МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

26 февраля 2008 г.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- ВЫСКАЗЫВАНИЕ – повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- ВЫСКАЗЫВАНИЕ – повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

- ЛОГИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, соответствующая высказыванию P, – это переменная, которая принимает значение 1, если P истинно, и 0, если P ложно.

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных.

- Определение ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (АВ):

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных.

- Определение ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (АВ):

1) любая логическая переменная является формулой АВ;

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных.

- Определение ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (АВ):

1) любая логическая переменная является формулой АВ;

2) если φ и ψ — формулы АВ, то выражения $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ являются формулами АВ;

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных.

- Определение ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (АВ):

1) любая логическая переменная является формулой АВ;

2) если φ и ψ — формулы АВ, то выражения $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ являются формулами АВ;

3) никаких других формул АВ, кроме построенных по пп. 1 и 2, нет.

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных.

- Определение ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (АВ):

1) любая логическая переменная является формулой АВ;

2) если φ и ψ — формулы АВ, то выражения $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ являются формулами АВ;

3) никаких других формул АВ, кроме построенных по пп. 1 и 2, нет.

Если формула φ АВ построена из логических переменных, лежащих в множестве $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то будем писать $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Действия ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$ задаются ТАБЛИЦАМИ ИСТИННОСТИ:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \longrightarrow \psi)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

- СОГЛАШЕНИЯ:

- СОГЛАШЕНИЯ:

1. внешние скобки не пишутся. Например, вместо высказывания $((x \vee y) \longrightarrow z)$ пишется $(x \vee y) \longrightarrow z$;

- СОГЛАШЕНИЯ:

1. внешние скобки не пишутся. Например, вместо высказывания $((x \vee y) \rightarrow z)$ пишется $(x \vee y) \rightarrow z$;

2. на множестве $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ вводится транзитивное отношение “быть более сильным” следующим образом: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \land ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

РЕШЕНИЕ

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

РЕШЕНИЕ

x	y	z	$(x \to y)$	$(\neg y \to z)$	$((\neg y \to z) \to \neg x)$	φ
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x))$. РЕШЕНИЕ

x	y	z	$(x \to y)$	$(\neg y \to z)$	$((\neg y \to z) \to \neg x)$	φ
0	0	0	1			
0	0	1	1			
0	1	0	1			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	1	0			
1	1	0	1			
1	1	1	1			

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

РЕШЕНИЕ

x	y	z	$(x \to y)$	$(\neg y \to z)$	$((\neg y \to z) \to \neg x)$	φ
0	0	0	1	0		
0	0	1	1	1		
0	1	0	1	1		
0	1	1	1	1		
1	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
1	1	0	1	1		
1	1	1	1	1		

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

РЕШЕНИЕ

x	y	z	$(x \to y)$	$(\neg y \to z)$	$((\neg y \to z) \to \neg x)$	φ
0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	0	

ПРИМЕР

Построить таблицу истинности для формулы

$$\varphi \rightleftharpoons ((x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)).$$

РЕШЕНИЕ

x	y	z	$(x \to y)$	$(\neg y \to z)$	$((\neg y \to z) \to \neg x)$	φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ АВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ АВ

- Формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ($\varphi \equiv \psi$), если совпадают их таблицы истинности, т. е. $\psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ для любых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ между формулами:

$1) \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$1') \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ между формулами:

$1) \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\quad 1') \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2) \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\quad 2') \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ между формулами:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$

законы коммутативности

$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

законы ассоциативности

$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ между формулами:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$

законы коммутативности

$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

законы ассоциативности

$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

законы дистрибутивности

$4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ между формулами:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$

$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

$4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

$5)\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

$5')\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

законы де Моргана

6)$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

закон двойного отрицания

$6)\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

закон двойного отрицания

$7)\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$6) \neg\neg\varphi \equiv \varphi$

закон двойного отрицания

$7) \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$8) \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ $\quad$ $8') \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

$6) \neg\neg\varphi \equiv \varphi$

закон двойного отрицания

$7) \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$8) \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ $\quad$ $8') \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

$9) \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi$ $\quad$ $9') \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$6) \neg\neg\varphi \equiv \varphi$

закон двойного отрицания

$7) \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$8) \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ $\quad 8') \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

$9) \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi$ $\quad 9') \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$10) \varphi \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \wedge \psi$ $\quad 10') \neg\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \psi$

законы поглощения

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (ТОЖДЕСТВЕННО ЛОЖНОЙ), если эта формула принимает значение 1 (соответственно 0) на всех наборах значений переменных.

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (ТОЖДЕСТВЕННО ЛОЖНОЙ), если эта формула принимает значение 1 (соответственно 0) на всех наборах значений переменных.

ПРИМЕР

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (ТОЖДЕСТВЕННО ЛОЖНОЙ), если эта формула принимает значение 1 (соответственно 0) на всех наборах значений переменных.

ПРИМЕР

Формула $x \vee \neg x$ является тождественно истинной, а формула $x \wedge \neg x$ – тождественно ложной:

x	$x \vee \neg x$	$x \wedge \neg x$
0	1	0
1	1	0

.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

- Если x — логическая переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

- Если x — логическая переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.
- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

- Если x — логическая переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ называется дизъюнкция литер.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

$$x \vee \neg y \vee \neg z$$

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – конъюнкт,

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – конъюнкт,

$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_1$

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – конъюнкт,

$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_1$ – конъюнкт,

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – конъюнкт,

$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_1$ – конъюнкт,

$\neg x$

ПРИМЕР

$x \vee \neg y \vee \neg z$ – дизъюнкт,

$x \vee y \vee x \vee \neg x$ – дизъюнкт,

$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – конъюнкт,

$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_1$ – конъюнкт,

$\neg x$ – дизъюнкт и конъюнкт.

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)$$

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)$ – ДНФ,

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \text{ – ДНФ},$$

$$(x \vee z \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge y$$

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \text{ – ДНФ},$$

$$(x \vee z \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge y \text{ – КНФ},$$

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \text{ – ДНФ},$$

$$(x \vee z \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge y \text{ – КНФ},$$

$$x \wedge \neg y$$

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ПРИМЕР

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \text{ – ДНФ,}$$

$$(x \vee z \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge y \text{ – КНФ,}$$

$$x \wedge \neg y \text{ – ДНФ и КНФ.}$$

ТЕОРЕМА 1

ТЕОРЕМА 1

1) Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.

ТЕОРЕМА 1

1) Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ДНФ

АЛГОРИТМ приведения формулы к ДНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi$.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ДНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

2. Используя законы де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ДНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

2. Используя законы де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Используя закон дистрибутивности $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \wedge\chi)$, преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \lor \neg(y \to z))$.

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$\varphi \equiv$

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv \neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv \neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \equiv \neg(\neg x \vee y) \wedge \neg\neg(\neg y \vee z) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv \neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \equiv \neg(\neg x \vee y) \wedge \neg\neg(\neg y \vee z) \equiv$$

$$\equiv (\neg\neg x \wedge \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv \neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \equiv \neg(\neg x \vee y) \wedge \neg\neg(\neg y \vee z) \equiv$$

$$\equiv (\neg\neg x \wedge \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv x \wedge \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к ДНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg((x \to y) \vee \neg(y \to z))$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv \neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \equiv \neg(\neg x \vee y) \wedge \neg\neg(\neg y \vee z) \equiv$$

$$\equiv (\neg\neg x \wedge \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv x \wedge \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv \varphi \equiv (x \wedge \neg y \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$\varphi \equiv$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \rightarrow y) \wedge ((\neg y \rightarrow z) \rightarrow \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \rightarrow z) \vee \neg x) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x)$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x)\text{– КНФ.}$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \text{– КНФ.}$$

Упростим полученную формулу:

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$

$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x)$– КНФ.

Упростим полученную формулу:

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$

$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x)$– КНФ.

Упростим полученную формулу:

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv (\neg x \vee (y \wedge \neg y)) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \text{– КНФ.}$$

Упростим полученную формулу:

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv (\neg x \vee (y \wedge \neg y)) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv$$

$$\equiv \neg x \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \land ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \lor y) \land (\neg(\neg y \to z) \lor \neg x) \equiv (\neg x \lor y) \land (\neg(\neg\neg y \lor z) \lor \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \lor y) \land ((\neg\neg\neg y \land \neg z) \lor \neg x) \equiv (\neg x \lor y) \land ((\neg y \land \neg z) \lor \neg x) \text{– КНФ.}$$

Упростим полученную формулу:

$$(\neg x \lor y) \land (\neg x \lor \neg y) \land (\neg x \lor \neg z) \equiv (\neg x \lor (y \land \neg y)) \land (\neg x \lor \neg z) \equiv$$

$$\equiv \neg x \land (\neg x \lor \neg z) \equiv \neg x$$

ПРИМЕР

Привести к КНФ формулу $\varphi \rightleftharpoons (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x) \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg\neg\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \text{– КНФ.}$$

Упростим полученную формулу:

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv (\neg x \vee (y \wedge \neg y)) \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv$$

$$\equiv \neg x \wedge (\neg x \vee \neg z) \equiv \neg x \text{– КНФ.}$$

СОВЕРШЕННЫЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

СОВЕРШЕННЫЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

- СОВЕРШЕННОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (СДНФ) называется дизъюнкция различных конъюнкт, в которые каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\neg x_i$.

СОВЕРШЕННЫЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АВ

- СОВЕРШЕННОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (СДНФ) называется дизъюнкция различных конъюнкт, в которые каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\neg x_i$.

- СОВЕРШЕННОЙ КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (СКНФ) называется конъюнкция различных дизъюнкт, в которые каждая переменная x_i из набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\neg x_i$.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$не СДНФ,

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$не СДНФ,

$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$не СДНФ,

$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ — СДНФ, но не СКНФ,

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$не СДНФ,

$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ — СДНФ, но не СКНФ,

$x \vee y \vee \neg z$

ПРИМЕР

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$— СДНФ,

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$— СКНФ,

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$не СДНФ,

$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ — СДНФ, но не СКНФ,

$x \vee y \vee \neg z$ — СКНФ, но не СДНФ.

ТЕОРЕМА 2

ТЕОРЕМА 2

1) Для любой не тождественно ложной формулы φ АВ существует единственная СДНФ, эквивалентная φ.

ТЕОРЕМА 2

1) Для любой не тождественно ложной формулы φ АВ существует единственная СДНФ, эквивалентная φ.

2) Для любой не тождественно истинной формулы φ АВ существует единственная СКНФ, эквивалентная φ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

2. Преобразовываем ее конъюнкты с помощью следующих действий:

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

2. Преобразовываем ее конъюнкты с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

2. Преобразовываем ее конъюнкты с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^δ входит несколько раз, то удаляем все литеры x^δ, кроме одной;

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

2. Преобразовываем ее конъюнкты с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^δ входит несколько раз, то удаляем все литеры x^δ, кроме одной;

в) если в некоторый конъюнкт $x_1^{\delta_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\delta_k}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $x_1^{\delta_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \neg y)$ и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $y \vee \neg y$;

АЛГОРИТМ приведения формулы к СДНФ

1. Приводим данную формулу к ДНФ.

2. Преобразовываем ее конъюнкты с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^δ входит несколько раз, то удаляем все литеры x^δ, кроме одной;

в) если в некоторый конъюнкт $x_1^{\delta_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\delta_k}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $x_1^{\delta_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \neg y)$ и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $y \vee \neg y$;

г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$\varphi \equiv$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv$$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv \; \equiv (x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) \equiv$$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv \ \equiv (x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv \ \equiv (x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv \ \equiv (x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

ПРИМЕР

Найти СДНФ для ДНФ $\varphi \rightleftharpoons (x \wedge \neg x) \vee x \vee (y \wedge z \wedge y)$.

РЕШЕНИЕ

$$\varphi \equiv x \vee (y \wedge z) \equiv \;\equiv (x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg z)) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z).$$

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

- АЛФАВИТ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ):

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

- АЛФАВИТ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ):

  1) пропозициональные переменные $x, y, z, x_1, x_2, \ldots;$

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

- АЛФАВИТ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ):

  1) пропозициональные переменные $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$;

  2) логические символы (связки) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$;

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

- АЛФАВИТ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ):

1) пропозициональные переменные $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$;

2) логические символы (связки) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$;

3) вспомогательные символы (,).

- МНОЖЕСТВО ФОРМУЛ ИВ определяется индуктивно:

- МНОЖЕСТВО ФОРМУЛ ИВ определяется индуктивно:

  1) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

- МНОЖЕСТВО ФОРМУЛ ИВ определяется индуктивно:

  1) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

  2) если φ, ψ — формулы ИВ, то $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ — формулы ИВ;

- МНОЖЕСТВО ФОРМУЛ ИВ определяется индуктивно:

  1) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

  2) если φ, ψ — формулы ИВ, то $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \longrightarrow \psi)$ — формулы ИВ;

  3) выражение является формулой ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов “1” и “2”.

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

  1) если φ – пропозициональная переменная, то φ – единственная подформула φ;

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

  1) если φ – пропозициональная переменная, то φ – единственная подформула φ;

  2) если $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ($\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \to \varphi_2$), то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1, либо подформула φ_2;

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

  1) если φ – пропозициональная переменная, то φ – единственная подформула φ;

  2) если $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ($\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \to \varphi_2$), то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1, либо подформула φ_2;

  3) если $\varphi \leftrightharpoons \neg\varphi_1$, то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1;

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

  1) если φ – пропозициональная переменная, то φ – единственная подформула φ;

  2) если $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ($\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \to \varphi_2$), то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1, либо подформула φ_2;

  3) если $\varphi \leftrightharpoons \neg\varphi_1$, то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1;

  4) формула является подформулой формулы φ ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов “1”, “2” и “3”.

- МНОЖЕСТВО ПОДФОРМУЛ ФОРМУЛЫ φ ИВ определяется индуктивно:

  1) если φ – пропозициональная переменная, то φ – единственная подформула φ;

  2) если $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ($\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \to \varphi_2$), то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1, либо подформула φ_2;

  3) если $\varphi \leftrightharpoons \neg\varphi_1$, то подформула φ – это либо φ, либо подформула φ_1;

  4) формула является подформулой формулы φ ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов “1”, “2” и “3”.

- ДЛИНА ФОРМУЛЫ φ – число символов, входящих в φ.

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$;

2) $(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \chi)) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow \varphi$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

  1) $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$;

  2) $(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \chi)) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \chi))$;

  3) $(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow \varphi$;

  4) $(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow \psi$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

  2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

  3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

  4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

  5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

7) $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

7) $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

7) $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

- АКСИОМЫ ИВ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

7) $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИВ.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИВ.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИВ.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.
- ПРАВИЛО ВЫВОДА В ИВ – правило заключения (MODUS PONENS): если φ и $\varphi \to \psi$ — выводимые формулы, то ψ — также выводимая формула:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

ПРИМЕР

ПРИМЕР

$$\frac{x \wedge y,\ x \wedge y \longrightarrow (x \longrightarrow z)}{x \longrightarrow z}.$$

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул φ_1, ..., φ_m – это последовательность формул ψ_1, ..., ψ_k такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИВ;

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИВ;

  2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \le k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) ψ_i – аксиома ИВ;

2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

3) ψ_i получается из некоторых ψ_j, $j < i$, по правилу вывода.

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул φ_1, ..., φ_m – это последовательность формул ψ_1, ..., ψ_k такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИВ;

  2) ψ_i принадлежит списку формул φ_1, ..., φ_m, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

  3) ψ_i получается из некоторых ψ_j, $j < i$, по правилу вывода.

- Формула φ ВЫВОДИМА В ИВ из формул φ_1, ..., φ_m

$$(\text{обозначается } \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi),$$

если существует вывод в ИВ формулы φ из формул φ_1, ..., φ_m.

- ВЫВОД в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИВ;

  2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

  3) ψ_i получается из некоторых $\psi_j,\ j < i$, по правилу вывода.

- Формула φ ВЫВОДИМА В ИВ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$

$$(\text{обозначается } \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi),$$

  если существует вывод в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИВ.

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$$

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \longrightarrow \varphi$ из $\varnothing$:

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \longrightarrow \varphi$ из $\varnothing$:

1) $(\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)) \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow \varphi) \longrightarrow \varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi))$ – схема аксиом 2;

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \longrightarrow \varphi$ из $\varnothing$:

1) $(\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)) \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow \varphi) \longrightarrow \varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi))$ – схема аксиом 2;

2) $\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)$ – схема аксиом 1;

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \longrightarrow \varphi$ из $\varnothing$:

1) $(\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)) \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow \varphi) \longrightarrow \varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi))$ – схема аксиом 2;

2) $\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)$ – схема аксиом 1;

3) $(\varphi \longrightarrow ((\varphi \longrightarrow \varphi) \longrightarrow \varphi)) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \varphi)$ – к 1 и 2 применили правило вывода;

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \to \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \to \varphi$ из $\varnothing$:

1) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi))$ – схема аксиом 2;

2) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

3) $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ – к 1 и 2 применили правило вывода;

4) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

ПРИМЕР

$$\vdash \varphi \to \varphi$$

Вывод формулы $\varphi \to \varphi$ из $\varnothing$:

1) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi))$ – схема аксиом 2;

2) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

3) $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ – к 1 и 2 применили правило вывода;

4) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

5) $\vdash \varphi \to \varphi$ к 3 и 4 применили правило вывода.

- КВАЗИВЫВОД в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула выводима из предыдущих и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- КВАЗИВЫВОД в ИВ формулы φ из формул φ_1, $\ldots$, φ_m – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула выводима из предыдущих и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если существует квазивывод в ИВ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то φ выводима в ИВ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

3) $\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

3) $\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

4) $\neg\varphi \to \varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

3) $\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

4) $\neg\varphi \to \varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$ – к пп. 4 и 2 применили правило вывода;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

3) $\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

4) $\neg\varphi \to \varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$ – к пп. 4 и 2 применили правило вывода;

6) $\neg\varphi \to \neg\varphi$ – по примеру 2 выводимая формула;

ПРИМЕР

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\neg\varphi$ из формулы φ:

1) φ – гипотеза;

2) $(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$ – схема аксиом 9;

3) $\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ – схема аксиом 1;

4) $\neg\varphi \to \varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$ – к пп. 4 и 2 применили правило вывода;

6) $\neg\varphi \to \neg\varphi$ – по примеру 2 выводимая формула;

7) $\neg\neg\varphi$ – к пп. 6 и 4 применили правило вывода.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

3) $\varphi \to \psi$ – формула, выводимая по условию из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

3) $\varphi \to \psi$ – формула, выводимая по условию из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$;

4) ψ – к пп. 2 и 3 применили правило вывода.

ПРИМЕР

$$\varphi \longrightarrow \psi \vdash \neg\psi \longrightarrow \neg\varphi$$

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2)$\neg\psi$ – гипотеза;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2)$\neg\psi$ – гипотеза;

3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ – схема аксиом 9;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2)$\neg\psi$ – гипотеза;

3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ – схема аксиом 9;

4) $(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2)$\neg\psi$ – гипотеза;

3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ – схема аксиом 9;

4) $(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ – схема аксиом 1;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы $\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2) $\neg\psi$ – гипотеза;

3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ – схема аксиом 9;

4) $(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ – схема аксиом 1;

6) $\varphi \to \neg\psi$ – к пп. 2 и 5 применили правило вывода;

ПРИМЕР

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$$

По теореме о дедукции

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \iff \varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi.$$

Квазивывод формулы$\neg\varphi$ из формул $\varphi \to \psi, \neg\psi$:

1) $\varphi \to \psi$ – гипотеза;

2)$\neg\psi$ – гипотеза;

3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ – схема аксиом 9;

4) $(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$ – к пп. 1 и 3 применили правило вывода;

5) $\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ – схема аксиом 1;

6) $\varphi \to \neg\psi$ – к пп. 2 и 5 применили правило вывода;

7)$\neg\varphi$ – к пп. 6 и 5 применили правило вывода.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИВ

- Формулы φ и ψ назовем ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ (обозначим $\varphi \equiv \psi$), если

$$\varphi \vdash \psi \ \text{ и } \ \psi \vdash \varphi.$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИВ

- Формулы φ и ψ назовем ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ (обозначим $\varphi \equiv \psi$), если

$$\varphi \vdash \psi \ \text{ и } \ \psi \vdash \varphi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Для любых формул φ и ψ ИВ

$$\varphi \equiv \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi \to \psi \text{ и } \vdash \varphi \to \psi.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Отношение $\varphi \equiv \psi$ является отношением эквивалентности,

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Отношение $\varphi \equiv \psi$ является отношением эквивалентности,т.е. для любых формул φ, ψ, χ ИВ справедливы следующие утверждения:

а) $\varphi \equiv \varphi$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Отношение $\varphi \equiv \psi$ является отношением эквивалентности,т.е. для любых формул φ, ψ, χ ИВ справедливы следующие утверждения:

a) $\varphi \equiv \varphi$;

b) $\varphi \equiv \psi \Longrightarrow \psi \equiv \varphi$;

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Отношение $\varphi \equiv \psi$ является отношением эквивалентности,т.е. для любых формул φ, ψ, χ ИВ справедливы следующие утверждения:

a) $\varphi \equiv \varphi$;

b) $\varphi \equiv \psi \Longrightarrow \psi \equiv \varphi$;

c) $\varphi \equiv \psi,\ \psi \equiv \chi \Longrightarrow \varphi \equiv \chi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Отношение $\varphi \equiv \psi$ является отношением эквивалентности,т.е. для любых формул φ, ψ, χ ИВ справедливы следующие утверждения:

a) $\varphi \equiv \varphi$;

b) $\varphi \equiv \psi \Longrightarrow \psi \equiv \varphi$;

c) $\varphi \equiv \psi,\ \psi \equiv \chi \Longrightarrow \varphi \equiv \chi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Если $\varphi \equiv \psi$, то
$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \psi.$$

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

4) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

4) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;

5) $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (свойство транзитивности);

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

4) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;

5) $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (свойство транзитивности);

6) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \to (\varphi \to \chi)$ (свойство перестановочности посылок);

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

4) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;

5) $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (свойство транзитивности);

6) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \to (\varphi \to \chi)$ (свойство перестановочности посылок);

7) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \wedge \varphi \to \chi$ (свойство соединения и разъединения посылок);

СВОЙСТВА ВЫВОДИМЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИВ

1) $\vdash \varphi \to \varphi$;

2) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$;

3) $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$;

4) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$;

5) $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (свойство транзитивности);

6) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \to (\varphi \to \chi)$ (свойство перестановочности посылок);

7) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \wedge \varphi \to \chi$ (свойство соединения и разъединения посылок);

8) $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$ (свойство контрапозиции).

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2,$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \quad b)\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2,$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \quad b)\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2,$$

$$\text{c})\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2,$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \quad b)\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2,$$

$$\text{c})\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \psi_1 \to \psi_2, \qquad d)\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1.$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \quad b)\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2,$$

$$\mathrm{c})\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \psi_1 \to \psi_2, \qquad d)\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Если $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$, то

$$a)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \quad b)\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \psi_1 \vee \psi_2,$$

$$\text{c})\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \psi_1 \to \psi_2, \quad d)\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1 \equiv \psi_1$ и $\varphi_2 \equiv \psi_2$.

Докажем $\vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$.

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$:

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \to \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \to \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \to \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \to \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \to \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

5) $\psi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 7;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

5) $\psi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 7;

6) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 2 и 5 применили свойство 5;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \to \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \to \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \to \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \to \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

5) $\psi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 7;

6) $\varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 2 и 5 применили свойство 5;

7) $(\varphi_1 \to \psi_1 \vee \psi_2) \to ((\varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2) \to (\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi_1 \vee \psi_2))$ – схема аксиом 8;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

5) $\psi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 7;

6) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 2 и 5 применили свойство 5;

7) $(\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow ((\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2))$ – схема аксиом 8;

8) $(\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2)$ – к пп. 4 и 7 применили правило вывода;

Квазивывод формулы $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$:

1) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1$, так как $\varphi_1 \equiv \psi_1$;

2) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_2$, так как $\varphi_2 \equiv \psi_2$;

3) $\psi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 6;

4) $\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 1 и 3 применили свойство 5;

5) $\psi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – схема аксиом 7;

6) $\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 2 и 5 применили свойство 5;

7) $(\varphi_1 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow ((\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2))$ – схема аксиом 8;

8) $(\varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2)$ – к пп. 4 и 7 применили правило вывода;

9) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \longrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ – к пп. 6 и 8 применили правило вывода.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

$$a)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2;$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

$$a)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2;\quad b)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2;$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

$$a)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2; \quad b)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2;$$

$$c)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \to \varphi_2;$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

$$a)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2; \quad b)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2;$$

$$c)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \to \varphi_2; \qquad b)\ \varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1.$$

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть φ – формула ИВ, ψ – ее подформула. Пусть φ' получается из φ путем замены некоторого вхождения ψ на формулу ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \varphi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi \rightleftharpoons \varphi$, то теорема тривиальна.Далее индукцией по длине формулы φ.Если φ – пропозициональная переменная, то $\psi \rightleftharpoons \varphi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

$$a)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2; \quad b)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2;$$

$$c)\ \varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \to \varphi_2; \qquad b)\ \varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1.$$

Любое вхождение $\psi \not\rightleftharpoons \varphi$ содержится либо в φ_1, либо φ_2, поэтому эквивалентность $\varphi \equiv \varphi'$ следует из индукционного предположения и утверждения 3.

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$

$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности

$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$
законы коммутативности

$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$
законы ассоциативности

$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\qquad$ $1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\qquad$ $2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ $\qquad$ $3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\qquad$ $4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\quad$ $1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\quad$ $2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ $\quad$ $3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\quad$ $4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

$5)\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ $\quad$ $5')\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

законы де Моргана

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИВ

$1) \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\quad$ $1') \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2) \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\quad$ $2') \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3) (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ $\quad$ $3') (\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

$4) \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\quad$ $4') \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

$5) \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ $\quad$ $5') \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

законы де Моргана

$6) \vdash \varphi \vee \neg\varphi$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ – схема аксиом 10;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ – схема аксиом 10;

5) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi$ – к пп. 3 и 4 применили свойство 5;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ – схема аксиом 10;

5) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi$ – к пп. 3 и 4 применили свойство 5;

6) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi$ – получается аналогично формуле 5;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ – схема аксиом 10;

5) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi$ – к пп. 3 и 4 применили свойство 5;

6) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi$ – получается аналогично формуле 5;

7) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$ – к пп.5 и 1 применили правило вывода;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем закон де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Квазивывод формулы $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ из $\emptyset$:

1) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi) \to ((\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi))$ – схема аксиом 5;

2) $\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ – схема аксиом 6;

3) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ – схема аксиом 10;

5) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi$ – к пп. 3 и 4 применили свойство 5;

6) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi$ – получается аналогично формуле 5;

7) $(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \psi) \to (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$ – к пп.5 и 1 применили правило вывода;

8) $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi$ – к пп. 6 и 7 применили правило вывода;

9) $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ – к п. 7 применили свойство 8;

9) $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ – к п. 7 применили свойство 8;

10) $\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ – схема аксиом 10;

9) $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ – к п. 7 применили свойство 8;

10) $\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ – схема аксиом 10;

11) $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ - к пп. 9 и 10 применили свойство 5.

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – схема аксиом 3;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – схема аксиом 3;

3) $\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 2 применили свойство 8;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – схема аксиом 3;

3) $\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – схема аксиом 4;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ – схема аксиом 3;

3) $\neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ – схема аксиом 4;

5) $\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 4 применили свойство 8;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – схема аксиом 3;

3) $\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – схема аксиом 4;

5) $\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 4 применили свойство 8;

6) $(\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi))$ – к пп. 3 и 1 применили правило вывода;

Квазивывод формулы $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1) $(\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)))$ – схема аксиом 8;

2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – схема аксиом 3;

3) $\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 2 применили свойство 8;

4) $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – схема аксиом 4;

5) $\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к п. 4 применили свойство 8;

6) $(\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi))$ – к пп. 3 и 1 применили правило вывода;

7) $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$ – к 5 и 6 применили правило вывода.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

- Если x – пропозициональная переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

- Если x – пропозициональная переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.
- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

- Если x – пропозициональная переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ называется дизъюнкция литер.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

- Если x – пропозициональная переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.

- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ называется дизъюнкция литер.

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИВ

- Если x – пропозициональная переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение x^δ называется ЛИТЕРОЙ, где $x^\delta = x$, если $\delta = 1$, и $x^\delta = \neg x$, если $\delta = 0$.
- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция литер.
- ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ называется дизъюнкция литер.
- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ).
- Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ).

ТЕОРЕМА 3

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула. Так как

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул φ_1, φ_2, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\to$.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула. Так как

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул φ_1, φ_2, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\to$.

Пользуясь законами де Моргана, законом двойного отрициния и теоремой о замене, для формулы ψ_1 можно получит формулу $\psi_2 \equiv \psi_1$, символы отрицания в которой стоят перед пропозициональными переменными.

ТЕОРЕМА 3

1) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой ДНФ.

2) Любая формула ИВ эквивалентна некоторой КНФ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула. Так как

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул φ_1, φ_2, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\to$.

Пользуясь законами де Моргана, законом двойного отрициния и теоремой о замене, для формулы ψ_1 можно получит формулу $\psi_2 \equiv \psi_1$, символы отрицания в которой стоят перед пропозициональными переменными.

Индукция по длине ψ_2.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – пропозициональная переменная, то ψ_2 – КНФ.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – пропозициональная переменная, то ψ_2 – КНФ.

2) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – КНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$ – КНФ.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – пропозициональная переменная, то ψ_2 – КНФ.

2) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – КНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$ – КНФ.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\chi_1 \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – КНФ, $\chi_1 \rightleftharpoons \bigwedge\limits_{0 \leq i \leq n} \chi_1^i$, $\chi_2 \rightleftharpoons \bigwedge\limits_{0 \leq i \leq m} \chi_2^i$, где χ_1^i, χ_2^j $(0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m)$ – дизъюнкты.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – пропозициональная переменная, то ψ_2 – КНФ.

2) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – КНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$ – КНФ.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\chi_1 \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – КНФ, $\chi_1 \rightleftharpoons \bigwedge\limits_{0 \leq i \leq n} \chi_1^i$, $\chi_2 \rightleftharpoons \bigwedge\limits_{0 \leq i \leq m} \chi_2^i$, где χ_1^i, χ_2^j $(0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m)$ – дизъюнкты.

По законам ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности

$$\chi_1 \vee \chi_2 \equiv \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \bigwedge_{0 \leq j \leq m} (\chi_1^i \vee \chi_2^j) \rightleftharpoons \psi - \text{КНФ}.$$

По теореме о замене $\psi_2 \equiv \psi$.

ПОЛНОТА ИВ

ПОЛНОТА ИВ

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ИВ называется ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (обозначается $\models \varphi$), если значение формулы φ равно единице при любых наборах значений пропозициональных переменных.

ПОЛНОТА ИВ

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ИВ называется ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (обозначается $\models \varphi$), если значение формулы φ равно единице при любых наборах значений пропозициональных переменных.

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ИВ

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\psi_0, \ldots, \psi_n$ ($\psi_n \rightleftharpoons \varphi$), формулы φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\psi_0, \ldots, \psi_n$ ($\psi_n \rightleftharpoons \varphi$), формулы φ.

1) Если $n = 0$, то φ –

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\psi_0, \ldots, \psi_n$ ($\psi_n \rightleftharpoons \varphi$), формулы φ.

1) Если $n = 0$, то φ – аксиома. Непосредственным образом (например, построив таблицы истинности) легко убедиться в том, что все аксиомы ИВ – тождественно истинные формулы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\psi_0, \ldots, \psi_n$ ($\psi_n \rightleftharpoons \varphi$), формулы φ.

1) Если $n = 0$, то φ – аксиома. Непосредственным образом (например, построив таблицы истинности) легко убедиться в том, что все аксиомы ИВ – тождественно истинные формулы.

2) Пусть $n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\vdash \varphi$.

Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\psi_0, \ldots, \psi_n$ ($\psi_n \rightleftharpoons \varphi$), формулы φ.

1) Если $n = 0$, то φ – аксиома. Непосредственным образом (например, построив таблицы истинности) легко убедиться в том, что все аксиомы ИВ – тождественно истинные формулы.

2) Пусть $n > 0$. Из минимальности n имеем, что φ получается из ψ_i и $\psi_j \rightleftharpoons (\psi_i \to \varphi)$ для $i, j < n$ по правилу вывода. В силу индукционного предположения,

$$\models \psi_i, \ \models \psi_i \to \varphi.$$

Ясно, что тогда $\models \varphi$.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИВ

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

ТЕОРЕМА 4

ИВ непротиворечиво.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИВ

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

ТЕОРЕМА 4

ИВ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме о полноте любая формула, не являющаяся тождественно истинной, не доказуема в ИВ. Например, такой формулой является формула $x \wedge \neg x$. Следовательно, ИВ непротиворечиво.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОДСИСТЕМЫ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОДСИСТЕМЫ

- n–МЕСТНЫМ ПРЕДИКАТОМ (ОТНОШЕНИЕМ) НА МНОЖЕСТВЕ A называется любое подмножество множества A^n.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОДСИСТЕМЫ

- n–МЕСТНЫМ ПРЕДИКАТОМ (ОТНОШЕНИЕМ) НА МНОЖЕСТВЕ A называется любое подмножество множества A^n.

- n–МЕСТНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ A называется функция $f : A^n \longrightarrow A$, где A^n – n–я декартова степень множества A.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОДСИСТЕМЫ

- n–МЕСТНЫМ ПРЕДИКАТОМ (ОТНОШЕНИЕМ) НА МНОЖЕСТВЕ A называется любое подмножество множества A^n.
- n–МЕСТНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ A называется функция $f : A^n \longrightarrow A$, где A^n – n–я декартова степень множества A.
- СИГНАТУРА Σ – совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОДСИСТЕМЫ

- n–МЕСТНЫМ ПРЕДИКАТОМ (ОТНОШЕНИЕМ) НА МНОЖЕСТВЕ A называется любое подмножество множества A^n.

- n–МЕСТНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ A называется функция $f : A^n \longrightarrow A$, где A^n – n–я декартова степень множества A.

- СИГНАТУРА Σ – совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности.

- 0–местный функциональный символ называется КОНСТАНТНЫМ символом, или просто КОНСТАНТОЙ.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

$\Sigma = \{\leq\}$,

ПРИМЕР

$$\Sigma = \{\leq\}, \quad \Sigma = \{\leq, +, \cdot, 0\},$$

ПРИМЕР

$$\Sigma = \{\leq\}, \quad \Sigma = \{\leq, +, \cdot, 0\}, \qquad \Sigma = \{+, -, |, 0, 1\}$$

- АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ сигнатуры Σ – это непустое множество A, где каждому n–местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n–местный предикат (соответственно операция) на A.

- АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ сигнатуры Σ – это непустое множество A, где каждому n–местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n–местный предикат (соответственно операция) на A.

- Множество A называется НОСИТЕЛЕМ, или УНИВЕРСУМОМ алгебраической системы $\langle A, \Sigma \rangle$.

- АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ сигнатуры Σ – это непустое множество A, где каждому n–местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n–местный предикат (соответственно операция) на A.

- Множество A называется НОСИТЕЛЕМ, или УНИВЕРСУМОМ алгебраической системы $\langle A, \Sigma \rangle$.

- Предикаты и функции, соответствующие символам из Σ, называются ИНТЕРПРЕТАЦИЯМИ.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ – алгебраическая система с с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+, \cdot$, одноместной операцией $' : n \mapsto n + 1$ и нуль-местной операцией 1.

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ – алгебраическая система с с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+, \cdot$, одноместной операцией $' : n \mapsto n + 1$ и нуль-местной операцией 1.

3) $\langle \mathbf{Z}, +, :, \sqrt{2} \rangle$

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ – алгебраическая система с с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+, \cdot$, одноместной операцией $' : n \mapsto n + 1$ и нульместной операцией 1.

3) $\langle \mathbf{Z}, +, :, \sqrt{2} \rangle$ не является алгебраической системой, поскольку деление не является операцией на множестве $\mathbf{Z}$, а элемент $\sqrt{2}$ не принадлежит $\mathbf{Z}$.

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ – алгебраическая система с с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+, \cdot$, одноместной операцией $' : n \mapsto n+1$ и нульместной операцией 1.

3) $\langle \mathbf{Z}, +, :, \sqrt{2} \rangle$ не является алгебраической системой, поскольку деление не является операцией на множестве $\mathbf{Z}$, а элемент $\sqrt{2}$ не принадлежит $\mathbf{Z}$.

4) $\langle \mathcal{P}(U), \cup, \cap, ^{-}, 0, 1 \rangle$

ПРИМЕР

1) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot \rangle$ – алгебраическая система с двумя двухместными операциями.

2) $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, ', 1, \leq \rangle$ – алгебраическая система с с бинарным отношением $\leq$, двухместными операциями $+, \cdot$, одноместной операцией $' : n \mapsto n + 1$ и нульместной операцией 1.

3) $\langle \mathbf{Z}, +, :, \sqrt{2} \rangle$ не является алгебраической системой, поскольку деление не является операцией на множестве $\mathbf{Z}$, а элемент $\sqrt{2}$ не принадлежит $\mathbf{Z}$.

4) $\langle \mathcal{P}(U), \cup, \cap, \bar{}\ , 0, 1 \rangle$ – алгебраическая система с двухместными операциями $\cup$ и $\cap$, одноместной операцией $\bar{}$, константами $0 = \emptyset$ и $1 = U$, где $\mathcal{P}(U)$ – булеан множества U.

- Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ называется ПОДСИСТЕМОЙ системы $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), если выполняются следующие условия:

- Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ называется ПОДСИСТЕМОЙ системы $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), если выполняются следующие условия:

  a) $A \subseteq B$;

- Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ называется ПОДСИСТЕМОЙ системы $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), если выполняются следующие условия:

  а) $A \subseteq B$;

  б) для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих функций $f_{\mathcal{A}}$ и $f_{\mathcal{B}}$ и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство $f_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т.е. интерпретации символа f действуют одинаково на элементах из A;

- Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ называется ПОДСИСТЕМОЙ системы $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), если выполняются следующие условия:

  а) $A \subseteq B$;

  б) для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих функций $f_{\mathcal{A}}$ и $f_{\mathcal{B}}$ и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство $f_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т.е. интерпретации символа f действуют одинаково на элементах из A;

  в) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих предикатов $P_{\mathcal{A}}$ и $P_{\mathcal{B}}$ справедливо равенство $P_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{B}} \cap A^n$, т.е. предикат $P_{\mathcal{A}}$ содержит в точности те кортежи предиката $P_{\mathcal{B}}$, которые состоят из элементов множества A.

ТЕОРЕМА 5

ТЕОРЕМА 5

Если $\mathcal{B}$ – алгебраическая система, $X \subseteq B$, $X \neq \emptyset$, то существует единственная подсистема $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}$ с носителем $B(X)$ такая, что $X \subseteq B(X)$ и $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, для которой $X \subseteq A$.

ТЕОРЕМА 5

Если $\mathcal{B}$ – алгебраическая система, $X \subseteq B,\ X \neq \emptyset$, то существует единственная подсистема $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}$ с носителем $B(X)$ такая, что $X \subseteq B(X)$ и $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, для которой $X \subseteq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $B(X)$ рассмотрим пересечение носителей A всех подсистем $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащих X. Так как $X \subseteq B(X)$, то $B(X) \neq \emptyset$. Единственность подсистемы $\mathcal{B}(X)$ очевидна.

ТЕОРЕМА 5

Если $\mathcal{B}$ – алгебраическая система, $X \subseteq B,\ X \neq \emptyset$, то существует единственная подсистема $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}$ с носителем $B(X)$ такая, что $X \subseteq B(X)$ и $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, для которой $X \subseteq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $B(X)$ рассмотрим пересечение носителей A всех подсистем $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащих X. Так как $X \subseteq B(X)$, то $B(X) \neq \emptyset$. Единственность подсистемы $\mathcal{B}(X)$ очевидна.

- Подсистема $\mathcal{B}(X)$ из теоремы 1 называется ПОДСИСТЕМОЙ, ПОРОЖДЕННОЙ МНОЖЕСТВОМ X в $\mathcal{B}$.

ПОДСИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВОМ

ПОДСИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВОМ

- Индукцией по построению определим понятие ТЕРМА сигнатуры Σ:

ПОДСИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВОМ

- Индукцией по построению определим понятие ТЕРМА сигнатуры Σ:

  1) переменные и константные символы из Σ суть термы;

ПОДСИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВОМ

- Индукцией по построению определим понятие ТЕРМА сигнатуры Σ:

  1) переменные и константные символы из Σ суть термы;

  2) если $f \in \Sigma$ – n-местный функциональный символ, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – терм;

ПОДСИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВОМ

- Индукцией по построению определим понятие ТЕРМА сигнатуры Σ:

  1) переменные и константные символы из Σ суть термы;

  2) если $f \in \Sigma$ – n-местный функциональный символ, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – терм;

  3) никаких термов, кроме построенных по пп. 1,2, нет.
  Множество всех термов сигнатуры Σ обозначается через $T(\Sigma)$.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x + y,\ z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x + y,\ z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$ – термы Σ

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x+y,\ z\cdot(x+z)+0\cdot y$ – термы Σ

$x + y \leq (0 + \ ) \cdot x$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x+y,\ z\cdot(x+z)+0\cdot y$ – термы Σ

$x+y \leq (0+\ )\cdot x$ не терм Σ

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x + y,\ z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$ – термы Σ

$x + y \leq (0 + \ ) \cdot x$ не терм Σ

2) Пусть $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x + y,\ z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$ – термы Σ

$x + y \leq (0 + \ ) \cdot x$ не терм Σ

2) Пусть $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$

$h(f(x_1, x_2, x_3), g(x_2)),\ g(f(h(x_1, x_2), x_1, g(x_2))$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x+y,\ z\cdot(x+z)+0\cdot y$ – термы Σ

$x+y \leq (0+\ )\cdot x$ не терм Σ

2) Пусть $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$

$h(f(x_1,x_2,x_3),g(x_2)),\ g(f(h(x_1,x_2),x_1,g(x_2))$ – термы Σ

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x+y,\ z\cdot(x+z)+0\cdot y$ – термы Σ

$x+y \leq (0+\ )\cdot x$ не терм Σ

2) Пусть $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$

$h(f(x_1, x_2, x_3), g(x_2)),\ g(f(h(x_1, x_2), x_1, g(x_2))$ – термы Σ

$h(x_1, f(x_1, x_3))$

ПРИМЕР

1) Пусть $\Sigma = \{+, \cdot, \leq, 0\}$

$0,\ x,\ x+y,\ z\cdot(x+z)+0\cdot y$ – термы Σ

$x+y \leq (0+\ )\cdot x$ не терм Σ

2) Пусть $\Sigma = \{f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}\}$

$h(f(x_1,x_2,x_3),g(x_2)),\ g(f(h(x_1,x_2),x_1,g(x_2))$ – термы Σ

$h(x_1, f(x_1,x_3))$ не терм Σ

Пусть $t(x_1, \ldots, x_k)$ – терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся среди $x_1, \ldots, x_k$; $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система.

Пусть $t(x_1, \ldots, x_k)$ – терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся среди $x_1, \ldots, x_k$; $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система.

- ЗНАЧЕНИЕ ТЕРМА t при значениях $a_1, \ldots, a_k \in A$ переменных $x_1, \ldots, x_k$ ($t(a_1, \ldots, a_k)$) определяется по индукции:

Пусть $t(x_1, \ldots, x_k)$ – терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся среди $x_1, \ldots, x_k$; $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система.

- ЗНАЧЕНИЕ ТЕРМА t при значениях $a_1, \ldots, a_k \in A$ переменных $x_1, \ldots, x_k$ ($t(a_1, \ldots, a_k)$) определяется по индукции:

  1) если t есть переменная x_i (константный символ c), то значение t есть a_i (c);

Пусть $t(x_1, \ldots, x_k)$ – терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся среди $x_1, \ldots, x_k$; $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система.

- ЗНАЧЕНИЕ ТЕРМА t при значениях $a_1, \ldots, a_k \in A$ переменных $x_1, \ldots, x_k$ ($t(a_1, \ldots, a_k)$) определяется по индукции:

1) если t есть переменная x_i (константный символ c), то значение t есть a_i (c);

2) если терм t есть $f(t_1, \ldots, t_n)$, а значения $t_1, \ldots, t_n$ суть $b_1, \ldots, b_n$, то значение терма t есть $f(b_1, \ldots, t_n)$.

ТЕОРЕМА 6

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по числу шагов построения терма t получаем, что если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \ldots, a_n \in X$, то $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащей X.

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по числу шагов построения терма t получаем, что если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \ldots, a_n \in X$, то $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащей X. Поэтому достаточно показать, что множество $Y = \{t(a_1, \ldots, a_n) | t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$ замкнуто относительно операций системы $\mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по числу шагов построения терма t получаем, что если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \ldots, a_n \in X$, то $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащей X. Поэтому достаточно показать, что множество $Y = \{t(a_1, \ldots, a_n) | t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$ замкнуто относительно операций системы $\mathcal{B}$. Пусть $f^{(n)} \in T(\Sigma),\ t_1, \ldots, t_m \in T(\Sigma),\ b_i = t(a_1, \ldots, a_n),\ i \in \{1, \ldots, m\}$.

ТЕОРЕМА 6

Если $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma\rangle$ – алгебраическая система, $\emptyset \neq X \subseteq B$, то носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ равен $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по числу шагов построения терма t получаем, что если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \ldots, a_n \in X$, то $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$ для любой подсистемы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, содержащей X. Поэтому достаточно показать, что множество $Y = \{t(a_1, \ldots, a_n) | t \in T(\Sigma),\ a_1, \ldots, a_n \in X\}$ замкнуто относительно операций системы $\mathcal{B}$. Пусть $f^{(n)} \in T(\Sigma),\ t_1, \ldots, t_m \in T(\Sigma),\ b_i = t(a_1, \ldots, a_n),\ i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $f(b_1, \ldots, b_m) \in Y$, поскольку $f(t_1, \ldots, t_m) \in T(\Sigma)$.

Таким образом, носитель подсистемы $\mathcal{B}(X)$ состоит из всех элементов, которые получаются при подстановке элементов из X в термы.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

$B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\}$

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

$B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

$B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n} \mid n \geq 1\}$.

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

$B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n} \mid n \geq 1\}$.

2) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q} \backslash \{0\}, \cdot, : \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

ПРИМЕР

1) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q}, \cdot \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $T(\Sigma) = \{x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,\ x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \ldots\}$.

$B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n} \mid n \geq 1\}$.

2) Пусть $\mathcal{B} = \langle \mathbf{Q} \backslash \{0\}, \cdot, : \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

Тогда $B(X) = \{2^n \mid n \geq \mathbf{Z}\}$.

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, $\ldots$, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, $\ldots$, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

  3) никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, …, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

  3) никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

- ФОРМУЛА СИГНАТУРЫ Σ определяется следующим образом:

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, $\ldots$, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

  3) никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

- ФОРМУЛА СИГНАТУРЫ Σ определяется следующим образом:

  1) атомарная формула есть формула;

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, …, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

  3) никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

- ФОРМУЛА СИГНАТУРЫ Σ определяется следующим образом:

  1) атомарная формула есть формула;

  2) если φ, ψ – формулы, то $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ – формулы;

ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ

- Определение АТОМАРНОЙ ФОРМУЛЫ СИГНАТУРЫ Σ:

  1) если t_1, $t_2 \in T(\Sigma)$, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула;

  2) если $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, t_1, t_2, $\ldots$, $t_n \in T(\Sigma)$, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – атомарная формула;

  3) никаких атомарных формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

- ФОРМУЛА СИГНАТУРЫ Σ определяется следующим образом:

  1) атомарная формула есть формула;

  2) если φ, ψ – формулы, то $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ – формулы;

  3) никаких формул, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- ПОДФОРМУЛА формулы φ сигнатуры Σ определяется следующим образом:

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- ПОДФОРМУЛА формулы φ сигнатуры Σ определяется следующим образом:

  1) если φ – атомарная формула, то φ – ее единственная подформула;

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- ПОДФОРМУЛА формулы φ сигнатуры Σ определяется следующим образом:

  1) если φ – атомарная формула, то φ – ее единственная подформула;

  2) если φ имеет вид $\neg\varphi_1$, или $\forall x\,\varphi_1$, или $\exists x\,\varphi_1$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1;

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- ПОДФОРМУЛА формулы φ сигнатуры Σ определяется следующим образом:

  1) если φ – атомарная формула, то φ – ее единственная подформула;

  2) если φ имеет вид $\neg\varphi_1$, или $\forall x\,\varphi_1$, или $\exists x\,\varphi_1$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1;

  3) если φ имеет вид $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, или $\varphi_1 \vee \varphi_2$, или $\varphi_1 \to \varphi_2$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1, либо подформула формулы φ_2;

- Символы $\forall$, $\exists$ называются соответственно КВАНТОРОМ ВСЕОБЩНОСТИ и КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

- ПОДФОРМУЛА формулы φ сигнатуры Σ определяется следующим образом:

  1) если φ – атомарная формула, то φ – ее единственная подформула;

  2) если φ имеет вид $\neg\varphi_1$, или $\forall x\,\varphi_1$, или $\exists x\,\varphi_1$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1;

  3) если φ имеет вид $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, или $\varphi_1 \vee \varphi_2$, или $\varphi_1 \to \varphi_2$, то подформула формулы φ – это либо φ, либо подформула формулы φ_1, либо подформула формулы φ_2;

  4) никаких подформул формулы φ, кроме построенных по пп. 1, 2, 3, нет.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

$\forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$,

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

$\forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$,

$\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z)$,

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

$\forall x\,(\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z))$,

$\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z)$,

$\exists y\,(x = F(z,y))$,

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

$\forall x\,(\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z))$,

$\exists y\,(x = F(z, y)) \vee P(z)$,

$\exists y\,(x = F(z, y))$,

$x = F(z, y))$,

ПРИМЕР

Пусть $\Sigma = \{F^{(2)}, P^{(1)}\}$,

$\varphi = \forall x\,(\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z))$ – формула сигнатуры Σ.

Все подформулы формулы φ:

$\forall x\,(\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z))$,

$\exists y\,(x = F(z,y)) \vee P(z)$,

$\exists y\,(x = F(z,y))$,

$x = F(z,y))$,

$P(z)$.

- Вхождение переменной x в формулу φ СВЯЗАНО в φ, если оно находится в терме или предикате подформулы формулы φ вида $\forall x\,\psi$ или $\exists x\,\psi$;

- Вхождение переменной x в формулу φ СВЯЗАНО в φ, если оно находится в терме или предикате подформулы формулы φ вида $\forall x\, \psi$ или $\exists x\, \psi$; в противном случае это вхождение называется СВОБОДНЫМ в φ.

- Вхождение переменной x в формулу φ СВЯЗАНО в φ, если оно находится в терме или предикате подформулы формулы φ вида $\forall x\,\psi$ или $\exists x\,\psi$; в противном случае это вхождение называется СВОБОДНЫМ в φ.

- Переменная x называется СВОБОДНОЙ (СВЯЗАННОЙ), если некоторое вхождение x в φ свободно (связано).

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$.

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x,y) \to \forall x\, P_1(x)$;

3) $\forall x\, (P_2(x,y) \to P_1(x))$.

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x, y) \longrightarrow \forall x\, P_1(x)$;

3) $\forall x\, (P_2(x, y) \longrightarrow P_1(x))$.

- Переменная x в первой формуле является свободной,

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x, y) \longrightarrow \forall x\, P_1(x)$;

3) $\forall x\, (P_2(x, y) \longrightarrow P_1(x))$.

- Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной,

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x, y) \to \forall x\, P_1(x)$;

3) $\forall x\, (P_2(x, y) \to P_1(x))$.

- Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной, в третьей – связанной;

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x, y) \to \forall x \, P_1(x)$;

3) $\forall x \, (P_2(x, y) \to P_1(x))$.

- Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной, в третьей – связанной; переменная y во всех формулах свободна.

ПРИМЕР

Пусть $S = \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}\}$. Рассмотрим формулы:

1) $P_1(x)$;

2) $P_2(x, y) \to \forall x\, P_1(x)$;

3) $\forall x\, (P_2(x, y) \to P_1(x))$.

- Переменная x в первой формуле является свободной, во второй – и свободной, и связанной, в третьей – связанной; переменная y во всех формулах свободна.

- Запись $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ будет означать, что все свободные переменные формулы φ содержатся в множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в системе $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ совпадают;

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в системе $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ совпадают;

  2) $\mathcal{A} \models P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n))$, где $P^{(k)} \in \Sigma$, $t_1, \ldots, t_k \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в системе $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ совпадают;

  2) $\mathcal{A} \models P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n))$, где $P^{(k)} \in \Sigma$, $t_1, \ldots, t_k \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow \langle t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n) \rangle \in P$;

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots,$ $a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в системе $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ совпадают;

  2) $\mathcal{A} \models P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n))$, где $P^{(k)} \in \Sigma$, t_1, $\ldots$, $t_k \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow \langle t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n) \rangle \in P$;

  3) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \wedge \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

ИСТИННОСТЬ ФОРМУЛЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

- Дадим индуктивное определение ИСТИННОСТИ ФОРМУЛЫ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ (запись $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ будет означать, что формула φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ в системе $\mathcal{A}$).

  1) $\mathcal{A} \models t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, где $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow$ значения термов t_1, t_2 в системе $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ совпадают;

  2) $\mathcal{A} \models P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n))$, где $P^{(k)} \in \Sigma$, $t_1, \ldots, t_k \in T(\Sigma)$, $\Leftrightarrow \langle t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n) \rangle \in P$;

  3) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \wedge \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n) \vee \chi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1,\ldots,a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n) \to \chi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1,\ldots,a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$;

7) $\mathcal{A} \models \forall x\, \psi(x, a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow$

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n) \vee \chi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1,\ldots,a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n) \to \chi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1,\ldots,a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$;

7) $\mathcal{A} \models \forall x\, \psi(x,a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a,a_1,\ldots,a_n)$ для любого $a \in A$;

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$;

7) $\mathcal{A} \models \forall x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in A$;

8) $\mathcal{A} \models \exists x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$;

7) $\mathcal{A} \models \forall x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in A$;

8) $\mathcal{A} \models \exists x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для некоторого $a \in A$.

4) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \vee \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

5) $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \chi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathcal{A} \models \chi(a_1, \ldots, a_n)$;

6) $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$;

7) $\mathcal{A} \models \forall x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in A$;

8) $\mathcal{A} \models \exists x\, \psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для некоторого $a \in A$.

- Если не выполняется $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, то будем говорить, что формула $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ЛОЖНА в системе $\mathcal{A}$, и писать $\mathcal{A} \not\models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

1. Записать формулу $\varphi(x)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда x четно.

ПРИМЕР

1. Записать формулу $\varphi(x)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда x четно.

$$\varphi(x) \rightleftharpoons \exists y\,(x = y + y)$$

2. Записать формулу $\varphi'(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда z – наименьшее общее кратное чисел x и y.

2. Записать формулу $\varphi'(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда z – наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\varphi'(x, y, z) \rightleftharpoons \psi(x, y, z) \wedge \chi(x, y, z),$$

где формула ψ "говорит"о том, что z делится на x и на y, а формула χ "говорит"о том, что z делит все общие кратные x и y,

2. Записать формулу $\varphi'(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда z – наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\varphi'(x, y, z) \rightleftharpoons \psi(x, y, z) \wedge \chi(x, y, z),$$

где формула ψ "говорит"о том, что z делится на x и на y, а формула χ "говорит"о том, что z делит все общие кратные x и y,

$$\psi \rightleftharpoons \exists u, v \, (z = u \cdot x \wedge z = v \cdot y),$$

2. Записать формулу $\varphi'(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда z – наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\varphi'(x, y, z) \rightleftharpoons \psi(x, y, z) \land \chi(x, y, z),$$

где формула ψ "говорит"о том, что z делится на x и на y, а формула χ "говорит"о том, что z делит все общие кратные x и y,

$$\psi \rightleftharpoons \exists u, v\, (z = u \cdot x \land z = v \cdot y),$$

$$\chi \rightleftharpoons \forall w\, (\exists u, v\, (w = u \cdot x \land w = v \cdot y) \to \exists w_1\, (w = w_1 \cdot z)),$$

2. Записать формулу $\varphi'(x, y, z)$, истинную в $\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда z – наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\varphi'(x, y, z) \rightleftharpoons \psi(x, y, z) \wedge \chi(x, y, z),$$

где формула ψ "говорит"о том, что z делится на x и на y, а формула χ "говорит"о том, что z делит все общие кратные x и y,

$$\psi \rightleftharpoons \exists u, v\, (z = u \cdot x \wedge z = v \cdot y),$$

$$\chi \rightleftharpoons \forall w\, (\exists u, v\, (w = u \cdot x \wedge w = v \cdot y) \longrightarrow \exists w_1\, (w = w_1 \cdot z)),$$

$$\varphi'(x, y, z) = \exists u, v\, (z = u \cdot x \wedge z = v \cdot y) \wedge$$

$$\wedge \forall w\, (\exists u, v\, (w = u \cdot x \wedge w = v \cdot y) \longrightarrow \exists w_1\, (w = w_1 \cdot z))$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ СИГНАТУРЫ Σ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ СИГНАТУРЫ Σ

- Формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ называются эквивалентными, если для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\qquad$ $1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности	
$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$,	$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности	

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

$1) \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\qquad$ $1') \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2) \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\qquad$ $2') \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3) (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ $\qquad$ $3') (\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности	
$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$	$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности	
$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
законы ассоциативности	
$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
законы дистрибутивности	

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности	
$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$	$2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности	
$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
законы ассоциативности	
$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
законы дистрибутивности	
$5)\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$5')\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
законы де Моргана	

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы все эквивалентности алгебры высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ 1′)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности

2)$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, 2′)$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности

3)$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ 3′)$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
законы ассоциативности

4)$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ 4′)$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
законы дистрибутивности

5)$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ 5′)$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
законы де Моргана

6) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

a) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

$$\text{а) } \neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi, \qquad \text{б) } \neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi,$$

$$\text{в) } \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi, \qquad \text{г) } \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,
д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,
д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$, е) $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,
д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$, е) $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi$,
ж) $\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 5

В логике предикатов сигнатуры Σ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi$, б) $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$,

в) $\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\, \varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \varphi \wedge \psi$,

д) $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\, \varphi \vee \psi$, е) $\forall x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\, \varphi \vee \psi$,

ж) $\forall x\, \varphi \equiv \forall y\, (\varphi)^x_y$, з) $\exists x\, \varphi \equiv \exists y\, (\varphi)^x_y$.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

- Формула φ сигнатуры Σ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

- Формула φ сигнатуры Σ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

- Бескванторная формула φ сигнатуры Σ является ДИЗЪЮНКТИВНОЙ (КОНЪЮНКТИВНОЙ) НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ, если она получается из некоторой формулы ψ алгебры высказываний, находящейся в ДНФ (КНФ) заменой всех пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на некоторые атомарные формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ сигнатуры Σ соответственно.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

- Формула φ сигнатуры Σ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

- Бескванторная формула φ сигнатуры Σ является ДИЗЪЮНКТИВНОЙ (КОНЪЮНКТИВНОЙ) НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ, если она получается из некоторой формулы ψ алгебры высказываний, находящейся в ДНФ (КНФ) заменой всех пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на некоторые атомарные формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ сигнатуры Σ соответственно.

- Формула φ сигнатуры Σ сигнатуры Σ является ПРЕНЕКСНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ПНФ), если она имеет вид $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi$, где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – ДНФ.

ТЕОРЕМА 7

ТЕОРЕМА 7

Для любой формулы φ ИП$^{\Sigma}$ существует ПНФ ψ ИП$^{\Sigma}$, эквивалентная формуле φ.

ТЕОРЕМА 7

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ПНФ

ТЕОРЕМА 7

Для любой формулы φ ИП$^{\Sigma}$ существует ПНФ ψ ИП$^{\Sigma}$, эквивалентная формуле φ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ПНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \longrightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

ТЕОРЕМА 7

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

АЛГОРИТМ приведения формулы к ПНФ

1. Выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

2. Используя законы де Моргана

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \quad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,$$

и эквивалентности

$$\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi, \quad \neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi,$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\exists x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \, \varphi \wedge \psi,,$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \le i \le n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, \quad \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,,$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \, \varphi \wedge \psi,, & \forall x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \, \varphi \wedge \psi,, \\ \exists x \, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \, \varphi \vee \psi, & \end{array}$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\begin{aligned} &\exists x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \, \varphi \wedge \psi,, \quad &\forall x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \, \varphi \wedge \psi,, \\ &\exists x \, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \, \varphi \vee \psi, \quad &\forall x \, (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \, \varphi \vee \psi,, \end{aligned}$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\ \forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \end{array}$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\ \forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y. \end{array}$$

переносим все отрицания к атомарным формулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \equiv x$.

3. Приводим формулу к виду

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi,$$

где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\ \forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y. \end{array}$$

4. Используя закон дистрибутивности $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \wedge\chi)$, преобразуем формулу ψ к ДНФ.

ПРИМЕР

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\,\forall y\,\varphi(x,y) \to \exists x\,\forall y\,\psi(x,y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\, \forall y\, \varphi(x, y) \longrightarrow \exists x\, \forall y\, \psi(x, y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y) \to \exists x\, \forall y\, \psi(x,y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

χ

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\, \forall y\, \varphi(x, y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, \psi(x, y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$$\chi \;\equiv\; \neg(\exists x\, \forall y \varphi(x,\; y)) \vee \exists x\, \forall y\, \psi(x, y)$$

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\,\forall y\,\varphi(x,y) \to \exists x\,\forall y\,\psi(x,y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$$\chi \;\equiv\; \neg(\exists x\,\forall y \varphi(x,\; y)) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x,y) \;\equiv\; \forall x\,\exists y\,\neg\varphi(x,y) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x,y)$$

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x \, \forall y \, \varphi(x, y) \to \exists x \, \forall y \, \psi(x, y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$\chi \equiv \neg(\exists x \, \forall y \varphi(x, \; y)) \vee \exists x \, \forall y \, \psi(x, y) \equiv \forall x \, \exists y \, \neg\varphi(x, y) \vee \exists x \, \forall y \, \psi(x, y) \equiv$
$\forall x \, \exists y \, (\neg\varphi(x, y) \;\vee\; \exists x \, \forall y \, \psi(x, y))$

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\,\forall y\,\varphi(x,y) \to \exists x\,\forall y\,\psi(x,y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$\chi \equiv \neg(\exists x\,\forall y \varphi(x,\ y)) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x,y) \equiv \forall x\,\exists y\,\neg\varphi(x,y) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x,y) \equiv$
$\forall x\,\exists y\,(\neg\varphi(x,y) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x,y)) \equiv \forall x\,\exists y\,(\neg\varphi(x,y) \vee \exists u\,\forall v\,\psi(u,v))$

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\,\forall y\,\varphi(x, y) \to \exists x\,\forall y\,\psi(x, y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$\chi \equiv \neg(\exists x\,\forall y \varphi(x,\ y)) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x, y) \equiv \forall x\,\exists y\,\neg\varphi(x, y) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x, y) \equiv \forall x\,\exists y\,(\neg\varphi(x, y) \vee \exists x\,\forall y\,\psi(x, y)) \equiv \forall x\,\exists y\,(\neg\varphi(x, y) \vee \exists u\,\forall v\,\psi(u, v)) \equiv \forall x\,\exists y\,\exists u\,\forall v\,(\neg\varphi(x, y) \vee \psi(u, v))$

ПРИМЕР

Привести к ПНФ формулу $\chi \rightleftharpoons \exists x\, \forall y\, \varphi(x, y) \to \exists x\, \forall y\, \psi(x, y)$ сигнатуры Σ, считая формулы φ и ψ атомарными.

РЕШЕНИЕ

$\chi \equiv \neg(\exists x\, \forall y \varphi(x,\ y)) \vee \exists x\, \forall y\, \psi(x, y) \equiv \forall x\, \exists y\, \neg\varphi(x, y) \vee \exists x\, \forall y\, \psi(x, y) \equiv \forall x\, \exists y\, (\neg\varphi(x, y) \vee \exists x\, \forall y\, \psi(x, y)) \equiv \forall x\, \exists y\, (\neg\varphi(x, y) \vee \exists u\, \forall v\, \psi(u, v)) \equiv \forall x\, \exists y\, \exists u\, \forall v\, (\neg\varphi(x, y) \vee \psi(u, v))$– ПНФ (здесь u, v – некоторые новые переменные).

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

Определяется ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ СИГНАТУРЫ Σ (ИП$^{\Sigma}$).

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

Определяется ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ СИГНАТУРЫ Σ (ИП$^{\Sigma}$).

- ФОРМУЛЫ ИП$^{\Sigma}$ – формулы сигнатуры Σ.

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

Определяется ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ СИГНАТУРЫ Σ (ИП$^{\Sigma}$).

- ФОРМУЛЫ ИП$^{\Sigma}$ – формулы сигнатуры Σ.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

СИСТЕМА АКСИОМ И ПРАВИЛ ВЫВОДА

Определяется ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ СИГНАТУРЫ Σ (ИП$^{\Sigma}$).

- ФОРМУЛЫ ИП$^{\Sigma}$ – формулы сигнатуры Σ.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

если $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, $t_1, \ldots, t_n$ – термы сигнатуры Σ, φ – формула сигнатуры Σ, то запись

$$(\varphi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

обозначает результат подстановки термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений в φ переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

- АКСИОМЫ ИП$^\Sigma$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^\Sigma$:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

  2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \land \psi) \to \varphi$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

  2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

  3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

  5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

  2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

  3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

  5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

  6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

  1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

  2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

  3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

  5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

  6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

  8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

  9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

  10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$;

11) $\forall x\, \varphi \to (\varphi)^x_t$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$;

11) $\forall x\, \varphi \to (\varphi)^x_t$; 12)$(\varphi)^x_t \to \exists x\, \varphi$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7)$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$;

11) $\forall x\, \varphi \to (\varphi)^x_t$; 12)$(\varphi)^x_t \to \exists x\, \varphi$;

13) $x = x$;

- АКСИОМЫ ИП$^{\Sigma}$ – следующие формулы для любых формул φ, ψ, χ ИП$^{\Sigma}$:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$; 4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$; 7) $\varphi \to (\psi \vee \varphi)$;

8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$;

9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$;

11) $\forall x\, \varphi \to (\varphi)^x_t$; 12) $(\varphi)^x_t \to \exists x\, \varphi$;

13) $x = x$;

14) $x = y \to ((\varphi)^z_x \to (\varphi)^z_y)$.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^{\Sigma}$.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^{\Sigma}$.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^{\Sigma}$.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.
- ПРАВИЛА ВЫВОДА В ИП$^{\Sigma}$

$$1.\ \frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi},$$

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^{\Sigma}$.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.
- ПРАВИЛА ВЫВОДА В ИП$^{\Sigma}$

$$1.\ \frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}, \qquad 2.\ \frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\, \varphi},$$

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^\Sigma$.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.
- ПРАВИЛА ВЫВОДА В ИП$^\Sigma$

$$1.\ \frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}, \quad 2.\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\, \varphi}, \quad 3.\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\, \varphi \to \psi},$$

- Указанные формулы называются СХЕМАМИ АКСИОМ ИП$^{\Sigma}$.
- При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СХЕМЫ АКСИОМ.
- ПРАВИЛА ВЫВОДА В ИП$^{\Sigma}$

$$1.\ \frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}, \qquad 2.\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\, \varphi}, \qquad 3.\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\, \varphi \to \psi},$$

где в правилах 2 и 3 переменная x не входит свободно в ψ.

- ВЫВОД В ИП$^\Sigma$ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$ – это последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формул ИП$^\Sigma$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

- ВЫВОД В ИП$^\Sigma$ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$ – это последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формул ИП$^\Sigma$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИП$^\Sigma$;

- ВЫВОД В ИП$^{\Sigma}$ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^{\Sigma}$ – это последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формул ИП$^{\Sigma}$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИП$^{\Sigma}$;

  2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

- ВЫВОД В ИП$^\Sigma$ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$ – это последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формул ИП$^\Sigma$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \leq k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИП$^\Sigma$;

  2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

  3) ψ_i получается из некоторых ψ_j, $j < i$, по одному из правил вывода 1-3, причем при применении правил 2 и 3 переменная x не должна входить ни в одну формулу из $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ свободно.

- ВЫВОД В ИП$^{\Sigma}$ формулы φ из формул φ_1, ..., φ_m ИП$^{\Sigma}$ – это последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формул ИП$^{\Sigma}$ такая, что $\varphi \leftrightharpoons \psi_k$ и для каждого $i \le k$ формула ψ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

  1) ψ_i – аксиома ИП$^{\Sigma}$;

  2) ψ_i принадлежит списку формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, называемых ГИПОТЕЗАМИ;

  3) ψ_i получается из некоторых ψ_j, $j < i$, по одному из правил вывода 1-3, причем при применении правил 2 и 3 переменная x не должна входить ни в одну формулу из $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ свободно.

- Формула φ ВЫВОДИМА В ИП$^{\Sigma}$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^{\Sigma}$

$$(\text{обозначается } \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi),$$

  если существует вывод в ИП$^{\Sigma}$ формулы φ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^{\Sigma}$.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^\Sigma$.

- КВАЗИВЫВОД в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула выводима из предыдущих и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^{\Sigma}$.

- КВАЗИВЫВОД в ИП$^{\Sigma}$ формулы φ ИП$^{\Sigma}$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^{\Sigma}$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула выводима из предыдущих и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^\Sigma$.

- КВАЗИВЫВОД в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$ – это последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$, в которой любая формула выводима из предыдущих и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Если существует квазивывод в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ИП$^\Sigma$, то φ выводима в ИП$^\Sigma$ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^\Sigma$.

- КВАЗИВЫВОД в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m ИП$^\Sigma$ – это последовательность формул ψ_1, ..., ψ_k, φ, в которой любая формула выводима из предыдущих и φ_1, ..., φ_m.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Если существует квазивывод в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m ИП$^\Sigma$, то φ выводима в ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m.

- Формула ψ ИП$^\Sigma$ называется ТАВТОЛОГИЕЙ, если она получается из формулы φ исчисления высказываний, доказуемой в исчислении высказываний, путем замены всех ее пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на формулы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ИП$^\Sigma$ соответственно.

- Формула φ, выводимая из $\varnothing$ ($\vdash \varphi$), называется ТЕОРЕМОЙ ИП$^\Sigma$.
- КВАЗИВЫВОД в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m ИП$^\Sigma$ – это последовательность формул ψ_1, ..., ψ_k, φ, в которой любая формула выводима из предыдущих и φ_1, ..., φ_m.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Если существует квазивывод в ИП$^\Sigma$ формулы φ ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m ИП$^\Sigma$, то φ выводима в ИП$^\Sigma$ из формул φ_1, ..., φ_m.

- Формула ψ ИП$^\Sigma$ называется ТАВТОЛОГИЕЙ, если она получается из формулы φ исчисления высказываний, доказуемой в исчислении высказываний, путем замены всех ее пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на формулы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ИП$^\Sigma$ соответственно.
- φ называется ОСНОВОЙ ТАВТОЛОГИИ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6

Любая тавтология φ ИП$^{\Sigma}$ доказуема в ИП$^{\Sigma}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6

Любая тавтология φ ИП$^\Sigma$ доказуема в ИП$^\Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6

Любая тавтология φ ИП$^{\Sigma}$ доказуема в ИП$^{\Sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – основа φ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6

Любая тавтология φ ИП$^{\Sigma}$ доказуема в ИП$^{\Sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – основа φ. Тогда ψ доказуема в исчислении высказываний.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6

Любая тавтология φ ИП$^{\Sigma}$ доказуема в ИП$^{\Sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – основа φ. Тогда ψ доказуема в исчислении высказываний. Ясно, что, заменив пропозициональные переменные в доказательстве в исчислении высказываний формулы ψ на соответствующие формулы ИП$^{\Sigma}$, получим доказательство φ в ИП$^{\Sigma}$.

- Формулы φ и ψ ИП$^\Sigma$ называются ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ, если $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$ – тавтологии.

- Формулы φ и ψ ИП$^{\Sigma}$ называются ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ, если $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$ – тавтологии.

- Формулы φ и ψ ИП$^{\Sigma}$ называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ($\varphi \equiv \psi$), если

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{и} \quad \vdash \psi \to \varphi.$$

- Формулы φ и ψ ИП$^{\Sigma}$ называются ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ, если $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$ – тавтологии.

- Формулы φ и ψ ИП$^{\Sigma}$ называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ($\varphi \equiv \psi$), если

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{и} \quad \vdash \psi \to \varphi.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

- Формулы φ и ψ ИП$^\Sigma$ называются ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ, если $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$ – тавтологии.

- Формулы φ и ψ ИП$^\Sigma$ называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ($\varphi \equiv \psi$), если

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{и} \quad \vdash \psi \to \varphi.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

Если φ и ψ – пропозиционально эквивалентные формулы сигнатуры Σ, то φ и ψ – эквивалентные формулы сигнатуры Σ.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

3) $\varphi \to \psi$ – формула, выводимая по условию из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$;

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi \vdash \psi \iff \varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi \to \psi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – вывод формулы $\varphi \to \psi$, где $\psi_n \leftrightharpoons \varphi \to \psi$.

Квазивывод формулы ψ из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi$:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – гипотезы;

2) φ – гипотеза;

3) $\varphi \to \psi$ – формула, выводимая по условию из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$;

4) ψ – к пп. 2 и 3 применили правило вывода.

СЛЕДСТВИЕ 2

СЛЕДСТВИЕ 2

Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi \equiv \psi$;

б) $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ 1$'$)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	1$'$)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности	
2)$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$,	2$'$)$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности	

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ 1$'$)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

2)$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, 2$'$)$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

3)$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ 3$'$)$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

$1)\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\quad$ $1')\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

$2)\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi,$ $\quad$ $2')\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

$3)(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ $\quad$ $3')(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

$4)\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\quad$ $4')\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^\Sigma$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^\Sigma$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	1$'$)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
законы идемпотентности	
2)$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$,	2$'$)$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
законы коммутативности	
3)$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	3$'$)$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
законы ассоциативности	
4)$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	4$'$)$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
законы дистрибутивности	
5)$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	5$'$)$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
законы де Моргана	

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИП$^{\Sigma}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы все эквивалентности исчисления высказываний:

1)$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ 1$'$)$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

законы идемпотентности

2)$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, 2$'$)$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

законы коммутативности

3)$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ 3$'$)$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

законы ассоциативности

4)$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ 4$'$)$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

законы дистрибутивности

5)$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ 5$'$)$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

законы де Моргана

6) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

$$\text{а) } \neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi,$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,

д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,

в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,

д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$, е) $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^{\Sigma}$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$, б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$, г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,
д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$, е) $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi$,
ж) $\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y$,

УТВЕРЖДЕНИЕ 8

В ИП$^\Sigma$ выполнимы следующие эквивалентности, в которых предполагается, что переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y не входит в формулу φ:

а) $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$,	б) $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$,
в) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi$,	г) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi$,
д) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi$,	е) $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi$,
ж) $\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y$,	з) $\exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \longrightarrow \exists x\; \varphi$ – аксиома 12;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \longrightarrow \exists x\ \varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\ \varphi \longrightarrow \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\, \varphi \to \forall x\, \neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \to \exists x\; \varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\; \varphi \to \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\, \varphi \to \forall x\, \neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \to \exists x\,\varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\,\varphi \to \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

Квазивывод формулы $\forall x\,\neg\varphi \to \neg\exists x\,\varphi$ из $\emptyset$:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \longrightarrow \exists x\;\varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\;\varphi \longrightarrow \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\,\varphi \longrightarrow \forall x\,\neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

Квазивывод формулы $\forall x\;\neg\varphi \longrightarrow \neg\exists x\;\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\;\neg\varphi \longrightarrow \neg\varphi$ – аксиома 11;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \rightarrow \exists x\ \varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\ \varphi \rightarrow \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\,\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

Квазивывод формулы $\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\ \varphi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \rightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \to \exists x\ \varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\ \varphi \to \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

Квазивывод формулы $\forall x\ \neg\varphi \to \neg\exists x\ \varphi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\ \neg\varphi \to \neg\varphi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \to \neg\forall x\ \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\exists x\ \varphi \to \neg\forall x\ \neg\varphi$ – к п. 2 применили правило вывода 3;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность а).

Квазивывод формулы $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ из $\emptyset$:

1. $\varphi \to \exists x\ \varphi$ – аксиома 12;

2. $\neg\exists x\ \varphi \to \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\neg\exists x\,\varphi \to \forall x\,\neg\varphi$ – к п.2 применили правило вывода 2.

Квазивывод формулы $\forall x\ \neg\varphi \to \neg\exists x\ \varphi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\ \neg\varphi \to \neg\varphi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \to \neg\forall x\ \neg\varphi$ – к п.1 применили утверждение 7;

3. $\exists x\ \varphi \to \neg\forall x\ \neg\varphi$ – к п. 2 применили правило вывода 3;

4. $\forall x\ \neg\varphi \to \neg\exists x\ \varphi$ – к п.3 применили утверждение 7.

Докажем эквивалентность г).

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\;\varphi$ – к п.4 применили правило вывода 2;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\;\varphi$ – к п.4 применили правило вывода 2;

5. $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – утверждение 7;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi$ – к п.4 применили правило вывода 2;

5. $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – утверждение 7;

6. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ – к пп.1,5 применили утверждение 7;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi$ – к п.4 применили правило вывода 2;

5. $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – утверждение 7;

6. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ – к пп.1,5 применили утверждение 7;

7. $(\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi) \to ((\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \to \psi) \to (\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi))$ – аксиома 5;

Докажем эквивалентность г).

Квазивывод формулы $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$ – аксиома 11;

2. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – аксиома 3;

3. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi$ – к п.4 применили правило вывода 2;

5. $\varphi \wedge \psi \to \psi$ – утверждение 7;

6. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ – к пп.1,5 применили утверждение 7;

7. $(\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi) \to ((\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \to \psi) \to (\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi))$ – аксиома 5;

8. $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\,\varphi \wedge \psi$ – к пп.4,6,7 применили правило вывода 1.

Квазивывод формулы $\forall x\, \varphi \wedge \psi \to \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

Квазивывод формулы $\forall x\, \varphi \wedge \psi \rightarrow \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\, \varphi \wedge \psi \rightarrow \forall x\ \varphi$ – аксиома 3;

Квазивывод формулы $\forall x\,\varphi \wedge \psi \longrightarrow \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \longrightarrow \forall x\;\varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\,\varphi \longrightarrow \varphi$ – аксиома 11;

Квазивывод формулы $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\;\varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\,\varphi \to \varphi$ – аксиома 11;

3. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

Квазивывод формулы $\forall x\, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \forall x\ \varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\, \varphi \longrightarrow \varphi$ – аксиома 11;

3. $\forall x\, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \psi$ – аксиома 4;

Квазивывод формулы $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\ \varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\,\varphi \to \varphi$ – аксиома 11;

3. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \psi$ – аксиома 4;

5. $(\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi) \to ((\forall x\ \varphi \wedge \psi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi))$ – аксиома 5;

Квазивывод формулы $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\ \varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\,\varphi \to \varphi$ – аксиома 11;

3. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \psi$ – аксиома 4;

5. $(\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi) \to ((\forall x\ \varphi \wedge \psi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi))$ – аксиома 5;

6. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi$ – к пп.3,4,5 применили правило вывода 1;

Квазивывод формулы $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$ из $\emptyset$:

1. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\;\varphi$ – аксиома 3;

2. $\forall x\,\varphi \to \varphi$ – аксиома 11;

3. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi$ – к пп.1,2 применили утверждение 7;

4. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \psi$ – аксиома 4;

5. $(\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi) \to ((\forall x\;\varphi \wedge \psi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi))$ – аксиома 5;

6. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi$ – к пп.3,4,5 применили правило вывода 1;

7. $\forall x\,\varphi \wedge \psi \to \forall x\;(\varphi \wedge \psi)$ – к п.6 применили правило вывода 2.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^{\Sigma}$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^{\Sigma}$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^{\Sigma}$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^{\Sigma}$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^\Sigma$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^\Sigma$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Индукция по сложности ψ.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^{\Sigma}$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^{\Sigma}$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Индукция по сложности ψ.

Если $\varphi' \rightleftharpoons \psi'$, то утверждение тривиально.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^{\Sigma}$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^{\Sigma}$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Индукция по сложности ψ.

Если $\varphi' \rightleftharpoons \psi'$, то утверждение тривиально.

Если $\psi \rightleftharpoons \neg\psi_1$ или $\psi \rightleftharpoons \psi_1\tau\psi_2$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то доказательство индукционного шага не отличается от соответствующих случаев теоремы о замене для исчисления высказываний.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^\Sigma$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^\Sigma$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Индукция по сложности ψ.

Если $\varphi' \rightleftharpoons \psi'$, то утверждение тривиально.

Если $\psi \rightleftharpoons \neg\psi_1$ или $\psi \rightleftharpoons \psi_1 \tau \psi_2$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то доказательство индукционного шага не отличается от соответствующих случаев теоремы о замене для исчисления высказываний.

Пусть $\psi \leftrightharpoons \forall x\ \psi'$ или $\exists x\ \psi'$.

ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ

Пусть ψ – формула ИП$^{\Sigma}$, ψ' – ее подформула. Пусть φ получается из ψ путем замены некоторого вхождения ψ' на формулу φ' ИП$^{\Sigma}$. Тогда если $\varphi' \equiv \psi'$, то $\varphi \equiv \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Индукция по сложности ψ.

Если $\varphi' \rightleftharpoons \psi'$, то утверждение тривиально.

Если $\psi \rightleftharpoons \neg\psi_1$ или $\psi \rightleftharpoons \psi_1 \tau \psi_2$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то доказательство индукционного шага не отличается от соответствующих случаев теоремы о замене для исчисления высказываний.

Пусть $\psi \leftrightharpoons \forall x\ \psi'$ или $\exists x\ \psi'$.

По условию $\vdash \varphi' \rightarrow \psi'$ и $\vdash \psi' \rightarrow \varphi'$.

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \ \forall x \ \varphi' \rightarrow \forall x \ \psi'$ и $\vdash \exists x \ \varphi' \rightarrow \exists x \ \psi'$.

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ и $\vdash \exists x \ \varphi' \to \exists x \ \psi'$.

Квазивывод формулы $\forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ из $\emptyset$:

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ и $\vdash \exists x \ \varphi' \to \exists x \ \psi'$.

Квазивывод формулы $\forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ из $\emptyset$:

1. $\varphi' \to \psi'$ – доказуемая формула;

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ и $\vdash \exists x \ \varphi' \to \exists x \ \psi'$.

Квазивывод формулы $\forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ из $\emptyset$:

1. $\varphi' \to \psi'$ – доказуемая формула;

2. $\forall x \ \varphi' \to \varphi'$ – аксиома 11;

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ и $\vdash \exists x \ \varphi' \to \exists x \ \psi'$.

Квазивывод формулы $\forall x \ \varphi' \to \forall x \ \psi'$ из $\emptyset$:

1. $\varphi' \to \psi'$ – доказуемая формула;

2. $\forall x \ \varphi' \to \varphi'$ – аксиома 11;

3. $\forall x \ \varphi' \to \psi'$ – к пп.1,2 применили утверждение 1;

В силу симметричности φ' и ψ' достаточно доказать $\vdash \forall x\ \varphi' \longrightarrow \forall x\ \psi'$ и $\vdash \exists x\ \varphi' \longrightarrow \exists x\ \psi'$.

Квазивывод формулы $\forall x\ \varphi' \longrightarrow \forall x\ \psi'$ из $\emptyset$:

1. $\varphi' \longrightarrow \psi'$ – доказуемая формула;

2. $\forall x\ \varphi' \longrightarrow \varphi'$ – аксиома 11;

3. $\forall x\ \varphi' \longrightarrow \psi'$ – к пп.1,2 применили утверждение 1;

4. $\forall x\ \varphi' \longrightarrow \forall x\ \psi'$ – к п.3 применили правило вывода 2.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИП$^{\Sigma}$

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИП$^{\Sigma}$

- Формула φ ИП$^{\Sigma}$ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИП$^{\Sigma}$

- Формула φ ИП$^{\Sigma}$ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

- Бескванторная формула φ ИП$^{\Sigma}$ является ДИЗЪЮНКТИВНОЙ (КОНЪЮНКТИВ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ, если она получается из некоторой формулы ψ исчисления ИВ, находящейся в ДНФ (КНФ) заменой всех пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на некоторые атомарные формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ИП$^{\Sigma}$ соответственно.

ПРЕНЕКСНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИП$^\Sigma$

- Формула φ ИП$^\Sigma$ называется БЕСКВАНТОРНОЙ, если она не содержит кванторов.

- Бескванторная формула φ ИП$^\Sigma$ является ДИЗЪЮНКТИВНОЙ (КОНЪЮНКТИВ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ, если она получается из некоторой формулы ψ исчисления ИВ, находящейся в ДНФ (КНФ) заменой всех пропозициональных переменных $x_1, \ldots, x_n$ на некоторые атомарные формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ИП$^\Sigma$ соответственно.

- Формула φ ИП$^\Sigma$ является ПРЕНЕКСНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ПНФ), если она имеет вид $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \psi$, где Q_i, $1 \leq i \leq n$, – кванторы, а ψ – ДНФ.

TEOPEMA 8

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^{\Sigma}$ существует ПНФ ψ ИП$^{\Sigma}$, эквивалентная формуле φ.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^{\Sigma}$ существует ПНФ ψ ИП$^{\Sigma}$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула ИП$^\Sigma$.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула ИП$^\Sigma$. Так как

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул $\varphi_1,\ \varphi_2$ ИП$^\Sigma$, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\rightarrow$.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^\Sigma$ существует ПНФ ψ ИП$^\Sigma$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула ИП$^\Sigma$. Так как

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул $\varphi_1,\ \varphi_2$ ИП$^\Sigma$, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\to$.

Пользуясь законами де Моргана, законом двойного отрицания, эквивалентностями

$$\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi, \qquad \neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$$

и теоремой о замене, для формулы ψ_1 можно получит формулу $\psi_2 \equiv \psi_1$, символы отрицания в которой стоят перед атомарными подформулами.

ТЕОРЕМА 8

Для любой формулы φ ИП$^{\Sigma}$ существует ПНФ ψ ИП$^{\Sigma}$, эквивалентная формуле φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 2. Пусть φ – формула ИП$^{\Sigma}$. Так как

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

для любых формул φ_1, φ_2 ИП$^{\Sigma}$, то для формулы φ, применяя несколько раз теорему о замене, можно получить формулу $\psi_1 \equiv \varphi$, не содержащую знака $\to$.

Пользуясь законами де Моргана, законом двойного отрицания, эквивалентностями

$$\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi, \qquad \neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$$

и теоремой о замене, для формулы ψ_1 можно получит формулу $\psi_2 \equiv \psi_1$, символы отрицания в которой стоят перед атомарными подформулами.

Индукция по длине ψ_2.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \ x \ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \ x \ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\exists x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \, \varphi \wedge \psi,,$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \; x \; \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\exists x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \, \varphi \wedge \psi,, \quad \forall x \, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \, \varphi \wedge \psi,,$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \ x \ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, \quad \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,,$$
$$\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi,$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \; x \; \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \end{array}$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q\ x\ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll}
\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\
\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\
\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, &
\end{array}$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q\ x\ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll}
\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\
\exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\
\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y.
\end{array}$$

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q \ x \ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\ \forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y. \end{array}$$

и теоремой о замене получаем ПНФ, эквивалентную ψ_2.

Индукция по длине ψ_2.

1) Если ψ_2 – атомарная формула, то ψ_2 – ПНФ.

2) Если $\psi_1 \rightleftharpoons Q\ x\ \psi'$, где Q - квантор, то нужная ψ_2 существует по предположению индукции и теореме о замене.

3) Пусть $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\chi_1, \equiv \varphi_1$, $\chi_2 \equiv \varphi_2$, φ_1 и φ_2 – ПНФ. По теореме о замене $\psi_2 \equiv \chi_1 \wedge \chi_2$. Пользуясь эквивалентностями

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\,\varphi \wedge \psi,, & \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\,\varphi \wedge \psi,, \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\,\varphi \vee \psi, & \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi,, \\ \forall x\,\varphi \equiv \forall y\,(\varphi)^x_y,, & \exists x\,\varphi \equiv \exists y\,(\varphi)^x_y. \end{array}$$

и теоремой о замене получаем ПНФ, эквивалентную ψ_2.

4) Если $\psi_2 \rightleftharpoons \varphi_1 \vee \varphi_2$, то повторяем рассуждения п.3.

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ИП$^{\Sigma}$ называется тождественно истинной, если для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

- Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ИП$^{\Sigma}$ называется тождественно истинной, если для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

- Формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ИП$^{\Sigma}$ называется тождественно истинной, если для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, для любых $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n).$$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^{\Sigma}$

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^\Sigma$

- Формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ИП$^\Sigma$ называется тождественно истинной, если для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, для любых $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n).$$

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О ПОЛНОТЕ ИП$^\Sigma$

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^{\Sigma}$ являются тождественно истинными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^{\Sigma}$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^\Sigma$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность. Пусть $\psi(x_1,\ldots,x_n) \to \varphi(x,x_1,\ldots,x_n)$ – тождественно истинная формула ИП$^\Sigma$, $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^\Sigma$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ – тождественно истинная формула ИП$^\Sigma$, $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^{\Sigma}$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ – тождественно истинная формула ИП$^{\Sigma}$, $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in \mathcal{A}$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^\Sigma$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность. Пусть $\psi(x_1,\ldots,x_n) \to \varphi(x,x_1,\ldots,x_n)$ – тождественно истинная формула ИП$^\Sigma$, $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$. Так как $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n) \to \varphi(a,a_1,\ldots,a_n)$ для любого $a \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} \models \varphi(a,a_1,\ldots,a_n)$ для любого $a \in \mathcal{A}$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ.

Индукция по длине вывода формулы φ.

Аксиомы ИП$^\Sigma$ являются тождественно истинными.

Покажем, что правило вывода 2 сохраняют тождественную истинность. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ – тождественно истинная формула ИП$^\Sigma$, $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \to \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ для любого $a \in \mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИП$^{\Sigma}$

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИП$^{\Sigma}$

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

ТЕОРЕМА 9

Исчисление предикатов сигнатуры Σ непротиворечиво.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИП$^{\Sigma}$

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

ТЕОРЕМА 9

Исчисление предикатов сигнатуры Σ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИП$^{\Sigma}$

- Исчисление называется НЕПРОТИВОРЕЧИВЫМ, если не все его формулы доказуемы.

ТЕОРЕМА 9

Исчисление предикатов сигнатуры Σ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме Геделя о полноте любая формула, не являющаяся тождественно истинной, не доказуема в ИП$^{\Sigma}$. Например, такой формулой является формула $\forall x \neg (x = x)$. Следовательно, ИП$^{\Sigma}$ непротиворечиво.