Учебное издание

Пивоварова Ирина Викторовна

ТЕОРИЯ ИГР

Практикум

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 06.07.2005. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.-изд. л. 1,86. Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57

Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

И.В. ПИВОВАРОВА

ТЕОРИЯ ИГР

Практикум

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2005

ББК 22.183.2
П 32

Рецензент: Н.Ю. Голодная, доцент каф. ММ

Пивоварова И.В.
П 32 ТЕОРИЯ ИГР: Практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2005. – 32 с.

Практикум содержит основные понятия теории матричных игр, примеры их решения, задачи для самостоятельного решения.

Предназначен студентам специальности 0618 «Математические методы в экономике».

ББК 22.183.2

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., 1998.

2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.

3. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр.– М.: Наука, 1981.

ВВЕДЕНИЕ

Практикум по теории игр предназначен студентам 5 курса специальности «Математические методы в экономике».

В пособие включены основные определения и теоремы курса «Теория игр», разобраны методы решения матричных (2×2), $(m\times 2)$, $(2\times n)$, $(m\times n)$ – игр, приведены решения типовых задач, даны задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены вопросы для самопроверки, которые могут быть использованы при подготовке к экзамену.

Цель пособия – активизировать самостоятельную работу студентов.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Теория игр – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

Содержание теории игр: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта), доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.

Все такие модели в теории игр принято называть **играми**.

Игры можно классифицировать по различным признакам: стратегические и чисто случайные, бескоалиционные и коалиционные, игры 1, 2, …, n лиц (по числу игроков), конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме и динамические, с нулевой суммой («антагонистические») и с ненулевой суммой.

Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц). Такую игру (Γ) называют матричной. Она определяется тройкой $\Gamma=(X,Y,K)$, где X – множество стратегий 1-го игрока, Y – множество стратегий 2-го игрока, $K=K(x,y)$ – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию $x \in X$, а 2-й – стратегию $y \in Y$). Пару (x,y) называют ситуацией в игре Γ.

Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий: $X=M=\{1,2,\ …,\ m\}$, $Y=N=\{1,2,\ …,\ n\}$. Тогда игра Γ полностью определяется заданием матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$, где $a_{ij}=K(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) i, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) j (эти стратегии называют **чистыми**).

Матрица A называется матрицей игры или платежной матрицей.

Пусть матрица игры $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Цель каждого игрока – получить как можно больший выигрыш. Но 1-му игроку нет смысла выбирать стратегию i=1 в надежде выиграть 5 ед., так как 2-й игрок, действуя разумно, не станет выбирать стратегию j=2, чтобы не проиграть максимальную сумму 5 ед. Игрокам удобнее выбрать «осторожные» стратегии.

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – платежная матрица игры Γ. Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min\limits_{j} a_{ij}$. Поэтому он

10. $\left\langle \left(\frac{109}{526},\frac{130}{526},\frac{11}{526},\frac{276}{526}\right),\left(\frac{132}{526},\frac{235}{526},\frac{68}{526},\frac{91}{526}\right),\frac{2101}{526}\right\rangle$.

11. $\left\langle \left(\frac{28}{142},\frac{33}{142},\frac{31}{142},\frac{21}{142},\frac{29}{142}\right),\left(\frac{4}{142},\frac{35}{142},\frac{6}{142},\frac{57}{142},\frac{40}{142}\right),\frac{149}{142}\right\rangle$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение матричной игры.
2. Что представляют собой элементы платежной матрицы?
3. Как определяются верхняя и нижняя цены игры (соответственно, минимаксная и максиминная стратегии игроков), как они связаны между собой?
4. Как найти седловую точку в платежной матрице? Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования седловой точки.
5. Сформулируйте лемму о масштабе. Где она применяется?
6. Как определяются смешанные стратегии игроков?
7. Как определяются цена игры, оптимальные стратегии игроков (чистые и смешанные), решение игры?
8. Сформулируйте свойства оптимальных стратегий.
9. Сформулируйте основную теорему теории матричных игр.
10. Как можно решить (2×2)-игру?
11. В чем заключается графоаналитический метод решения, для каких матричных игр он применяется?
12. Дайте определения доминируемых стратегий для 1-го и 2-го игроков. Сформулируйте теорему о доминируемых стратегиях.
13. Сколько решений может иметь матричная игра? Как найти множество всех решений?
14. Как свести матричную игру к двойственной задаче линейного программирования?
15. Приведите примеры применения матричных игр в экономике.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ответы. 1. $\left\langle \left(\frac{11}{35}, \frac{9}{35}, \frac{15}{35}\right), \left(\frac{8}{35}, \frac{14}{35}, \frac{13}{35}\right), \frac{108}{35} \right\rangle$.

2. $\left\langle \left(\frac{15}{74}, \frac{19}{74}, \frac{40}{74}\right), \left(\frac{24}{74}, \frac{35}{74}, \frac{15}{74}\right), \frac{297}{74} \right\rangle$.

3. $\left\langle \left(\frac{18}{45}, \frac{5}{45}, \frac{22}{45}\right), \left(\frac{25}{45}, \frac{9}{45}, \frac{11}{45}\right), \frac{142}{45} \right\rangle$.

4. $\left\langle \left(\frac{21}{56}, \frac{19}{56}, \frac{16}{56}\right), \left(\frac{16}{56}, \frac{31}{56}, \frac{9}{56}\right), \frac{67}{56} \right\rangle$.

5. $\left\langle \left(\frac{1}{18}, \frac{8}{18}, \frac{9}{18}\right), \left(\frac{9}{18}, \frac{8}{18}, \frac{1}{18}, 0\right), \frac{59}{18} \right\rangle$.

6. $\left\langle \left(\frac{7}{13}, \frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right), \left(0, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{6}{13}\right), \frac{15}{13} \right\rangle$.

7. $\left\langle \left(\frac{10}{42}, \frac{9}{42}, \frac{23}{42}\right), \left(0, \frac{5}{14}, \frac{8}{14}, \frac{1}{14}\right), \frac{55}{14} \right\rangle$.

8. $\left\langle \left(0, 0, \frac{13}{15}, \frac{2}{15}\right), \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \frac{17}{5} \right\rangle$.

9. $\left\langle \left(\frac{76}{335}, \frac{92}{335}, \frac{78}{335}, \frac{89}{335}\right), \left(\frac{61}{335}, \frac{72}{335}, \frac{161}{335}, \frac{41}{335}\right), \frac{688}{335} \right\rangle$.

всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или максимин, соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max\limits_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, обозначим его $\overline{v}$ – верхняя цена игры, или минимакс, соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \dots \\ \min\limits_j a_{mj} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \ \dots \ \max_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \overline{v}}$$

Например, $$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{v} = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 6 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \overline{v} = 4$$

Соответствующие стратегии: i_0=1 (максиминная), j_0=1,2 (минимаксная).

Справедливо неравенство: $\underline{v} \le \overline{v}$.

В игре Γ естественно считать **оптимальной** такую ситуацию (i,j), от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться.

Ситуация (i^*,j^*) называется ситуацией равновесия, или седловой точкой, если для любых $i \in M$, $j \in N$ выполняется неравенство $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$. Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число $v = a_{i^*j^*}$ называется ценой игры. Элемент $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} = \overline{v}$ (это значение и является ценой игры v).

Например, $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \Rightarrow \overline{v}=\underline{v}=4.$

$\quad\;\; 5 \quad\; 5 \quad 4 \quad 20$

(2,3)-ситуация равновесия, v=4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Наряду с чистыми стратегиями игроков рассматривают также **смешанные** стратегии.

Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии i=1, 2, …, m.

Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Множества всех смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков будем обозначать соответственно S_m и S_n.

Чистые стратегии можно рассматривать как частный случай смешанных стратегий. Например, чистую стратегию j=2 можно рассматривать как смешанную y=(0,1,0,…,0), чистую стратегию i=1 – как смешанную x=(1,0,…,0).

Пару смешанных стратегий (x,y) называют **ситуацией** в смешанных стратегиях.

Функция выигрыша $K(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$: $K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$.

Если для некоторых $x^* \in S_m$ и $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ выполняется неравенство $K(x,y^*) \leq K(x^*,y^*) \leq K(x^*,y)$, то x^*, y^* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков, число $v=K(x^*,y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x^*, y^*) – **стратегической седловой точкой**, а тройка x^*, y^*, v – **решением игры**.

№ партии k	Выбор 1-го игрока	Выбор 2-го игрока	Суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			Суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{\overline{v}_k}{k}$	$\frac{\underline{v}_k}{k}$
			a	b	c	α	β	γ		
1	a	α	2	3	1	2	1	3	3	1
2	b	β	3	3	3	5	1	4	$\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{1}{2}=0{,}5$
3	b	β	4	3	5	8	1	5	$\frac{5}{3}\approx 1{,}667$	$\frac{1}{3}\approx 0{,}333$
4	c	β	5	3	7	9	3	6	$\frac{7}{4}=1{,}75$	$\frac{3}{4}=0{,}75$
5	c	β	6	3	9	10	5	7	$\frac{9}{5}=1{,}8$	$\frac{5}{5}=1$
6	c	β	7	3	11	11	7	8	1,833	1,167
7	c	β	8	3	13	12	9	9	1,857	1,286
8	c	γ	11	4	14	13	11	10	1,75	1,25
9	c	γ	14	5	15	14	13	11	1,667	1,222
10	c	γ	17	6	16	15	15	12	1,7	1,2
11	a	γ	20	7	17	17	16	15	1,818	1,364
12	a	γ	23	8	18	19	17	18	1,917	1,417

Замечание. Если максимальные значения суммарного выигрыша или минимальные значения суммарного проигрыша при выборе различных стратегий в некоторой партии совпадают (например, во 2-ой партии для 1-го игрока), то игрок может выбрать любую из стратегий.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите приближенное решение игры, заданной матрицей A.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР

Для матриц большой размерности применение методов линейного программирования приводит к громоздким вычислениям, поэтому удобнее использовать приближенные методы решения. Одним из таких методов является итеративный метод Брауна-Робинсона, или метод фиктивного разыгрывания. Идея метода – многократное фиктивное разыгрывание игры. В первой партии каждый игрок выбирает произвольную чистую стратегию, в k-ой партии каждый выбирает ту стратегию, которая принесла максимальный суммарный выигрыш (для первого игрока) или минимальный суммарный проигрыш (для второго игрока) в (k-1)-ой партии.

Можно доказать, что $\max\limits_k \dfrac{\underline{v}_k}{k} \le v \le \min\limits_k \dfrac{\overline{v_k}}{k}$, где v – цена игры, k– номер партии, $\overline{v_k}$ – максимальное значение суммарного выигрыша 1-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий, $\underline{v}_k$ – минимальное значение суммарного проигрыша 2-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий.

За приближенные оптимальные стратегии игроков принимают векторы, координатами которых являются относительные частоты выбора соответствующих чистых стратегий.

Преимущество метода – его простота, недостаток – малая скорость сходимости вследствие немонотонности последовательностей $\overline{v_k}$ и $\underline{v}_k$.

Пример. Найти приближенное решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

Решение. Обозначим чистые стратегии 1-го игрока a, b, c, 2-го игрока – α, β, γ. Пусть в первой партии игроки выбрали стратегии a и α. $\max\limits_k \dfrac{\underline{v}_k}{k} = 1{,}417$; $\min\limits_k \dfrac{\overline{v_k}}{k} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 1{,}417 \le v \le 1{,}5$. Приближенное решение игры за 12 партий: v=1,45, $x_{12}^* = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{7}{12}\right)$, $y_{12}^* = \left(\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{12}\right)$.

Основная теорема теории матричных игр, или теорема о минимаксе. Если $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – матрица игры Γ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ $K(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, то величины $\max\limits_{x \in S_m} \min\limits_{y \in S_n} K(x, y)$ и $\min\limits_{y \in S_n} \max\limits_{x \in S_m} K(x, y)$ существуют и равны между собой (эта величина и является ценой игры v).

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Свойства оптимальных стратегий

1. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v. Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $y \in S_n$ выполнялось неравенство $v \le K(x^*, y)$. Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in S_m$ выполнялось неравенство $K(x, y^*) \le v$.

2. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A, v – действительное число, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$. Тогда, для того чтобы v было ценой игры, а x^* и y^* были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i \in M$ и $j \in N$ выполнялось неравенство $K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$.

3. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v. Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \in N$ выполнялось неравенство $v \le K(x^*, j)$. Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in M$ выполнялось неравенство $K(i, y^*) \le v$.

4. Если x^*, y^* – решение $(m \times n)$-игры Γ_A, то $\max\limits_i K(i, y^*) = \min\limits_j K(x^*, j) = v$.

5. Пусть $x^* = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$, v – решение игры Γ_A. Тогда для любого $i \in M$, при котором $K(i, y^*) < v$, выполняется неравенство x_i=0, а для любого $j \in N$, при котором $v < K(x^*, j)$, выполняется неравенство y_j=0.

6 (Лемма о масштабе). Если Γ_A – игра с матрицей $A=(a_{ij})_{m\times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A'=(a'_{ij})_{m\times n}$, где $a'_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta$, где α,β=const, α>0, то множества оптимальных стратегий игроков в играх Γ_A и $\Gamma_{A'}$ совпадают, а $v_{A'}=\alpha v_A+\beta$. Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для игры Γ_A, $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найдите $K(i,j)$ для ситуаций (1;3), (3;2), (2;1).

2. Найдите $\underline{v}$ и $\overline{v}$ в игре Γ_A:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найдите седловую точку матрицы и решение соответствующей игры:

а) $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, г) $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Могут ли указанные векторы определять смешанные стратегии в матричной игре:

а) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, б) $\left(\frac{3}{11};\frac{6}{11};\frac{2}{11}\right)$, в) $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};0;\frac{2}{3}\right)$, г) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$?

7. $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right),\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{2};0\right),\frac{13}{4}$.

8. $\left(\frac{10}{42};\frac{9}{42};\frac{23}{42}\right),\left(0;\frac{5}{14};\frac{8}{14};\frac{1}{14}\right),\frac{55}{14}$.

9. $\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right),\left(0;\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5};0\right),\frac{9}{5}$.

10. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),0$.

11. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right),0$.

12. $\left(0;0;\frac{13}{15};\frac{2}{15}\right),\left(\frac{1}{5};0;\frac{4}{5}\right),\frac{17}{5}$.

Решение исходной игры: $x^* = \left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right)$, $v = -\frac{6}{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решение матричной игры, сведя ее к двойственной задаче линейного программирования:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Ответы. 1. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), \frac{2}{3}$.

2. $\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{2}{7}\right), \left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{2}{7}\right), \frac{8}{7}$.

3. $\left(0;\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right), \frac{3}{4}$.

4. $\left(0;\frac{1}{10};\frac{9}{10}\right), \left(\frac{3}{5};0;\frac{2}{5}\right), -\frac{2}{5}$.

5. $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5};0\right), \left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), -\frac{3}{5}$.

6. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), 0$.

5. Для игры Γ_A с платежной матрицей A найдите значение $K(x,y)$ в данной ситуации (x,y):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, $y = \left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$, $y = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right)$, $y = \left(\frac{2}{5};\frac{1}{5};0;\frac{2}{5}\right)$.

6. Проверьте, является ли тройка x, y, v решением игры Γ_A:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$, $y = \left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$, $v = \frac{17}{5}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3};0\right)$, $y = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, v=3.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y = \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0\right)$, $v = \frac{5}{2}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \left(\frac{7}{8};0;\frac{1}{8}\right)$, $y = \left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right)$, $v = \frac{3}{4}$.

Ответы. 1. 0;5;4. **2.** а) 2; 4; б) 6; в) 3; 5. **3.** а) (3;2), 3; б) (4;1), 7; в)(3;4), 5; г) (1;2), (1;4), (3;2), (3;4), 5. **4.** а,б) да; в,г) нет. **5.** а) $\frac{16}{9}$; б) $\frac{13}{6}$; в) 0. **6.** а,в,г) да; б) нет.

2. (2×2) – ИГРЫ

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ – платежная матрица игры Г. Если она **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры Г можно найти

1) решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2=v, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2=v, \\ y_1+y_2=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2=v, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=v, \\ x_1+x_2=1; \end{cases}$$

2) по формулам:

$$x_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\ x_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\ \text{ (или } x_2=1-x_1);$$

$$y_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\ y_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\ \text{ (или } y_2=1-y_1);$$

$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};$$

3) в матричном виде:

$$x=\frac{JA^*}{JA^*J^T},\qquad y^T=\frac{A^*J^T}{JA^*J^T},\qquad v=\frac{|A|}{JA^*J^T},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, A^* – присоединенная к A матрица, $J=(1\ \ 1)$, $x=(x_1\ \ x_2)$, $y=(y_1\ \ y_2)$, J^T и y^T – транспонированные матрицы J и y.

Найдем, например, решение игры с платежной матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$, которая **не имеет седловой точки**.

1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1-y_2=v, \\ 2y_1+4y_2=v, \\ y_1+y_2=1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+2x_2=v, \\ -x_1+4x_2=v, \\ x_1+x_2=1. \end{cases}$$

Решив системы, получим:

$y_1=\frac{5}{6}$, $y_2=\frac{1}{6}$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$, $v=\frac{7}{3}$, то есть $x^*=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, $y^*=\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$, $v=\frac{7}{3}$ – решение игры.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2-я итерация	q_4	0	$2/3$	0	$1/3$	$7/3$	1	0	$-1/3$
	q_5	0	$2/3$	0	$7/3$	$4/3$	0	1	$-1/3$
	q_1	1	$1/3$	1	$2/3$	$2/3$	0	0	$1/3$
			$1/3$	0	$-1/3^*$	$-1/3$	0	0	$1/3$
3-я итерация	q_4	0	$4/7$	0	0	$15/7$	1	$-1/7$	$-2/7$
	q_2	1	$2/7$	0	1	$4/7$	0	$3/7$	$-1/7$
	q_1	1	$1/7$	1	0	$2/7$	0	$-2/7$	$3/7$
			$3/7$	0	0	$-1/7^*$	0	$1/7$	$2/7$
4-я итерация	q_3	1	$4/15$	0	0	1	$7/15$	$-1/15$	$-2/15$
	q_2	1	$2/15$	0	1	0	$-4/15$	$7/15$	$-1/15$
	q_1	1	$1/15$	1	0	0	$-2/15$	$-4/15$	$7/15$
			$7/15$	0	0	0	$1/15$	$2/15$	$4/15$

Получаем решение двойственной задачи: $p=\left(\frac{1}{15};\frac{2}{15};\frac{4}{15}\right)$, $q=\left(\frac{1}{15};\frac{2}{15};\frac{4}{15}\right)$, $\frac{1}{v}=\frac{7}{15}$.

Тогда решение игры с матрицей A': $x'=\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right)$, $y'=\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right)$, $v=\frac{15}{7}$.

Решив задачу симплексным методом и вернувшись к переменным x_i, y_j, получим решение матричной игры.

Пример. Найти решение игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Перейдем к положительной матрице, прибавив 3 ко всем элементам матрицы A: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Составим двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \le 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \le 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \le 1, \\ q_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \ge 1, \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,3; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max \qquad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{v} \to \min$$

Решим задачу симплексным методом.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 + q_4 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_5 = 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_6 = 1, \\ q_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max$$

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я итерация	q_4	0	1	1	1	3	1	0	0
	q_5	0	1	1	3	2	0	1	0
	q_6	0	1	3	2	2	0	0	1
			0	-1*	-1	-1	0	0	0

2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6};\ y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6};\ v = \frac{3\cdot 4 + 2\cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

3) Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14, \qquad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad JA^* = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ \ 4),$$

$$JA^*J^T = (2\ \ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6,\ A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x = \frac{1}{6}\cdot(2\ \ 4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ y^T = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix},\ v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Результаты совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения (2×2)-игр с заданными платежными матрицами, сделайте проверку найденных решений:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $(2\times n)$ И $(m\times 2)$ – ИГРЫ

Рассмотрим игру с платежной матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Если 1-й игрок применит смешанную стратегию $x^*=(x,1-x)$, а 2-й игрок – чистую стратегию $j=1$, то $K(x^*,1)=2x+4(1-x)$. (1)

Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий $j=2$, $j=3$, $j=4$

$$K(x^*,2)=3x+1(1-x); \quad (2)$$

$$K(x^*,3)=1x+6(1-x); \quad (3)$$

$$K(x^*,4)=5x+0(1-x),\ x\in[0;1]. \quad (4)$$

Построим прямые (1), (2), (3), (4) по двум точкам, придавая x значения 0 и 1 (рис.1). Оптимальная стратегия 1-го игрока – его максиминная стратегия, которая соответствует самой высокой точке A выделенной на рис.1 нижней границы. Абсцисса этой точки – искомое значение x, ордината этой точки – значение v.

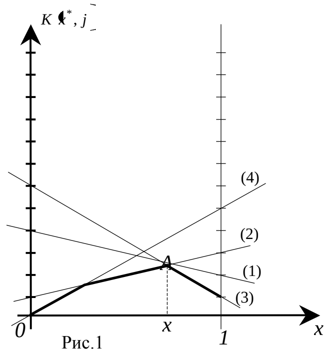

Рис.1

Точка A является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру $A'=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

По формулам решения (2×2) – игры получим:

$$x_1=\frac{6-1}{3+6-1-1}=\frac{5}{7},\ x_2=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7};$$

$$y_1=\frac{6-1}{3+6-1-1}=\frac{5}{7},\ y_2=\frac{2}{7};\ v=\frac{3\cdot 6-1\cdot 1}{3+6-1-1}=\frac{17}{7}.$$

6. СВЕДЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть матрица игры имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $K=K(x,y)$– функция выигрыша, $v\in R$, $x^*\in S_m$, $y^*\in S_n$.

Тогда по свойству 2 оптимальных стратегий для любых $i\in M$, $j\in N$ должно выполняться условие $K(i,y^*)\le v\le K(x^*,j)$, то есть

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1n}y_n\le v, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2n}y_n\le v, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\dots+a_{mn}y_n\le v, \\ y_1+y_2+\dots+y_n=1, \\ y_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{m1}x_m\ge v, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{m2}x_m\ge v, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+a_{mn}x_m\ge v, \\ x_1+x_2+\dots+x_m=1, \\ x_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Разделив все уравнения и неравенства обеих систем на v, обозначим $\frac{x_i}{v}=p_i$, $\frac{y_j}{v}=q_j$. Заметим, что цена игры v при этом должна быть положительна, в противном случае нужно предварительно к матрице A применить лемму о масштабе. Учитывая, что цель 1-го игрока – максимизировать, а цель 2-го – минимизировать величину v, приходим к двойственной задаче линейного программирования с целевой функцией $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{12}q_2+\dots+a_{1n}q_n\le 1, \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+\dots+a_{2n}q_n\le 1, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+\dots+a_{mn}q_n\le 1, \\ q_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}p_2+\dots+a_{m1}p_m\ge 1, \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\dots+a_{m2}p_m\ge 1, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\dots+a_{mn}p_m\ge 1, \\ p_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,m; \end{cases}$$

$$q_1+q_2+\dots+q_n=\frac{1}{v}\to\max \qquad p_1+p_2+\dots+p_m=\frac{1}{v}\to\min$$

стратегий $y^* = \alpha_1(0;1;0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2;\alpha_1;\frac{1}{2}\alpha_2\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, цена игры v=1.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите множество всех решений игр с заданными платежными матрицами:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответы. 4. $x^* = \alpha_1\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) + \alpha_2(0;1;0),\ y^* = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right),\ v = 3.$

5. $x^* = \left(0;\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right) + \alpha_2\left(\frac{5}{8};0;\frac{3}{8}\right),\ v = \frac{23}{8}.$

6. $x^* = (0;1;0),\ y^* = \alpha_1(0;0;1) + \alpha_2\left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right) + \alpha_3\left(0;\frac{9}{16};\frac{7}{16}\right),\ v = 4.$

7. $x^* = \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7};0\right) + \alpha_2\left(\frac{3}{7};\frac{1}{14};\frac{1}{2}\right),\ v = \frac{22}{7}.$

8. $x^* = \left(\frac{1}{13};\frac{5}{13};\frac{7}{13}\right),\ y^* = \left(\frac{4}{13};\frac{3}{13};\frac{6}{13}\right),\ v = \frac{15}{13}.$

9.
$x^* = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;0\right) + \alpha_2\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) + \alpha_3(0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}),\ v = \frac{1}{2}.$

Тогда решение исходной игры имеет вид $x^* = \left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right)$, $y^* = \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right)$ (номерам столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые координаты вектора y^*), $v = \frac{17}{7}$.

Аналогично решаются $(n \times 2)$- игры. Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $y^* = (y, 1-y)$ – смешанная стратегия 2-го игрока, 1-й игрок выбирает чистые стратегии i=1,2,3.

$$K(1, y^*) = 3y + 2(1-y); \quad (1)$$
$$K(2, y^*) = 1y + 5(1-y); \quad (2)$$
$$K(3, y^*) = 4y + 1(1-y),\ y \in [0;1]. \quad (3)$$

Построим прямые (1),(2),(3) по двум точкам, придавая y значения 0 и 1 (рис. 2). Оптимальная стратегия 2-го игрока – его минимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке B выделенной на рис. 2 верхней границы. Абсцисса этой точки – искомой значение y, ордината точки – значение v.

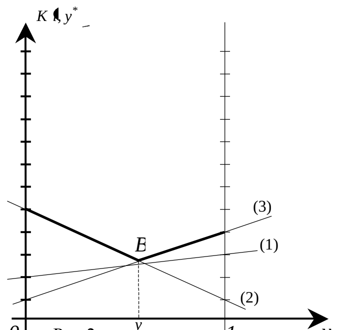

Рис.2

Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$x_1 = \frac{1-4}{1+1-4-5} = \frac{3}{7}$,

$x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$;

$y_1 = \frac{1-5}{1+1-4-5} = \frac{4}{7}$, $y_2 = \frac{3}{7}$;

$v = \frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{1+1-4-5} = \frac{19}{7}$.

Тогда решение исходной игры:

$x^* = \left(0;\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$, $v = \frac{19}{7}$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть платежная матрица игры $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 11\\ 7 & 4 & 2\end{pmatrix}$. Построим соответствующие прямые (1), (2), (3) (рис.3). На выделенной нижней границе есть горизонтальный участок *AB*, все точки которого имеют одну и ту же (максимальную) ординату.

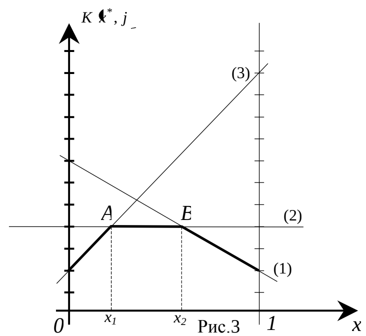

Рис.3

A – точка пересечения прямых (2) и (3), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A'=\begin{pmatrix}4 & 11\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=\frac{2-4}{4+2-4-11}=\frac{2}{9}.$$

B – точка пересечения прямых (1) и (2), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A''=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 7 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=\frac{4-7}{2+4-7-4}=\frac{3}{5}.$$

Решение исходной игры: $x^*=(x;1-x)$, где $x\in\left[\frac{2}{9};\frac{3}{5}\right]$, $y^*=(0;1;0)$, $v=4$, то есть 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий, 2-й игрок – единственную оптимальную стратегию, это чистая стратегия *j*=2 (только она участвует в образовании отрезка *AB*), цена игры *v* – ордината точек отрезка *AB*. Значения *v* и y^* можно было получить также, используя формулы решения (2×2)–игр для матрицы A' или A'' (проверьте!).

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения $(2\times n)$ и $(m\times 2)$ – игр с заданными платежными матрицами:

1. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 6\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix}4 & 2 & 6 & 3\\ 6 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix}2 & 6 & 8 & 3\\ 4 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix}$

5. МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Можно доказать, что множества оптимальных стратегий 1-го и 2-го игроков (T_1 и T_2) – непустые ограниченные выпуклые и замкнутые подмножества соответственно *m*-мерного и *n*-мерного пространств. Из выпуклости следует, что если T_1 (T_2) имеет более одного элемента, то оно имеет бесконечное число элементов, то есть матричная игра имеет либо только одно, либо бесконечное множество решений.

Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей *A*, нужно рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы *A*. Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры Γ_A. Множество всех решений каждого игрока является выпуклой линейной комбинацией найденных решений.

Решение игры, заданной **квадратной** подматрицей B, можно найти в матричном виде по формулам $v=\frac{|B|}{JB^*J^T}$, $x=\frac{JB^*}{JB^*J^T}$, $y^T=\frac{B^*J^T}{JB^*J^T}$.

Найдем, например, множество всех решений игры Γ_A с платежной матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Подматрицы (1×1) не дадут решений, так как матрица *A* не имеет седловых точек. Рассмотрим подматрицы (2×2):

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Для *B*: $v_B=1$, $x_B=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y_B=(0;1)\Rightarrow v_A=1$, $x_A=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y_A=(0;1;0)$ – является решением игры Γ_A (убеждаемся в этом проверкой).

Для *C*: $v_C=1$, $x_C=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y_C=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$ $v_A=1$, $x_A=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y_A=\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ – является решением игры Γ_A.

Для *D* получим такое же решение, как для *B*.

Таким образом, в игре Γ_A 1-й игрок имеет единственную оптимальную стратегию $x^*=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, 2-й игрок имеет множество оптимальных

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 24 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ответы.

1. $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), 6$.

2. $\left(0;\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0;0\right), \frac{19}{4}$.

3. $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), 8$.

4. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), \left(0;0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), 2$.

5. $\left(\frac{5}{11};0;0;\frac{6}{11}\right), \left(\frac{3}{11};\frac{8}{11};0;0\right), \frac{59}{11}$.

6. $\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right), \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right), \frac{17}{7}$.

7. $\left(\frac{4}{7};0;\frac{3}{7}\right), \left(\frac{2}{7};0;0;\frac{5}{7};0\right), \frac{29}{7}$.

8. $\left(\frac{5}{6};0;\frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6};0;\frac{5}{6}\right), \frac{11}{6}$.

9. $\left(0;\frac{3}{4};\frac{1}{4}0;0\right), \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), \frac{7}{2}$.

10. $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0\right), \left(\frac{1}{4};0;0;\frac{3}{4};0\right), 6$.

11. $\left(0;\frac{4}{5};\frac{1}{5};0\right), \left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \frac{8}{5}$.

12. $\left(\frac{1}{2};0;0;\frac{1}{2}\right), \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \frac{5}{2}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \\ 7 & 7 \\ 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 10 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 6 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Ответы. 2. $x^* = (x, 1-x),\ x \in \left[\frac{1}{3};\frac{4}{7}\right],\ y^* = (0;1;0),\ v = 3$.

6. $x^* = (x, 1-x),\ x \in \left[\frac{2}{5};\frac{7}{9}\right],\ y^* = (1;0;0),\ v = 2$.

8. $x^* = (x, 1-x),\ x \in \left[\frac{1}{6};1\right],\ y^* = (0;1;0),\ v = -1$.

12. $x^* = (0;0;1),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{2};1\right],\ v = 3$.

14. $x^* = (0;0;1;0;0),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right],\ v = 7$.

17. $x^* = (0;0;1;0),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right],\ v = 6$.

4. ДОМИНИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ

Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Например, в игре с платежной матрицей $A=\begin{pmatrix}1&7&4\\8&3&9\\3&1&4\end{pmatrix}$ 1-му игроку не стоит выбирать стратегию i=3, лучше выбрать i=2 (какую бы стратегию ни выбрал 2-й игрок), а 2-ому игроку не стоит выбирать j=3, лучше выбрать j=1 (почему?). В результате вместо игры Γ_A с матрицей A можно рассмотреть игру $\Gamma_{A'}$ с матрицей $A'=\begin{pmatrix}1&7\\8&3\end{pmatrix}$. Легко найти решение игры $\Gamma_{A'}$: $x^*_{A'}=\left(\frac{5}{11};\frac{6}{11}\right)$, $y^*_{A'}=\left(\frac{4}{11};\frac{7}{11}\right)$, $v_{A'}=\frac{53}{11}$. Можно предположить, что решение игры Γ_A будет иметь вид: $x^*_A=\left(\frac{5}{11};\frac{6}{11};0\right)$,

$y^*_A=\left(\frac{4}{11};\frac{7}{11};0\right)$, $v_A=\frac{53}{11}$.

Говорят, что i-я стратегия 1-го игрока доминирует его k-ю стратегию, если $a_{ij}\ge a_{kj}$ для всех $j\in N$ и хотя бы для одного j $a_{ij}>a_{kj}$. В этом случае говорят также, что i-я стратегия (или строка) – доминирующая, k-я – доминируемая.

Говорят, что j-я стратегия 2-го игрока доминирует его l-ю стратегию, если для всех $i\in M$ $a_{ij}\le a_{il}$ и хотя бы для одного i $a_{ij}<a_{il}$. В этом случае j-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, l-ю – доминируемой.

В предыдущем примере 2-я стратегия 1-го игрока доминирует его 3-ю стратегию, 1-я стратегия 2-го игрока доминирует его 3-ю стратегию. Доминируемые стратегии исключаются из матрицы игры.

Стратегия может доминироваться также выпуклой линейной комбинацией других стратегий. Так, i-я стратегия 1-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij}\le\sum\limits_{k\ne i}\alpha_k a_{kj}$; j-я стратегия 2-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij}\ge\sum\limits_{l\ne j}\alpha_l a_{il}$.

Например, в матрице $A=\begin{pmatrix}24&0\\0&8\\4&5\end{pmatrix}$ 3-я строка строго доминируется выпуклой линейной комбинацией 1-ой и 2-ой строк с коэффициентами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$: $a_3<\frac{1}{4}a_1+\frac{3}{4}a_2$ (проверьте!), поэтому вместо игры Γ_A можно рассмотреть игру $\Gamma_{A'}$, $A'=\begin{pmatrix}24&0\\0&8\end{pmatrix}$. Найдя ее решение, получим решение игры Γ_A: $x^*=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0\right)$, $y^*=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, v=6.

Если $x=(x_1, x_2, ..., x_k)\in S_k$ – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на i-ом месте будем называть стратегию вида $\overline{x_i}=(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_k)\in S_{k+1}$.

Справедлива **теорема**: пусть Γ_A – $(m\times n)$ – игра, в которой i-я строка доминируема, $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей A', полученной из A вычеркиванием i-ой строки. Тогда

1) $v_A=v_{A'}$;

2) всякая оптимальная стратегия 2-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$ является оптимальной и в игре Γ_A;

3) если x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$, то $\overline{x_i^*}$ – его оптимальная стратегия в игре Γ_A.

Аналогичная теорема имеет место для доминируемого столбца.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения матричных игр, исключив доминируемые стратегии:

1. $\begin{pmatrix}3&9&4\\8&4&9\\7&3&8\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}5&3&4&7\\4&5&8&6\\7&4&6&5\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}5&6&11\\10&11&6\\9&10&5\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}5&2&5&0&4\\2&5&2&4&0\\3&-1&3&-2&3\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}1&7&10\\6&2&3\\8&3&5\\9&4&6\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}2&3&1&5&6\\4&1&6&0&7\\1&2&0&0&5\end{pmatrix}$