Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Логическое следствие в АВ

Говорят, что формула $\psi(x_1, \dots, x_n)$ АВ является ***логическим следствием формул*** $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$АВ (обозначается $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \vDash \psi$), если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}$ из соотношений

$\varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1, \dots, \varphi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ следует $\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$.

Формулы $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ называются ***гипотезами***.

Формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *выполнимой (опровержимой)*, если существует такой набор значений переменных, на котором формула принимает значение 1 (соответственно 0) .

Пример. Формула $\mathrm{x} \wedge \mathrm{y}$являeтся одновременно выполнимой и опровержимой.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется *тождественно истинной, общезначимой* или *тавтологией (тождественно ложной* или *противоречием),* если эта формула принимает значение *1* (соответственно *0*) на всех наборах значений переменных.

Пример. Формула $x \vee \neg x$ является тождественно истинной, а формула $x \wedge \neg x$ — тождественно ложной

Множество формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ АВ называется противоречивым или несовместным, если формула $\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n$ тождественно ложна.

Пример. Множество формул $x \lor y, \neg x, \neg y$ противоречиво.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, .., \varphi_m, \psi$ – формулы АВ. Следующие условия эквивалентны:

1. $\varphi_1, .., \varphi_m \vDash \psi$;
2. $\varphi_1, .., \varphi_m \vDash \varphi_m \to \psi$;
3. $\{\varphi_1, .., \varphi_m, \neg\psi\}$ – противоречивое множество формул;
4. $\varphi_1, .., \varphi_m \to \psi$ – тождественно истинная формула;
5. $\varphi_1 \land ... \land \varphi_m \land \neg\psi$ – тождественно ложная формула.

Эквивалентные формулы АВ

Формулы φ и ψ АВ называются ***эквивалентными*** (обозначается $\varphi \equiv \psi$), если $\varphi \vDash \psi$ и $\psi \vDash \varphi$, т.е. совпадают их таблицы истинности.

Пример. $(x \rightarrow y) \equiv (\neg y \rightarrow \neg x)$.

Легко видеть, что отношение $\equiv$ является ***отношением эквивалентности*** на множестве формул АВ, т. е. оно рефлексивно ($\varphi \equiv \varphi$), симметрично (если $\varphi \equiv \psi$, то $\psi \equiv \varphi$), транзитивно (если $\varphi \equiv \psi$ и $\psi \equiv \chi$, то $\varphi \equiv \chi$), где φ, ψ, χ – произвольные формулы АВ.

Основные эквивалентности в АВ

1. $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi, \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$ (законы идемпотентности);
2. $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi, \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ (законы коммутативности);
3. $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi), (\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ (законы ассоциативности);
4. $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (законы дистрибутивности)
5. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (законы де Моргана);
6. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (закон двойного отрицания);
7. $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$;
8. $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi, \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$ (законы поглощения);
9. $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$;
10. $\varphi \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \wedge \psi, \neg\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \psi$.

Утверждение. Если формула φ_1 тождественно истинна, φ_0 — тождественно ложна, то для любых формул φ и ψ справедливы следующие эквивалентности:

1) $\varphi \wedge \varphi_1 \equiv \varphi$; $\varphi \vee \varphi_0 \equiv \varphi$;

2) $\varphi \wedge \varphi_0 \equiv \varphi_0$; $\varphi \vee \varphi_1 \equiv \varphi_1$;

3) $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \varphi_0$; $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \varphi_1$.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы в АВ

Если x — логическая переменная, $\delta \in \{0,1\}$, то выражение

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, \text{ если } & \delta = 1, \\ \neg x, \text{ если } & \delta = 0 \end{cases}$$

называется ***литерой***. Литеры x и ¬x называются ***контрарными***.

Элементарной конъюнкцией или ***конъюнктом*** называется конъюнкция литер.
Элементарной дизъюнкцией или ***дизъюнктом*** называется дизъюнкция литер.

Пример. Формулы $x \vee \neg y \vee \neg z$ и $x \vee y \vee x \vee \neg x$ — дизъюнкты, формулы $\neg x \wedge y \wedge z$ и $x \wedge y \wedge \neg x$ — конъюнкты, а $\neg x$ является одновременно и дизъюнктом, и конъюнктом.

Дизъюнкция конъюнктов называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ); конъюнкция дизъюнктов называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ).

Пример. Формула $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)$ — ДНФ, формула $(\mathrm{x} \vee z \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge y$ — КНФ, а формула $x \wedge \neg y$ является одновременно КНФ и ДНФ.

Теорема. Для любой формулы φ АВ существует ДНФ (КНФ) ψ АВ такая, что $\varphi \equiv \psi$.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.
2. Используя законы де Моргана, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания пользуясь законом двойного отрицания.
3. Используя закон дистрибутивности $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$, преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

В результате применения пп. 1-3 получается ДНФ, эквивалентная исходной формуле.

Пример. Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

Приведение формулы к КНФ производится аналогично приведению ее к ДНФ, только вместо п. 3 применяется п. 3':

3'. Используя закон дистрибутивности $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, преобразуем формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

Пример. Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — набор логических переменных, $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ — набор нулей и единиц.

Конституентой единицы набора Δ называется конъюнкт

$$\text{К}^1(\delta_1, \dots, \delta_n) = x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\delta_n}.$$

Конституентой нуля набора Δ называется дизъюнкт

$$\text{К}^0(\delta_1, \dots, \delta_n) = x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee \dots \vee x_n^{1-\delta_n}.$$

Совершенной ДНФ (СДНФ) называется дизъюнкция некоторых конституент единицы, среди которых нет одинаковых, ***совершенной КНФ*** (СКНФ) называется конъюнкция некоторых конституент нуля, среди которых нет одинаковых.

Таким образом, СДНФ (СКНФ) есть ДНФ (КНФ), в которой в каждый конъюнкт (дизъюнкт) каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\neg x_i$.

Пример. Формула $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ есть конституента единицы $K^1(1,0,1)$, формула $x \vee y \vee \neg z$ есть конституента нуля $K^0(0,0,1)$, формула $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$ – СДНФ, формула $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$ – СКНФ, а формула $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$ не является СДНФ.

Теорема. Для любой не тождественно ложной (не тождественно истинной) формулы φ АВ существует единственная СДНФ (СКНФ) ψ АВ такая, что $\varphi \equiv \psi$.

Заметим, что единственность формулы в формулировке теоремы понимается с точностью до порядка следования конъюнктивных сомножителей и дизъюнктивных слагаемых в этой формуле.

Алгоритм приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.
2. Преобразовываем ее конъюнкты в конституенты единицы с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^{δ} входит несколько раз, то удаляем все литеры x^{δ}, кроме одной;

в) если в конъюнкт $x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\delta_n}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу

$$(x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\delta_n} \wedge y) \vee (x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\delta_n} \wedge \neg y);$$

г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них.

Пример. Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.