Пусть $a = k_1 \neq k_2$ (или $a = k_2 \neq k_1$), то есть a совпадает только с одним из корней характеристического уравнения, тогда $r = 1$, следовательно,

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{ax} \cdot x.$$

в) Если $a = k_1 = k_2$, то есть корни характеристического уравнения есть действительные равные числа и равные a, тогда $r = 2$ и

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{ax} \cdot x^2.$$

Если в данной правой части $f(x)$ уравнения (3.26) отсутствует множитель e^{ax}, это означает, что $a = 0$, т.к. $e^{ax} = 1$.

Еще раз поясним, как определяются коэффициенты многочлена $Q_n(x)$: находим первую и вторую производные $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$, полученные правые части $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставляем в данное уравнение. После преобразования получаем слева – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа – многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_n(x)$.

Напомним, каковы коэффициенты многочленов некоторых степеней:

многочлен нулевой степени $Q_0(x) = A$;

многочлен первой степени $Q_1(x) = Ax + B$;

многочлен второй степени $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$;

многочлен третьей степени $Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и так далее, где A , B , C , D – некоторые постоянные величины.

Пример 103. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

Решение. Согласно теореме 4 $y_{он} = y_{чн} + y_{00}$, поэтому вначале найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 6y' + 5y = 0$. Составим характеристическое уравнение и решим его

$$k^2 + 6k + 5 = 0,\ k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = 5; -1 .$$

Тогда $y_{00} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x}$.

Найдем частное некоторое решение $y_{чн}$ данного уравнения. По условию $f(x) = 25x^2 - 2$ – многочлен второй степени, множитель e^{ax} отсутствует, поэтому $a = 0$. Среди корней характеристического нет нулей, следовательно $r = 0$, таким образом, $y_{чн}$ есть многочлен второй степени

$$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C .$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B и C найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$

$$y'_{гн} = 2Ax + B ,\ y''_{гн} = 2A .$$

Правые части $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение

$$2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 2,$$
$$2A + 12Ax + 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 25x^2 - 2$$

или

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + (2A + 6B + 5C) = 25x^2 - 2 .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих частей равенства, так как только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5, \\ B = -12, \\ C = 12. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{чн} = 5x^2 - 12x + 12$.

Тогда общее решение данного уравнения примет вид

$$y_{он} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12 .$$

Пример 104. Решить уравнение $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 10y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 3k - 10 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2} = -5;2$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{00} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} .$$

Правая часть данного уравнения $f(x) = xe^{-2x}$ есть произведение многочлена первой степени на e^{-2x} . Здесь $a = -2$ не совпадает ни с одним из корней характеристического решения, поэтому $r = 0$. Частное некоторое решение данного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = (Ax + B)e^{-2x} .$$

Для определения коэффициентов A и B найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$

$$y'_{чн} = (Ax + B)' e^{-2x} + (Ax + B)(e^{-2x})' = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} ,$$

$$y''_{чн} = (Ae^{-2x})' - 2(Ax + B)' e^{-2x} - 2(Ax + B)(e^{-2x})' =$$
$$= -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4(Ax + B)e^{-2x}.$$

Правые части равенств $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение

$$-4Ae^{-2x} + 4(Ax + B)e^{-2x} + 3Ae^{-2x} - 6(Ax + B)e^{-2x} -$$
$$-10(Ax + B)e^{-2x} = xe^{-2x}.$$

Сократим полученное равенство на e^{-2x} и приведем подобные слагаемые

$$-A - 12(Ax + B) = x ,\; -A - 12Ax - 12B = x \text{ или } -12Ax - (A + 12B) = x .$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} -12A = 1, \\ -(A + 12B) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{12}, \\ B = \dfrac{1}{144}. \end{cases}$$

Частное некоторое решение примет вид

$$y_{чн} = \left(-\frac{1}{12}x + \frac{1}{144}\right)e^{-2x}.$$

Тогда общее решение данного уравнения

$$y_{он} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{12}x + \frac{1}{144}\right)e^{-2x}.$$

Пример 105. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ или $(k-1)^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения примет вид

$$y_{00} = e^x (C_1 + C_2 x).$$

По условию $f(x) = xe^x$, здесь $a = 1$ дважды совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому $r = 2$, $x -$ многочлен первой степени, следовательно, частное некоторое решение данного уравнения будет иметь вид

$$y_{чн} = (Ax + B)e^x \cdot x^2$$

или

$$y_{чн} = (Ax^3 + Bx^2)e^x /$$

Аналогично примерам 103 и 104 найдем коэффициенты A и B:

$$y'_{чн} = (Ax^3 + Bx^2)' e^x + (Ax^3 + Bx^2)(e^x)' =$$
$$= (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x,$$

$$y''_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx)' e^x + (3Ax^2 + 2Bx)(e^x)' + (Ax^3 + Bx^2)' e^x +$$
$$+ (Ax^3 + Bx^2)(e^x)' = (6Ax + 2B)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x +$$
$$+ (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$

Правые части равенств $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение:

$$(6Ax + 2B)e^x + 2(3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x -$$
$$-2(3Ax^2 + 2Bx)e^x - 2(Ax^3 + Bx^2)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = xe^x.$$

Сократим полученное равенство на e^x и приведем подобные слагаемые $6Ax + 2B = x$.

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 2B = 0; \end{cases} \begin{cases} A = \dfrac{1}{6}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y_{чн} = \dfrac{1}{6} x^3 e^x$. Тогда общее решение данного уравнения

$$y_{он} = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6} x^3 e^x .$$

Пример 106. Найти частное решение уравнения $y'' - 3y' = 3x + x^2$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = \dfrac{70}{27}$.

Решение. Вначале найдем общее решение данного неоднородного уравнения. Решим соответствующее однородное уравнение. Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k = 0$ или $k(k-3) = 0$ имеет различные действительные корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 3$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{00} = C_1 e^{ox} + C_2 e^{3x} \text{ или } y_{00} = C_1 + C_2 e^{3x} .$$

Правая часть данного уравнения $f(x) = 3x + x^2$ – многочлен второй степени, множитель e^{ax} отсутствует, значит, $a = 0$, которое совпадает с одним из корней характеристического уравнения $(k_1 = 0)$, $r = 1$. Поэтому частное некоторое решение данного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C)\cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx .$$

Найдем неопределенные коэффициенты A, B и C.

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C ,$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B .$$

Тогда получим

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = 3x + x^2 ,$$

$$6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C = 3x + x^2$$

или $$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + (2B - 3C) = x^2 + 3x .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -9A = 1, \\ 6A - 6B = 3, \\ 2B - 3C = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{9}, \\ B = -\dfrac{11}{18}, \\ C = -\dfrac{11}{27}. \end{cases}$$

Таким образом $y_{чн} = -\dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{11}{18}x^2 - \dfrac{11}{27}x$, а общее решение данного уравнения

$$y_{он} = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x .$$

Для получения частного решения найдем $y'_{он}$ и воспользуемся начальными условиями $y(0) = 0$ (здесь $x = 0$) и $y'(0) = \dfrac{70}{27}$ (здесь также $x = 0$):

$$y'_{он} = (C_1)' + (C_2 e^{3x})' - \left(\frac{1}{9}x^3\right)' - \left(\frac{11}{18}x^2\right)' - \left(\frac{11}{27}x\right)' =$$

$$= 3 \cdot C_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x - \frac{11}{27}.$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 e^0 - \dfrac{1}{9} \cdot 0 - \dfrac{11}{18} \cdot 0 - \dfrac{11}{27} \cdot 0, \\ \dfrac{70}{27} = 3C_2 e^0 - \dfrac{1}{3} \cdot 0 - \dfrac{11}{9} \cdot 0 - \dfrac{11}{27}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_2 - \dfrac{11}{27} = \dfrac{70}{27}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ 3C_2 = \dfrac{70}{27} + \dfrac{11}{27}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 3C_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Поэтому, частное решение данного уравнения имеет вид

$$y_ч = -1 + e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x .$$

II. Правая часть уравнения (3.26) имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, α и β – действительные числа. Тогда частное некоторое решение данного уравнения $y_{чн}$ ищется в виде

$$y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_l(x)\cos \beta x + Q_e(x)\sin \beta x]. \qquad (3.30)$$

Здесь r равно показателю кратности корней $\alpha \pm \beta i$ в характеристическом уравнении соответствующего однородного уравнения: если характеристическое уравнение таких корней не имеет, то $r = 0$, а если имеет такие корни, то $r = 1$ (то есть в данном случае для уравнений 2-го порядка $r = 0;1$); $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ – полные многочлены от x степени l с различными неопределенными коэффициентами, при одних и тех же степенях x в обоих многочленах, причем l равно наибольшему из чисел n и m ($l = n \geq m$ или $l = m \geq n$):

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_l \text{ и } Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l .$$

Следует помнить, что если в выражении функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, то в $y_{чн}$ надо всегда вводить обе функции.

Неопределенные коэффициенты многочленов находятся так же, как и в случае I.

Форма $y_{чн}$ сохраняется и в случаях, когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

Если правая часть уравнениях (3.26) есть сумма двух функций вида I и II, то есть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то для нахождения частного некоторые решения следует использовать **теорему** о наложении решений: надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и является частым некоторым решением исходного уравнения (то есть уравнения с суммой соответствующих функций в правой части).

Пример 107. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.

Решение. Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + 10y = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 - 2k + 10 = 0$, $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$, тогда $y_{00} = e^x \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. По условию $f(x) = 37\cos 3x$, правой части соответствуют числа $a \pm \beta i = \pm 3i$, которые не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное некоторое решение данного уравнения будет иметь вид

$$y_{чн} = A\cos 3x + B\sin 3x .$$

Здесь A и B – постоянные, так как по условию множитель перед $\cos 3x$ равен 37- постоянной.

Для нахождения A и B найдем первую и вторую производные от $y_{чн}$ и полученные правые части $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение:

$$y'_{чн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad y''_{чн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 2(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 10(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$
$$= 37\cos 3x, \quad -9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 6A\sin 3x - 6B\cos 3x +$$
$$+10A\cos 3x + 10B\sin 3x = 37xos3x,$$

$$(-9A - 6B + 10A)\cos 3x + (-9B + 6A + 10B)\sin 3x = 37\cos 3x,$$

$$(A - 6B)\cos 3x + (B + 6A)\sin 3x = 37\cos 3x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{array}{l|} \cos 3x \\ \sin 3x \end{array} \begin{cases} A - 6B = 37, \\ B + 6A = 0; \end{cases} \begin{cases} B = -6A, \\ A - 6(-6A) = 37; \end{cases} \begin{cases} B = -6A, \\ 37A = 37; \end{cases} \begin{cases} A = 1, \\ B = -6. \end{cases}$$

Тогда получим $y_{чн} = \cos 3x - 6\sin 3x$.

Общее решение данного уравнения примет вид:

$$y_{он} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x \, /$$

Пример 108. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cdot \cos 3x$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид $k^2 - 4k + 13 = 0$, его корни $k_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. Тогда общее решение однородного уравнения

$$y_{00} = e^{2x} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

По условию $f(x) = e^{2x} \cdot \cos 3x$, правой части этой функции соответствует число $\alpha + \beta i = 2 + 3i$, которое совпадает с корнем характеристического уравнения, поэтому частное некоторое решение будем искать в виде

$$y_{чн} = xe^{2x} \cdot (A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Найдем первую и вторую производные от $y_{чн}$:

$$y'_{чн} = \left(xe^{2x}\right)' \cdot \left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + xe^{2x} \cdot \left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)' =$$
$$= \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + xe^{2x} \cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right),$$

$$y''_{чн} = \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)'\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)' +$$
$$+ \left(xe^{2x}\right)' \cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) + xe^{2x} \cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)' =$$
$$= \left(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) + \left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ xe^{2x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right).$$

Подставим полученные результаты в данное уравнение

$$\left(4e^{2x} + 4xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + 2\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ xe^{2x} \cdot \left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right) - 4\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) -$$
$$- 4xe^{2x} \cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) + 13xe^{2x} \cdot \left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) =$$
$$= e^{2x} \cdot \cos 3x,$$

$$\left(4e^{2x} + 4xe^{2x} - 4e^{2x} - 8xe^{2x} + 13xe^{2x}\right)\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) +$$
$$+ \left(2e^{2x} + 4xe^{2x} - 4xe^{2x}\right)\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) + xe^{2x} \cdot$$
$$\cdot \left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right) = e^{2x} \cdot \cos 3x,$$

$$9xe^{2x} \cdot \left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + 2e^{2x} \cdot \left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ xe^{2x} \cdot \left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right) = e^{2x} \cdot \cos 3x.$$

Сократим полученное равенство на e^{2x}:

$$9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x - 6A\sin 3x + 6B\cos 3x - -9Ax\cos 3x -$$
$$-9Bsib3x = \cos 3x, \ -6A\sin 3x + 6B\cos 3x = \cos 3x.$$

Отсюда получим

$$\begin{array}{c|} \sin 3x \\ \cos 3x \end{array} \begin{cases} -6A = 0, \\ 6B = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Таким образом $y_{чн} = \dfrac{1}{6} xe^{2x} \cdot \sin 3x$.

Общее решение данного уравнения примет вид:

$$y_{он} = e^{2x} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{6} x e^{2x} \cdot \sin 3x .$$

Пример 109. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = xe^x \cos x$.

Решение. Решим соответствующее однородное уравнение: $y'' + 2y' + y = 0$, $k^2 + 2k + 1 = 0$, $(k+1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = -1$. Согласно формуле (3.21) получим $y_{00} = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x)$.

По условию $f(x) = xe^x \cos x$, правой части соответствуют числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$, которые не совпадают с корнями характеристического уравнения. Тогда в равенстве (3.30) $r = 0$, $P_l(x) = A_1 x + B_1$, $Q_l = A_2 x + B_2$. Тогда получим

$$y_{чн} = e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x).$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x) + e^x (A_1 \cos x - (A_1 x + B_1) \sin x + \\ + A_2 \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x),$$

$$y''_{чн} = e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x) + e^x (A_1 \cos x - (A_1 x + B_1) \sin x + \\ + A_2 \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x) + e^x (A_1 \cos x - (A_1 x + B_1) \sin x + A_2 \sin x + \\ + (A_2 x + B_2) \cos x) + e^x (-A_1 \sin x - A_1 \sin x - (A_1 x + B_1) \cos x + A_2 \cos x + \\ + A_2 \cos x - (A_2 x + B_2) \sin x).$$

Правые части $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение

$$e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x) + 2e^x (A_1 \cos x - (A_1 x + B_1) \sin x + \\ + A_2 \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x) + e^x (-2A_1 \sin x - (A_1 x + B_1) \cos x + 2A_2 \cos x - \\ - (A_2 x + B_2) \sin x) + 2e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x) + 2e^x (A_1 \cos x - \\ - (A_1 x + B_1) \sin x + A_2 \sin x + (A_2 x + B_2) \cos x) + e^x ((A_1 x + B_1) \cos x + \\ + (A_2 x + B_2) \sin x = e^x \cdot x \cos x.$$

Сократим обе части полученного равенства на e^x и приведем подобные слагаемые

$$(A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x + 2A_1 \cos x - 2(A_1 x + B_1) \sin x +$$

$$+2A_2\sin x+2(A_2x+B_2)\cos x-2A_1\sin x-(A_1x+B_1)\cos x+$$

$$+2A_2\cos x-(A_2x+B_2)\sin x+2(A_1x+B_1)\cos x+2(A_2x+B_2)\sin x+$$

$$+2A_1\cos x-2(A_1x+B_1)\sin x+2A_2\sin x+2(A_2x+B_2)\cos x+$$

$$+(A_1x+B_1)\cos x+(A_2x+B_2)\sin x=x\cos x\,,$$

$$3(A_1x+B_1)\cos x+3(A_2x+B_2)\sin x-4(A_1x+B_1)\sin x+$$

$$+4(A_2x+B_2)\cos x+4A_1\cos x+4A_2\sin x-2A_1\sin x+2A_2\cos x=x\cos x\,.$$

$$(3A_1x+3B_1+4A_2x+4B_2+4A_1+2A_2)\cos x+(3A_2x+3B_2-4A_1x-$$

$$-4B_1+4A_2-2A_1)\sin x=x\cos x\,.$$

Приравнивая множители при одинаковых тригонометрических функциях

$$\begin{array}{r|l}\cos x & (3A_1+4A_2)x+(3B_1+4B_2+4A_1+2A_2)=x\\ \sin x & (3A_2-4A_1)x+(3B_2-4B_1+4A_2-2A_1)=0.\end{array}$$

Получим равенства многочленов, в каждом из которых приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases}3A_1+4A_2=1,\\ 3B_1+4B_2+4A_1+2A_2=0,\\ 3A_2-4A_1=0,\\ 3B_2-4B_1+4A_2-2A_1=0;\end{cases}\qquad \begin{array}{l}A_1=\dfrac{3}{4}A_2,\\ 3\cdot\dfrac{3}{4}A_2+4A_2=1,\\ \dfrac{9}{4}A_2+4A_2=1,\ \dfrac{25}{4}A_2=1,\\ A_2=\dfrac{4}{25},\ A_1=\dfrac{3}{25}.\end{array}$$

$$\begin{cases}3B_1+4B_2+\dfrac{12}{25}+\dfrac{8}{25}=0,\\ -4B_1+3B_2+\dfrac{16}{25}-\dfrac{6}{25}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}3B_1+4B_2=-\dfrac{4}{5},\ \Big|:3\\ -4B_1+3B_2=-\dfrac{2}{5};\ \Big|:4\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_1+\dfrac{4}{3}B_2=-\dfrac{4}{15},\\ -B_1+\dfrac{3}{4}B_2=-\dfrac{1}{10};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B_1+\dfrac{4}{3}B_2=-\dfrac{4}{15},\\ \dfrac{25}{12}B_2=-\dfrac{11}{30};\end{cases}\quad\begin{cases}B_1=-\dfrac{12}{375},\\ B_2=-\dfrac{22}{125}.\end{cases}$$

Тогда $y_{чн}=e^{x}\left(\left(\dfrac{3}{25}x-\dfrac{12}{375}\right)\cos x+\left(\dfrac{4}{25}x-\dfrac{22}{125}\right)\sin x\right)$.

Таким образом, общее решение данного неоднородного уравнения примет вид

$$y_{он} = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + e^{x}\left(\left(\frac{3}{25}x - \frac{12}{375}\right)\cos x + \left(\frac{4}{25}x - \frac{22}{125}\right)\sin x\right).$$

Пример 110. Найти частное решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{x}$, удовлетворяющее условиям $y(0) = \frac{2}{9}$, $y'(0) = -\frac{2}{3}$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 3$. Тогда

$$y_{00} = e^{3x} \cdot (C_1 + C_2 x).$$

Правая часть данного уравнения есть сумма многочлена первой степени $3x$ и показательная функция $-8e^{x}$. Поэтому частное некоторое решение данного уравнения согласно теореме о наложении решений

$$y_{чн} = Ax + B + Ce^{x}.$$

Найдем $y'_{чн}$, $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = A + Ce^{x}, \quad y''_{чн} = Ce^{x}.$$

Правые части $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ подставим в данное уравнение

$$Ce^{x} - 6A - 6Ce^{x} + 9Ax + 9B + 9Ce^{x} = 3x - 8e^{x}$$

и приравнивая коэффициенты подобных членов из обеих частей полученного равенства, имеем систему:

$$\begin{cases} 9A = 3, \\ 9B - 6A = 0, \\ 4C = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = \frac{2}{9}, \\ C = -2. \end{cases}$$

Следовательно $y_{чн} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^{x}$,

$$y_{он} = e^{3x} \cdot (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2e^{x}.$$

Для нахождения частного решения данного уравнения найдем $y'_{он}$

$$y'_{он} = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} - 2e^x$$

и подставим в $y_{он}$ и $y'_{он}$ заданные начальные условия при $x = 0$, $y = \frac{2}{9}$, $y' = -\frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} \frac{2}{9} = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{9} - 2e^0; \\ -\frac{2}{3} = 3e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + C_2 e^0 + \frac{1}{3} - 2e^0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 - 2 = 0, \\ 3C_1 + C_2 + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 2 - 6; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -5. \end{cases}$$

Тогда искомое частное решение примет вид:

$$y_ч = e^{3x} \cdot (2 - 5x) + \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} - 2e^x .$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общие решения ЛНДУ:

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$. **2.** $y'' - y' + y = x^3 + 6.$

3. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. **4.** $y'' - 8y' + 7y = 14.$

5. $y'' - y = e^x$. **6.** $y'' + y = \cos x.$

7. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x.$ **8.** $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

9. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot \cos 2x.$ **10.** $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

11. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$. **12.** $y'' - 3y' = x + \cos x.$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

13. $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

14. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

15. $y'' + y' = 2x^2 e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0{,}5$.

16. $y'' + 9y = 15\sin 2x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 0$.

17. $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 1$.

Ответы: 1. $y_{он} = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

2. $y_{он} = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^3 + 3x^2$.

3. $y_{он} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$. **4.** $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{7x} + 2$.

5. $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$. **6.** $y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x$.

7. $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2} - \frac{2}{5}(3\sin 2x + \cos 2x)$.

8. $y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{x^2}{10} - \frac{x}{25}\right)e^{2x}$.

9. $y_{он} = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{x}{4}e^{x} \sin 2x$.

10. $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x$.

11. $y_{он} = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{2x} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$.

12. $y_{он} = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$.

13. $y_ч = 2\cos x - 5\sin x + 2e^{x}$. **14.** $y_ч = e^{-x}(x - \sin x)$.

15. $y_ч = 1{,}5 + e^{x}(x^2 - 3x + 3{,}5)$. **16.** $y_ч = 3\sin 2x - 7\cos 3x - 2\sin 3x$.

17. $y_ч = \frac{1}{8}e^{2x} \cdot (4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$.

Индивидуальное домашнее задание по теме «Дифференциальные уравнения»

Задача 1. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.

1. $yx^2 - y' = 0$, $y(0) = 10$. 16. $y' = \frac{y}{x}$, $y(2) = 6$.

2. $yy' = 3x^2$, $y(6) = 10$. 17. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

3. $ydy - x^2dx = 0$, $y(3) = 5$. 18. $y'ctgx + y = 2$, $y(0) = -1$.

4. $y'x + \sqrt{4 - y^2} = 0$, $y(1) = 0$. 19. $y'y(1 + e^x) = e^x$, $y(0) = 1$.

5. $y'(4 - x^2) - 4y = 0$, $y(0) = 5$. 20. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$

6. $y' - 2xy - y = 0$, $y(0) = \sqrt{3}$. 21. $xyy' = 1 - x^2$, $y(1) = 2$.

7. $\sqrt{9 - x^2}dy - ydx = 0$, $y\left(\frac{3}{2}\right) = 1$. 22. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$.

8. $dy - 2ydx = dx$, $y(\ln 2) = \frac{5}{2}$. 23. $y'(1 - x^2) - y^2 + 1 = 0$, $y(0) = 0$.

9. $2dy - (1 + 4y^2)dx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$. 24. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$.

10. $\sqrt{25 - y^2} - e^{-x}y' = 0$, $y(0) = 0$. 25. $y'\sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0$, $y(0) = 4$.

11. $(y - 4)dx + (x + 3)dy = 0$, $y(-2) = 5$. 26. $y'x\sqrt{x} - y = 0$, $y(4) = 1$.

12. $\sqrt{2 + y} \cdot \sin x - y' \cos x = 0$, $y(0) = 0$. 27. $(y + 1)y' = \sin x$, $y(0) = 2$.

13. $y' - 1 - 2x = 0$, $y(1) = 3$. 28. $y'\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{y^2 + 5}$, , $y(-1) = -2$

14. $2^x dy - \ln 2dx = 0$, $y(0) = 2$. 29. $y'(x^2 + 2x + 1) = y^2$, $y(-2) = -1$.

15. $(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$, $y(0) = 1$. 30. $y'\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} = 0$, $y(2) = 3$.

Задача 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.

1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$. 16. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$.

2. $y' - 4xy = x$. 17. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$.

3. $y' - y\sin x = \sin 2xe^{-\cos x}$. 18. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

4. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$. 19. $xy' - 2y = 2x^4$.

5. $y' + xy = xy^3$. 20. $y' + 2y = y^2e^x$.

6. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. 21. $y' - y = e^x$.

7. $y' = 2x(x^2 + y)$. 22. $xy' - 3y = x^4e^x$.

8. $y^2 + x^2y' = xyy'$. 23. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

9. $(x^2+1)y'-2xy=(1+x^2)^2$. 24. $y'=2x(x^2+y)$.

10. $xy'+y+xe^{-x^2}=0$. 25. $y'+y=\dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$.

11. $xy'+2y=\dfrac{1}{x}$. 26. $(xy'-1)\ln x=2y$.

12. $x^2dy=(y^2+xy)dx$. 27. $dy=\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)dx$.

13. $y'\sin x-y=\sin x\cdot\sin\dfrac{x}{2}$. 28. $\sqrt{1-x^2}\,(xy'+y)=1$.

14. $xy'+y=\ln x+1$. 29. $y'+xy=xy^3$.

15. $y'\cos x-2y\sin x=2$. 30. $xdy=(x+2y)dx$.

Задача 3. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
2. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$, $y(0)=\dfrac{4}{3}$, $y'(0)=\dfrac{1}{27}$.
3. $y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
4. $y''-2y'+5y=xe^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
5. $y'+5y'+6y=12\cos 2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.
6. $y''-5y'+6y=(2x-7)e^{-x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
7. $y''-4y'+13y=26x+5$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
8. $y''-4y'=6x^2+1$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.
9. $y''-2y'+y=16e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.
10. $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=2$.
11. $y''-4y'=4e^{4x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.
12. $y''-3y'+2y=(x+1)e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.
13. $y''-y'=x+1$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
14. $y''-3y'=x$, $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{1}{9}$.
15. $y''+9y=5\cos 2x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.
16. $y''+16y=17e^{-x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=7$.
17. $y''-10y'+25y=1+5x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

18. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

19. $y'' + 2y' + 5y = \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

20. $y'' + 2y' + y = xe^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

21. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

22. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

23. $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

24. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

25. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

26. $y'' + 2y' + 10y = xe^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

27. $y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

28. $y'' + 100y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

29. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

30. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 2008.

2. Солодовников, А.С. Математика в экономике. Ч. 1, 2 / А.С. Солодовников. – М.: Финансы и статистика, 2005.

3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1, 2 / Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2008.

4. Крамер, И.Ш. Высшая математика для экономистов / И.Ш. Крамер. – М.: ЮНИТИ, 2007.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 / Н.С. Пискунов. – М: Наука, 2006.

6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 2008.

7. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: АНХ при правительстве РФ, 2007.

8. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.Ф. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2007.

9. Малыхин, В.И. Математика в экономике: учеб. пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шуман Галина Ивановна
Волгина Ольга Алексеевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 4

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 14.10.2010. Формат 60×84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. .
Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57