Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Практикум

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2008

ББК 22.143
Л 59

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА: практикум / сост. Г.В. Аверко-
Л 59 ва. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 64 с.

Практикум содержит краткий теоретический материал второго семестра учебной дисциплины «Линейная алгебра», 11 различных индивидуальных заданий по 30 вариантов в каждом и типовой вариант с подробными решениями. Может быть полезен для студентов всех специальностей по курсам: «Высшая математика», «Математика», «Алгебра и геометрия».

Для студентов I курса специальностей 08011665 «Математические методы в экономике», 080700 «Бизнес-информатика» по курсу «Линейная алгебра».

ББК 22.143

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Вторая часть практикума по линейной алгебре для студентов очной формы обучения специальностей 08011665 «Математические методы в экономике», 080700 «Бизнес-информатика» включает краткий теоретический материал второго семестра вышеназванного курса, 30 вариантов индивидуальных заданий и подробное решение типового варианта.

В издании рассмотрены такие темы как Аналитическая геометрия на плоскости, Аналитическая геометрия в пространстве, Арифметические (векторные) линейные пространства, что делает возможным использовать данное учебное пособие для студентов других специальностей при изучении других математических дисциплин.

Теоретический материал, изложенный в практикуме, содержит определения, основные формулы, формулировки важнейших теорем, необходимых для решения практических задач данной дисциплины.

В практикум включено 11 различных заданий по 30 вариантов в каждом, которые могут использоваться при формировании преподавателем контрольных работ и индивидуальных заданий, а также в качестве упражнений для самостоятельного решения студентами. Приведенное подробное решение типового варианта должно способствовать формированию у студентов навыков корректного оформления выполненных заданий.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Аналитическая геометрия на плоскости

1.1.1. Уравнения прямой на плоскости

Прямая линия – одно из основных понятий геометрии, обычно принимаемое за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии.

Прямая линия – алгебраическая линия первого порядка: в декартовой системе координат прямая на плоскости задается уравнением первой степени. Рассмотрим различные виды уравнений прямой.

1) **Общее уравнение (полное) прямой:**

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B и C – постоянные, причем, A и B одновременно не равны нулю, $\bar{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой.

Определение. Нормальным вектором прямой, или вектором нормали, называется ненулевой вектор, перпендикулярный прямой.

Если один из коэффициентов в уравнении прямой равен нулю, то уравнение называется неполным. При $C = 0$ прямая проходит через начало координат, при $A = 0$ (или $B = 0$) прямая параллельна оси Ox (соответственно Oy).

Общее уравнение прямой в векторной форме:

$$\bar{r} \cdot \bar{n} + C = 0,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $M(x, y)$, $\bar{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой.

Направляющие косинусы вектора $\bar{n} = \{A, B\}$ определяются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где α .и β – углы, между осью Ox и соответственно Oy и перпендикуляром, проведенным к прямой из начала координат. Так как $\alpha + \beta = \pi/2$, то $\cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.

2) **Нормальное уравнение прямой:**

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0;$$

в векторной форме:

$$\bar{r} \cdot \bar{n}^{\circ} - p = 0,$$

где $\bar{n}^{\circ} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ – единичный вектор нормали, p – расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение может быть получено из общего уравнения умножением на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где знаки μ и C противоположны.

3) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

4) **Уравнение прямой в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ – отрезки, отсекаемые прямой на осях *Ox* и *Oy*.

5) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом:**

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент: $k = tg\varphi = -\frac{b}{a}$; φ – угол наклона прямой к оси *Ox*, отсчитываемый в направлении, противоположном часовой стрелке.

6) **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом *k***:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

7) **Каноническое уравнение прямой.** Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{s} = (m, n)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Определение. Направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, параллельный прямой.

8) **Параметрические уравнения прямой.** Получаются из канонического уравнения приравниванием параметру t и выражением переменных *x, y*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

Параметрическое уравнение прямой в векторной форме:

$$\bar{r} = \bar{r}^{\circ} + \bar{s}t = 0 ,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $M(x, y)$, $\bar{r}^{\circ}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, t – параметр.

9) **Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

1.1.2. Расстояние от точки до прямой

Определение. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной нормальным уравнением

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 ,$$

вычисляется по формуле:

$$d = d(M_0, l) = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right| .$$

Если прямая l задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0 ,$$

то расстояние до точки $M_0(x_0, y_0)$ можно вычислить по формуле:

$$d = d(M_0, l) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

1.1.3. Угол между двумя прямыми

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 , \; A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 ,$$

то

$$\cos(l_1 \hat{,} l_2) = \cos(\bar{n}_1 \hat{,} \bar{n}_2) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} ,$$

где $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ – нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно.

Если прямые l_1 и l_2 задаются уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y = k_1 x + b_1 ,\ \ y = k_2 x + b_2 ,$$

то

$$tg(l_1 \hat{,} l_2) = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} .$$

1.1.4. Взаимное расположение двух прямых

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны $(l_1 \perp l_2)$ тогда и только тогда, когда

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \text{ или } k_1 k_2 = -1.$$

Прямые l_1 и l_2 параллельны $(l_1 \| l_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ или } k_1 = k_2 .$$

Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, заданных общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 ,\ \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 ,$$

находятся решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -C_1, \\ A_2 x + B_2 y = -C_2. \end{cases}$$

1.1.5. Линии второго порядка

Линия второго порядка – множество точек плоскости, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

где A, B,C, D, E и F – постоянные действительные числа, причем, A, B и C одновременно не равны нулю. Данное уравнение называется общим уравнением линии второго порядка.

Множество точек плоскости, определяемое уравнением второго порядка относительно переменных x и y, может быть пустым или состоять из одной точки; для сохранения общности в этих случаях говорят, что уравнение определяет мнимую линию второго порядка. Существует девять канонических видов, каждому из которых соответствует определенный класс линий второго порядка. Остановимся подробно на рассмотрении таких частных случаев уравнения линии второго порядка как эллипс, гипербола, парабола.

1.1.6. Эллипс и его основные свойства

Определение. Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a \geq b > 0$. Система координат, в которой уравнение эллипса имеет такой вид, называется канонической, а само уравнение – каноническим уравнением эллипса.

Замечание. Окружность радиуса a с центром в точке $O(0, 0)$, заданная уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, является частным случаем эллипса при $a = b$.

Параметры a и b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ называются вершинами эллипса.

Координатные оси Ox и Oy канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии.

Определение. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются правым и левым фокусами эллипса. Величина $2c$ называется фокусным расстоянием.

Определение. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

Для окружности эксцентриситет $\varepsilon = 0$.

Определение. Прямые $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правой и левой директрисами эллипса.

1.1.7. Гипербола и ее основные свойства

Определение. Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Система координат, в которой уравнение гиперболы имеет такой вид, называется канонической, а само уравнение – каноническим уравнением гиперболы.

Параметры a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$ называются вершинами гиперболы.

Координатные оси Ox и Oy канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии.

Определение. Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

Определение. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются правым и левым фокусами гиперболы. Величина $2c$ называется фокусным расстоянием.

Определение. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Определение. Прямые $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ называются правой и левой директрисами гиперболы.

1.1.8. Парабола и ее основные свойства

Определение. Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$ – параметр параболы. Система координат, в которой уравнение параболы имеет такой вид, называется канонической, а само уравнение – каноническим уравнением параболы.

Точка $O(0, 0)$ является вершиной параболы.

Координатная ось Ox канонической системы координат является осью симметрии параболы.

Все точки параболы расположены в правой полуплоскости.

Определение. Точка $F(p/2, 0)$ называется фокусом параболы.

Определение. Прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ называется директрисой параболы.

Замечание 1. Парабола, определенная уравнением $y^2 = -2px$, симметрична параболе $y^2 = 2px$ относительно оси *Oy*, то есть расположена в левой полуплоскости. Точка $F(-p/2, 0)$ является ее фокусом, а прямая $x = \dfrac{p}{2}$ – директрисой.

Замечание 2. Парабола, заданная уравнением $x^2 = 2py$, имеет осью симметрии ось *Oy*, располагается в верхней полуплоскости. Ее фокусом является точка $F(0, p/2)$, а директрисой – прямая $y = -\dfrac{p}{2}$. Симметричная ей парабола, заданная уравнением $x^2 = -2py$, расположена в нижней полуплоскости, имеет в точке $F(0, -p/2)$ фокус, а ее директрисой является прямая $y = \dfrac{p}{2}$.

1.2. Аналитическая геометрия в пространстве

1.2.1. Плоскость. Виды уравнений плоскости

Плоскость – одно из основных понятий геометрии, обычно принимаемое за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии.

Плоскость – алгебраическая поверхность первого порядка: в декартовой системе координат плоскость может быть задана уравнением первой степени. Рассмотрим различные виды уравнений плоскости.

1) **Общее уравнение (полное) плоскости:**

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где *A*, *B*, *C* и *D* – постоянные, причем, *A*, *B* и *C* одновременно не равны нулю, $\bar{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Определение. Нормальным вектором плоскости, или вектором нормали, называется ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости.

Если один из коэффициентов в уравнении плоскости равен нулю, то уравнение называется неполным. При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат, при $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) плоскость параллельна оси *Ox* (соответственно *Oy* или *Oz*). При $A = B = 0$ (или

$A = C = 0$, или $B = C = 0$) плоскость параллельна координатной плоскости *xOy* (соответственно *xOz* или *yOz*).

Общее уравнение плоскости в векторной форме:

$$\bar{r} \cdot \bar{n} + D = 0,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $\bar{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости.

Направляющие косинусы вектора $\bar{n} = \{A, B, C\}$ определяются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2) **Нормальное уравнение плоскости:**

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

в векторной форме:

$$\bar{r} \cdot \bar{n}^\circ - p = 0,$$

где $\bar{n}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор нормали, *p* – расстояние от начала координат до плоскости.

Нормальное уравнение может быть получено из общего уравнения умножением на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знаки μ и *D* противоположны.

3) **Уравнение плоскости в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях *Ox*, *Oy* и *Oz*.

4) **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **перпендикулярно вектору** $\bar{n} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5) **Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,3}$, не лежащие на одной прямой**:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.2.2. Расстояние от точки до плоскости

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Π, заданной нормальным уравнением

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

вычисляется по формуле:

$$d = d(M_0, \Pi) = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right|.$$

Если плоскость Π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то расстояние до точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно вычислить по формуле:

$$d = d(M_0, \Pi) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.2.3. Угол между двумя плоскостями

Если плоскости Π_1 и Π_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то

$$\cos(\Pi_1 \widehat{,} \Pi_2) = \cos(\overline{n}_1 \widehat{,} \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ – нормальные векторы плоскостей Π_1 и Π_2 соответственно.

1.2.4. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть плоскости Π_1 и Π_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \Pi_1$, $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \Pi_2$.

Плоскости Π_1 и Π_2 перпендикулярны $(\Pi_1 \perp \Pi_2)$ тогда и только тогда, когда

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \text{ или } \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 .$$

Плоскости Π_1 и Π_2 параллельны $(\Pi_1 \| \Pi_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \text{ или } \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0 .$$

Плоскости Π_1 и Π_2 совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} .$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 , \; Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

1.2.5. Взаимное расположение трех плоскостей

Если плоскости заданы общими уравнениями, то при решении системы трех линейных уравнений возможны случаи:

1) Система имеет единственное решение, то есть плоскости имеют одну общую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) Система имеет множество решений, значит, плоскости имеют множество общих точек, то есть пересекаются по прямой линии или совпадают.

3) Система не имеет решения, следовательно, три плоскости не имеют общих точек.

1.2.6. Уравнения прямой в пространстве

1) **Общее уравнение прямой.** Прямая линия определяется как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей.

2) **Канонические уравнения прямой.** Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{s} = \{m, n, p\}$ имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, то есть $m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

3) **Параметрические уравнения прямой.** Получаются из канонических уравнений приравниванием параметру t и выражением переменных x, y, z:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Параметрическое уравнение прямой в векторной форме:

$$\bar{r} = \bar{r}^\circ + \bar{s}t = 0,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $\bar{r}^\circ$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, t – параметр.

4) **Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1.2.7. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость Π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая l – каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Определение. Углом между прямой l и плоскостью Π называется острый угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Имеет место следующая формула:

$$\sin(\widehat{\Pi, l}) = \left|\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{s}})\right| = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{s}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

В пространстве возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости.

1) Прямая и плоскость пересекаются тогда и только тогда, когда

$$Am+Bn+Cp\neq 0\,.$$

Координаты точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ пересечения прямой и плоскости находятся по формулам:

$$x^*=x_0+mt\,,\ y^*=y_0+nt\,,\ z^*=z_0+pt$$

подстановкой значения параметра

$$t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}\,.$$

Условие перпендикулярности прямой l и плоскости Π:

$$l\perp\Pi\Leftrightarrow\bar{s}\perp\bar{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\,.$$

2) Прямая и плоскость параллельны.

$$l\parallel\Pi\Leftrightarrow\begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.\end{cases}$$

3) Прямая принадлежит плоскости.

$$l\in\Pi\Leftrightarrow\begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.\end{cases}$$

1.2.8. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Рассмотрим канонические уравнения прямых l_1 и l_2:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\,,\quad\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,,$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)\in l_1$, $l_1\parallel\bar{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$, $M_2(x_2, y_2, z_2)\in l_2$, $l_2\parallel\bar{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$.

Определение. Углом между прямыми l_1 и l_2 в пространстве называется любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным.

Имеет место следующая формула:

$$\cos(\widehat{l_1, l_2})=\cos(\widehat{\bar{s}_1, \bar{s}_2})=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

В пространстве возможны следующие случаи взаимного расположения двух прямых.

1) Прямые параллельны.

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2,\ M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l_2,\ M_2(x_2, y_2, z_2) \notin l_1.$$

2) Прямые совпадают тогда и только тогда, когда

$$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1 M_2}.$$

3) Прямые пересекаются.

4) Прямые являются скрещивающимися.

Установить, являются ли непараллельные прямые пересекающимися или скрещивающимися, можно с помощью следующего критерия.

Теорема. (Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых). Прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда смешанное произведение векторов $\overline{M_1 M_2}$, $\bar{s}_1$, и $\bar{s}_2$ равно нулю, то есть

$$\overline{M_1 M_2} \cdot (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если указанное смешанное произведение не равно нулю, то прямые являются скрещивающимися.

Условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s} = \{m, n, p\}$, вычисляется по формуле:

$$d = d(M^*, l) = \frac{\left| \bar{s} \times \overline{M_0 M^*} \right|}{|\bar{s}|}.$$

1.3. Арифметические (векторные) линейные пространства

1.3.1. Операции над векторами и их свойства

Определение. Упорядоченный набор действительных чисел вида $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется n-мерной вектор-строкой.

Упорядоченный набор действительных чисел вида $\overline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ называется n-мерным вектор-столбцом.

Числа a_1, a_2, …, a_n, составляющие n-мерный вектор $\overline{a}$, называются координатами вектора, а их число n – размерностью вектора $\overline{a}$.

Определение. Два вектора одинаковой размерности называются равными, если их соответствующие координаты равны.

Над векторами определены две линейные операции: сложение и умножение на число.

Определение. Суммой двух векторов $\overline{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $\overline{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, координаты которого равны сумме соответствующих координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть

$$\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n).$$

Определение. Произведением вектора $\overline{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ на число k называется вектор $\overline{d}=k\overline{a}=(ka_1,ka_2,\dots,ka_n)$.

Основные свойства линейных операций над векторами:

а) операция сложения коммутативна, т.е. для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

б) операция сложения ассоциативна, т.е. для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

в) для любого вектора $\overline{a}$ выполняется $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

г) для любого вектора $\overline{a}$ существует противоположный вектор $-\overline{a}$, такой, что выполняется $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

д) для любого вектора $\overline{a}$ и любого числа k выполняется $k\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k$;

е) для любого вектора $\overline{a}$ и любых чисел k и l выполняется $(k+l)\cdot\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$;

ж) для любого вектора $\overline{a}$ и любых чисел k и l выполняется $(kl)\cdot\overline{a}=k(l\overline{a})$;

з) для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и любого числа k выполняется $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$;

и) для любого вектора $\overline{a}$ выполняется $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

к) для любого вектора $\overline{a}$ выполняется $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

1.3.2. Определение арифметического линейного пространства

Обозначим через R^n множество всех n-мерных векторов, координаты которых являются действительными числами, то есть

$$R^n = \{\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i = \overline{1,n},\ a_i \in \Re\}$$

Определение. n-мерным арифметическим (векторным) линейным пространством $\Re^n$ называется множество R^n, на котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число.
Обозначение:

$$\Re^n = \{R^n,\ \bar{x} + \bar{y},\ k\bar{x}\}.$$

Далее по умолчанию рассматриваются векторы из линейного пространства $\Re^n$.

1.3.3. Линейная зависимость векторов

Рассмотрим систему векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots,$ $\bar{a}_k$ и действительные числа α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k.

Определение. Любой вектор вида $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots,$ $\bar{a}_k$. Если все действительные коэффициенты α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k равны нулю, то линейная комбинация называется тривиальной. Если среди коэффициентов α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k есть хотя бы один, отличный от нуля, то линейная комбинация называется нетривиальной.

Определение. Система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots,$ $\bar{a}_k$.называется линейно независимой, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору $\bar{0}$.

Определение. Система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots,$ $\bar{a}_k$.называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору $\bar{0}$, то есть найдутся числа α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k, не все равные нулю и такие, что

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0}.$$

Теорема. В пространстве $\Re^n$ любая система, содержащая k векторов, линейно зависима при $k > n$.

1.3.4. Подпространство. Линейная оболочка

Определение. Подмножество $M \subseteq R^n$ называется подпространством пространства $\Re^n$, если оно замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, то есть для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из подмножества M и любого действительного числа k векторы $\bar{x}+\bar{y}$ и $k\bar{x}$ принадлежат подмножеству M. Обозначение:

$$M \subseteq \Re^n .$$

Определение. Линейной оболочкой $L(X)$, порожденной подмножеством $X \subseteq R^n$, называется множество всех линейных комбинаций векторов из X, то есть

$$L(X) = \{\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k) \mid \forall i = \overline{1,k},\ \alpha_i \in \Re,\ \bar{a}_i \in \Re^n\} .$$

Теорема. Линейная оболочка непустого множества является подпространством.

1.3.5. Базис подпространства

Определение. Система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots,$ $\bar{a}_k$.называется базисом подпространства $L \subseteq \Re^n$, если:

1) векторы этой системы линейно независимы;

2) любой вектор $\bar{b} \in L$ линейно выражается через векторы данной системы.

Теорема. Разложение любого вектора в базисе, если оно существует, является единственным.

Теорема. Любые два базиса подпространства имеют одинаковое число векторов.

Определение. Число векторов в базисе подпространства L называется размерностью подпространства и обозначается $\dim L$.

Теорема. Любую линейно независимую систему векторов подпространства можно дополнить до базиса подпространства.

Понятие базиса распространяется и на пространство $\Re^n$, которое является системой, содержащей всю бесконечную совокупность n-мерных векторов.

Теорема. Линейно независимая система векторов в $\Re^n$ является базисом пространства $\Re^n$ тогда и только тогда, когда число векторов этой системы равно n.

1.3.6. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ

Определение. Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если во всех ее уравнениях свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как набор значений неизвестных $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_n = 0$ удовлетворяет всем уравнениям системы. Это решение называется нулевым, или тривиальным.

Теорема. Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа ее неизвестных.

Из данной теоремы вытекает два важных следствия.

Следствие 1. Если число уравнений однородной системы меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет ненулевое решение.

Следствие 2. Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.

Очевидно, что любая линейная комбинация решений однородной системы также является решением этой системы.

Теорема. Множество решений однородной СЛАУ с n неизвестными является подпространством пространства $\mathfrak{R}^n$.

Так как всякая система n-мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, является линейно зависимой, то из множества векторов-решений однородной системы можно выбрать базис, то есть любой вектор-решение данной системы будет линейной комбинацией векторов этого базиса.

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы называется базис пространства ее решений. Иными словами, система решений $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$. однородной СЛАУ называется фундаментальной, если:

1) решения $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ линейно независимы;

2) любое решение однородной системы линейно выражается через систему решений $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы системы однородных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений однородной СЛАУ состоит из $n - r$ решений.

1.3.7. Пересечение и сумма подпространств

Определение. Пересечением $M \bigcap L$ двух линейных подпространств M и L называется множество векторов, принадлежащих и подпространству M, и подпространству L, то есть

$$M \bigcap L = \{\bar{x} \in \Re^n \mid \bar{x} \in M, \bar{x} \in L\}.$$

Теорема. Пересечение подпространств является подпространством.

Определение. Суммой $M + L$ двух линейных подпространств M и L называется множество

$$M + L = \{\bar{x} + \bar{y} \mid \bar{x} \in M, \bar{y} \in L\}.$$

Теорема. Сумма подпространств является подпространством.

Определение. Подмножество X подпространства M называется порождающим множеством (или порождающей совокупностью) для M, если M является линейной оболочкой, порожденной множеством X, то есть $M = L(X)$. Иначе говорят, что множество X порождает подпространство M.

Определение. Порождающая совокупность X называется минимальной порождающей совокупностью подпространства M, если никакое подмножество $Y \subset X$ не порождает подпространство M.

Теорема. Множество $X = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k\}$ является базисом подпространства M тогда и только тогда, когда X является минимальной порождающей совокупностью подпространства M.

Теорема. Размерность суммы двух подпространств равна сумме размерностей подпространств без размерности их пересечения, то есть

$$\dim M + L = \dim M + \dim L - \dim M \bigcap L.$$

2. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Даны вершины треугольника *ABC*. Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

1.1. $A(3,4)$, $B(-1,6)$, $C(1,1)$.

1.2. $A(3,-1)$, $B(-1,0)$, $C(7,3)$.

1.3. $A(3,5)$, $B(5,8)$, $C(2,-2)$.

1.4. $A(2,4)$, $B(1,5)$, $C(-4,9)$.

1.5. $A(9,5)$, $B(-3,7)$, $C(7,8)$.

1.6. $A(0,7)$, $B(-1,5)$, $C(1,6)$.

1.7. $A(5,4)$, $B(-1,-4)$, $C(3,5)$.

1.8. $A(6,1)$, $B(-4,6)$, $C(4,2)$.

1.9. $A(-7,3)$, $B(9,4)$, $C(5,7)$.

1.10. $A(6,-8)$, $B(5,7)$, $C(2,4)$.

1.11. $A(4,5)$, $B(0,-7)$, $C(2,7)$.

1.12. $A(4,4)$, $B(10,-2)$, $C(2,8)$.

1.13. $A(-4,6)$, $B(9,4)$, $C(-2,10)$.

1.14. $A(3,-5)$, $B(8,7)$, $C(5,4)$.

1.15. $A(-9,6)$, $B(-2,-8)$, $C(8,9)$.

1.16. $A(8,2)$, $B(5,-6)$, $C(7,4)$.

1.17. $A(6,6)$, $B(4,9)$, $C(-4,11)$.

1.18. $A(7,2)$, $B(-5,1)$, $C(5,-3)$.

1.19. $A(8,-6)$, $B(5,-5)$, $C(5,-8)$.

1.20. $A(-1,3)$, $B(6,5)$, $C(5,8)$.

1.21. $A(-2,7)$, $B(4,2)$, $C(3,5)$.

1.22. $A(4,2)$, $B(11,2)$, $C(-3,5)$.

1.23. $A(2,-3)$, $B(5,-7)$, $C(-2,7)$.

1.24. $A(5,7)$, $B(-2,5)$, $C(4,10)$.

1.25. $A(4,-5)$, $B(1,9)$, $C(-3,2)$.

1.26. $A(3,-2)$, $B(4,6)$, $C(6,5)$.

1.27. $A(2,6)$, $B(-4,9)$, $C(-5,8)$.

1.28. $A(2,7)$, $B(3,-3)$, $C(-1,9)$.

1.29. $A(2,-1)$, $B(6,-3)$, $C(-2,8)$.

1.30. $A(4,5)$, $B(3,-2)$, $C(-5,6)$.

2. Даны четыре точки *A, B, C* и *D*. Составить уравнения:

а) плоскости *ABC*;

б) прямой *AB*;

в) прямой *DM*, перпендикулярной к плоскости *ABC*;

г) прямой *CN*, параллельной прямой *AB*;

д) плоскости, проходящей через точку *D* перпендикулярно к прямой *AB*.

Вычислить:

е) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;

ж) косинус угла между координатной плоскостью *xOy* и плоскостью *ABC*.

2.1. $A(3,1,4)$, $B(-1,6,1)$, $C(-1,1,6)$, $D(0,4,-1)$.

2.2. $A(3,-1,2)$, $B(-1,0,1)$, $C(1,7,3)$, $D(8,5,8)$.

2.3. $A(3,5,4)$, $B(5,8,3)$, $C(1,2,-2)$, $D(-1,0,2)$.

2.4. $A(2,4,3)$, $B(1,1,5)$, $C(4,9,3)$, $D(3,6,7)$.

2.5. $A(9,5,5)$, $B(-3,7,1)$, $C(5,7,8)$, $D(6,9,2)$.

2.6. $A(0,7,1)$, $B(2,-1,5)$, $C(1,6,3)$, $D(3,-9,8)$.

2.7. $A(5,5,4)$, $B(1,-1,4)$, $C(3,5,1)$, $D(5,8,-1)$.

2.8. $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $C(4,2,0)$, $D(1,2,6)$.

2.9. $A(7,5,3)$, $B(9,4,4)$, $C(4,5,7)$, $D(7,9,6)$.

2.10. $A(6,8,2)$, $B(5,4,7)$, $C(2,4,7)$, $D(7,3,7)$.

2.11. $A(4,2,5)$, $B(0,7,1)$, $C(0,2,7)$, $D(1,5,0)$.

2.12. $A(4,4,10)$, $B(7,10,2)$, $C(2,8,4)$, $D(9,6,9)$.

2.13. $A(4,6,5)$, $B(6,9,4)$, $C(2,10,10)$, $D(7,5,9)$.

2.14. $A(3,5,4)$, $B(8,7,4)$, $C(5,10,4)$, $D(4,7,8)$.

2.15. $A(10,9,6)$, $B(2,8,2)$, $C(9,8,9)$, $D(7,10,3)$.

2.16. $A(1,8,2)$, $B(5,2,6)$, $C(5,7,4)$, $D(4,10,9)$.

2.17. $A(6,6,5)$, $B(4,9,5)$, $C(4,6,11)$, $D(6,9,3)$.

2.18. $A(7,2,2)$, $B(-5,7,-7)$, $C(5,-3,1)$, $D(2,3,7)$.

2.19. $A(8,-6,4)$, $B(10,5,-5)$, $C(5,6,-8)$, $D(8,10,7)$.

2.20. $A(1,-1,3)$, $B(6,5,8)$, $C(3,5,8)$, $D(8,4,1)$.

2.21. $A(1,-2,7)$, $B(4,2,10)$, $C(2,3,5)$, $D(5,3,7)$.

2.22. $A(4,2,10)$, $B(1,2,0)$, $C(3,5,7)$, $D(2,-3,5)$.

2.23. $A(2,3,5)$, $B(5,3,-7)$, $C(1,2,7)$, $D(4,2,0)$.

2.24. $A(5,3,7)$, $B(-2,3,5)$, $C(4,2,10)$, $D(1,2,7)$.

2.25. $A(4,3,5)$, $B(1,9,7)$, $C(0,2,0)$, $D(5,3,10)$.

2.26. $A(3,2,5)$, $B(4,0,6)$, $C(2,6,5)$, $D(6,4,-1)$.

2.27. $A(2,1,6)$, $B(1,4,9)$, $C(2,-5,8)$, $D(5,4,2)$.

2.28. $A(2,1,7)$, $B(3,3,6)$, $C(2,-3,9)$, $D(1,2,5)$.

2.29. $A(2,-1,7)$, $B(6,3,1)$, $C(3,2,8)$, $D(2,-3,7)$.

2.30. $A(0,4,5)$, $B(3,-2,1)$, $C(4,5,6)$, $D(3,3,2)$.

3. Решить следующие задачи

3.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2,7,3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

3.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к нему, если $M_1(1{,}5{,}6)$, $M_2(-1{,}7{,}10)$.

3.3. Найти расстояние от точки $B(2{,}0{,}-1/2)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

3.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2{,}-3{,}5)$ параллельно плоскости xOy.

3.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2{,}5{,}-1)$.

3.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2{,}5{,}-1)$ и $B(-3{,}1{,}3)$ параллельно оси Oy.

3.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3{,}4{,}0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

3.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

3.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3{,}2{,}-5)$.

3.10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6{,}-10{,}1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oz – отрезок $c=2$.

3.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2{,}3{,}-4)$ параллельно двум векторам $\bar{a}=\{4{,}1{,}-1\}$ и $\bar{b}=\{2{,}-1{,}2\}$.

3.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1{,}1{,}0)$ и $B(2{,}-1{,}-1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+2y+3z-7=0$.

3.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-3y+z-1=0$ и $x-y+5z+3=0$.

3.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3{,}-1{,}2)$, $B(2{,}1{,}4)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{5{,}-2{,}-1\}$.

3.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$, если $A(5{,}-2{,}3)$, $B(1{,}-3{,}5)$.

3.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2{,}-3{,}3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

3.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2,3,-4)$, $M_2(-1,2,-3)$.

3.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

3.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,-4,1)$ параллельно плоскости xOz.

3.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(2,-5,2)$.

3.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,2,3)$ и $B(-3,4,-5)$ параллельно оси Oz.

3.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,3,-1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$.

3.23. Найти проекцию точки $M(4,-3,1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$.

3.24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны.

3.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,-3,-4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

3.26. Определить, при каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$.

3.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,3,-1)$ и $B(1,1,4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$.

3.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$.

3.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,3,-5)$, $B(-1,1,-6)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{4,4,3\}$.

3.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

4. Решить следующие задачи.

4.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x-2y+2z-8=0$, $x+6z-6=0$.

4.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

4.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,-3,3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные $60°$, $45°$ и $120°$.

4.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0.\end{cases}$

4.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами в точках $A(3,6,-7)$, $B(-5,1,-4)$, $C(0,2,3)$, проведенной из вершины C.

4.6. Определить, при каком значении n прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z-8=0.\end{cases}$

4.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

4.8. Найти проекцию точки $P(3,1,-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

4.9. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

4.10. Определить, при каком значении A прямая $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ параллельна плоскости $Ax+3y-5z+1=0$.

4.11. Определить, при каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$.

4.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x=2t+5$, $y=-3t+1$, $z=-7t-4$.

4.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0,0,2)$, $B(4,2,5)$, $C(12,6,11)$.

4.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-5,3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

4.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,4)$ перпендикулярно прямым $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$.

4.16. Определить, при каких значениях A и B прямая $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+By+6z-7=0$.

4.17. Доказать, что прямая $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{-8}=\dfrac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

4.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(-3,1,-2)$.

4.19. Доказать, что прямая $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$

4.20. При каком значении D прямая $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+D=0 \end{cases}$ пересекает ось Oz?

4.21. При каком значении p прямые $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=pt-7 \end{cases}$ являются параллельными?

4.22. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$.

4.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-5,3)$ параллельно плоскости xOz.

4.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5,3,2)$.

4.25. При каких значениях B и D прямая $\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+By+z+D=0 \end{cases}$ лежит в плоскости xOy?

4.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,3,3)$ параллельно двум векторам $\overline{a} = \{-1,-3,1\}$ и $\overline{b} = \{4,1,6\}$.

4.27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(3,4,5)$ параллельно оси Ox.

4.28. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,3,1)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

4.29. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,-5,3)$ перпендикулярно к прямым $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ и $x=3t+1$, $y=-t-5$, $z=2t+3$.

4.30. Найти точку, симметричную точке $M(4,3,10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

5. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы.

(A и B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

5.1. а) $b=15$. $F(-10,0)$; б) $a=13$. $\varepsilon=14/13$; в) D: $x=-4$.

5.2. а) $b=2$; $F(4\sqrt{2},0)$ б) $a=7$, $\varepsilon=\sqrt{85}/13$; в) D: $x=5$.

5.3. а) $A(3,0)$, $B(2,\sqrt{5}/3)$; б) $k=3/4$, $\varepsilon=5/4$; в) D: $y=-2$.

5.4. а) $\varepsilon=\sqrt{21}/5$, $A(-5,0)$; б) $A(12,2\sqrt{5})$, $B(-2\sqrt{17},1)$; в) D: $y=1$.

5.5. а) $2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$; б) $k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27,9)$.

5.6. а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/5$; б) $k=3/4$, $2a=16$; в) ось симметрии Ox и $A(4,-8)$.

5.7. а) $a=4$, $F(3,0)$; б) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,0)$; в) D: $x=-2$.

5.8. а) $b=4$, $F(9,0)$; б) $a=5$, $\varepsilon=7/5$; в) D: $x=6$.

5.9. а) $A(0,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3},1)$; б) $k=\sqrt{21}/10$, $\varepsilon=11/10$; в) D: $y=-4$.

5.10. а) $\varepsilon=7/8$, $A(8,0)$; б) $A(\sqrt{80},3)$, $B(4\sqrt{6},3\sqrt{2})$; в) D: $y=4$.

5.11. а) $2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,-7)$.

5.12. а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$; б) $k=12/13$, $2a=26$; в) ось симметрии Ox и $A(-5,15)$.

5.13. а) $a=6$, $F(-4,0)$; б) $b=3$, $F(7,0)$; в) D: $x=-7$.

5.14. а) $b=7$, $F(5,0)$; б) $a=11$, $\varepsilon=12/11$; в) D: $x=10$.

5.15. а) $A(10,\sqrt{11})$, $B(-8,-2\sqrt{5})$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) D: $y=-1$.

5.16. а) $\varepsilon=3/5$, $A(0,8)$; б) $A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1/2)$; в) D: $y=9$.

5.17. а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,5)$.

5.18. а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; б) $k=1/3$, $2a=6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9,6)$.

5.19. а) $a=9$, $F(7,0)$; б) $b=6$, $F(12,0)$; в) D: $x=-1/4$.

5.20. а) $b=5$, $F(-10,0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) D: $x=12$.

5.21. а) $A(0,-2)$, $B(\sqrt{15}/2,1)$; б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$; в) D: $y=5$.

5.22. а) $\varepsilon=2/3$, $A(-6,0)$; б) $A(14,\sqrt{13})$, $B(-20,8)$; в) D: $y=22$.

5.23. а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$; б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$; в) ось симметрии Oy и $A(4,1)$.

5.24. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$; б) $k=5/6$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2,3\sqrt{2})$.

5.25. а) $a=13$, $F(-5,0)$; б) $b=4$, $F(-7,0)$; в) D: $x=-3/8$.

5.26. а) $b=7$, $F(13,0)$; б) $b=4$, $F(-11,0)$; в) D: $x=13$.

5.27. а) $A(-3,0)$, $B(1,\sqrt{40}/3)$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$; в) D: $y=12$.

5.28. а) $\varepsilon=5/6$, $A(0,-\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{32/3},1)$, $B(\sqrt{8},0)$; в) D: $y=-3$.

5.29. а) $2a=30$, $\varepsilon=7/15$; б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$; в) ось симметрии Oy и $A(4,-10)$.

5.30. а) $b = 4\sqrt{2}$, $\varepsilon = 7/9$; б) $k = \sqrt{2}/2$, $2a = 12$; в) ось симметрии Oy и $A(-45,15)$.

6. Исследовать системы векторов $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$ и $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^{4}$ на линейную зависимость. В случае линейной зависимости привести пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору.

6.1. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,-1,-1)$, $\bar{a}_3 = (0,2,2,2)$, $\bar{a}_4 = (-2,2,2,2)$, $\bar{b}_1 = (3,1,1,1)$, $\bar{b}_2 = (0,1,1,-1)$, $\bar{b}_3 = (3,0,0,2)$, $\bar{b}_4 = (3,-1,-1,3)$.

6.2. $\bar{a}_1 = (-1,1,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,3,2)$, $\bar{a}_3 = (3,3,5,5)$, $\bar{a}_4 = (1,2,2,3)$, $\bar{b}_1 = (3,0,4,1)$, $\bar{b}_2 = (1,1,2,1)$, $\bar{b}_3 = (2,-1,2,0)$, $\bar{b}_4 = (-1,2,0,1)$.

6.3. $\bar{a}_1 = (1,2,0,-4)$, $\bar{a}_2 = (2,3,1,0)$, $\bar{a}_3 = (1,3,-1,-12)$, $\bar{a}_4 = (1,0,2,12)$, $\bar{b}_1 = (3,5,1,-4)$, $\bar{b}_2 = (1,0,4,-1)$, $\bar{b}_3 = (2,5,-3,-3)$, $\bar{b}_4 = (3,5,1,-4)$.

6.4. $\bar{a}_1 = (1,0,2,2)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,3,1)$, $\bar{a}_3 = (4,-1,7,5)$, $\bar{a}_4 = (-1,1,-1,1)$, $\bar{b}_1 = (3,-1,5,3)$, $\bar{b}_2 = (0,1,2,-1)$, $\bar{b}_3 = (3,-2,3,4)$, $\bar{b}_4 = (6,-3,8,7)$.

6.5. $\bar{a}_1 = (1,1,0,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (3,1,-2,1)$, $\bar{a}_4 = (4,1,-3,2)$, $\bar{b}_1 = (2,1,-1,0)$, $\bar{b}_2 = (1,2,0,1)$, $\bar{b}_3 = (-3,0,2,1)$, $\bar{b}_4 = (-1,1,1,1)$.

6.6. $\bar{a}_1 = (1,0,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,2,0,-1)$, $\bar{a}_3 = (2,2,-1,1)$, $\bar{a}_4 = (3,2,-2,3)$, $\bar{b}_1 = (1,-2,-2,5)$, $\bar{b}_2 = (0,1,-1,1)$, $\bar{b}_3 = (-1,3,1,-4)$, $\bar{b}_4 = (0,1,-1,1)$.

6.7. $\bar{a}_1 = (0,1,1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,1,0,3)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,2,1)$, $\bar{a}_4 = (-1,0,1,1)$, $\bar{b}_1 = (1,0,-1,1)$, $\bar{b}_2 = (3,1,0,1)$, $\bar{b}_3 = (2,1,1,0)$, $\bar{b}_4 = (1,1,2,-1)$.

6.8. $\bar{a}_1 = (1,1,1,0)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,0,-1)$, $\bar{a}_3 = (2,0,1,-1)$, $\bar{a}_4 = (2,2,2,0)$, $\bar{b}_1 = (0,2,1,1)$, $\bar{b}_2 = (1,0,1,-1)$, $\bar{b}_3 = (1,2,2,0)$, $\bar{b}_4 = (2,-2,1,-3)$.

6.9. $\bar{a}_1 = (1,0,2,4)$, $\bar{a}_2 = (3,2,6,2)$, $\bar{a}_3 = (1,2,2,-6)$, $\bar{a}_4 = (2,2,4,-2)$, $\bar{b}_1 = (2,1,4,3)$, $\bar{b}_2 = (1,3,5,2)$, $\bar{b}_3 = (3,-1,3,4)$, $\bar{b}_4 = (2,-4,-2,2)$.

6.10. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,2,1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,3,2)$, $\bar{a}_4 = (0,-1,1,0)$, $\bar{b}_1 = (1,2,0,1)$, $\bar{b}_2 = (1,2,3,0)$, $\bar{b}_3 = (2,4,3,1)$, $\bar{b}_4 = (0,0,3,-1)$.

6.11. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (0,1,2,0)$, $\bar{a}_4 = (-1,1,3,-1)$, $\bar{b}_1 = (2,1,0,2)$, $\bar{b}_2 = (1,1,-1,2)$, $\bar{b}_3 = (1,0,1,0)$, $\bar{b}_4 = (01,-2,2)$.

6.12. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,2,1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,3,2)$, $\bar{a}_4 = (3,2,4,3)$, $\bar{b}_1 = (3,1,5,3)$, $\bar{b}_2 = (0,1,2,-1)$, $\bar{b}_3 = (3,0,3,4)$, $\bar{b}_4 = (3,-1,1,5)$.

6.13. $\bar{a}_1 = (1,0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,1,0)$, $\bar{a}_3 = (3,2,1,-1)$, $\bar{a}_4 = (1,1,0,-1)$, $\bar{b}_1 = (-1,-1,0,1)$, $\bar{b}_2 = (1,2,0,1)$, $\bar{b}_3 = (1,3,0,3)$, $\bar{b}_4 = (2,4,0,2)$.

6.14. $\bar{a}_1=(1,0,1,2)$, $\bar{a}_2=(2,1,0,2)$, $\bar{a}_3=(1,1,-1,0)$, $\bar{a}_4=(3,1,1,4)$, $\bar{b}_1=(1,0,1,2)$, $\bar{b}_2=(1,1,0,2)$, $\bar{b}_3=(0,1,-1,0)$, $\bar{b}_4=(2,1,1,4)$.

6.15. $\bar{a}_1=(1,2,0,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,0,-1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,0,-2)$, $\bar{a}_4=(-1,1,0,2)$, $\bar{b}_1=(3,3,0,0)$, $\bar{b}_2=(1,2,1,0)$, $\bar{b}_3=(2,1,-1,0)$, $\bar{b}_4=(1,-1,-2,0)$.

6.16. $\bar{a}_1=(1,1,-1,2)$, $\bar{a}_2=(2,0,1,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,2,-1)$, $\bar{a}_4=(4,2,-1,5)$, $\bar{b}_1=(5,1,1,4)$, $\bar{b}_2=(1,0,1,3)$, $\bar{b}_3=(3,2,-2,2)$, $\bar{b}_4=(2,2,3,-1)$.

6.17. $\bar{a}_1=(1,0,1,0)$, $\bar{a}_2=(-1,1,-1,1)$, $\bar{a}_3=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_4=(3,-2,3,-2)$, $\bar{b}_1=(-2,3,-2,3)$, $\bar{b}_2=(0,1,0,1)$, $\bar{b}_3=(2,-1,2,-1)$, $\bar{b}_4=(-2,2,-2,2)$.

6.18. $\bar{a}_1=(1,2,-1,0)$, $\bar{a}_2=(2,3,0,1)$, $\bar{a}_3=(3,5,-1,1)$, $\bar{a}_4=(2,4,-2,0)$, $\bar{b}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,3,-1,0)$, $\bar{b}_3=(2,4,0,1)$, $\bar{b}_4=(3,6,1,1)$.

6.19. $\bar{a}_1=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_2=(-1,2,1,3)$, $\bar{a}_3=(1,2,3,6)$, $\bar{a}_4=(0,4,4,9)$, $\bar{b}_1=(-2,2,0,2)$, $\bar{b}_2=(0,1,1,2)$, $\bar{b}_3=(1,0,2,1)$, $\bar{b}_4=(1,1,3,3)$.

6.20. $\bar{a}_1=(1,1,-1,0)$, $\bar{a}_2=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_3=(2,1,0,1)$, $\bar{a}_4=(3,2,-1,1)$, $\bar{b}_1=(0,1,-2,-1)$, $\bar{b}_2=(1,1,1,3)$, $\bar{b}_3=(1,2,-1,2)$, $\bar{b}_4=(1,0,3,4)$.

6.21. $\bar{a}_1=(1,1,0,2)$, $\bar{a}_2=(0,1,1,1)$, $\bar{a}_3=(2,1,-1,3)$, $\bar{a}_4=(2,2,0,4)$, $\bar{b}_1=(-1,0,1,-1)$, $\bar{b}_2=(1,2,1,3)$, $\bar{b}_3=(0,2,2,2)$, $\bar{b}_4=(1,4,3,5)$.

6.22. $\bar{a}_1=(1,-1,0,2)$, $\bar{a}_2=(0,2,1,1)$, $\bar{a}_3=(2,0,1,5)$, $\bar{a}_4=(1,1,1,3)$, $\bar{b}_1=(1,-3,-1,1)$, $\bar{b}_2=(-1,0,2,1)$, $\bar{b}_3=(0,-3,1,2)$, $\bar{b}_4=(1,-6,0,3)$.

6.23. $\bar{a}_1=(1,0,-1,2)$, $\bar{a}_2=(-1,2,0,3)$, $\bar{a}_3=(0,2,-1,5)$, $\bar{a}_4=(3,-2,-2,1)$, $\bar{b}_1=(-2,2,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,1,-1,0)$, $\bar{b}_3=(0,4,-1,1)$, $\bar{b}_4=(-3,5,1,2)$.

6.24. $\bar{a}_1=(1,0,1,2)$, $\bar{a}_2=(-1,2,2,0)$, $\bar{a}_3=(0,2,3,2)$, $\bar{a}_4=(3,-2,4,4)$, $\bar{b}_1=(2,-2,-1,2)$, $\bar{b}_2=(-1,1,0,-3)$, $\bar{b}_3=(1,-1,-1,-1)$, $\bar{b}_4=(3,-3,-2,1)$.

6.25. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2,-1)$, $\bar{a}_3=(2,1,3,0)$, $\bar{a}_4=(1,2,0,3)$, $\bar{b}_1=(0,1,-1,2)$, $\bar{b}_2=(2,1,0,1)$, $\bar{b}_3=(2,2,-1,3)$, $\bar{b}_4=(2,0,1,-1)$.

6.26. $\bar{a}_1=(1,0,2,3)$, $\bar{a}_2=(0,-1,2,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,4,4)$, $\bar{a}_4=(2,-1,6,7)$, $\bar{b}_1=(-1,-1,0,-2)$, $\bar{b}_2=(2,1,1,0)$, $\bar{b}_3=(1,0,1,-2)$, $\bar{b}_4=(3,2,1,2)$.

6.27. $\bar{a}_1=(1,10,-1)$, $\bar{a}_2=(2,0,2,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,2,2)$, $\bar{a}_4=(1,3,-2,-4)$, $\bar{b}_1=(1,5,-1,-4)$, $\bar{b}_2=(1,3,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,1,3,2)$, $\bar{b}_4=(0,-2,2,3)$.

6.28. $\bar{a}_1=(1,1,-3,-1)$, $\bar{a}_2=(2,1,-4,1)$, $\bar{a}_3=(1,0,-1,2)$, $\bar{a}_4=(0,-1,2,3)$, $\bar{b}_1=(1,-1,1,5)$, $\bar{b}_2=(0,2,1,1)$, $\bar{b}_3=(1,-3,0,4)$, $\bar{b}_4=(1,-5,-1,3)$.

6.29. $\bar{a}_1 = (-1,2,-3,0)$, $\bar{a}_2 = (3,9,-6,2)$, $\bar{a}_3 = (2,11,-9,2)$, $\bar{a}_4 = (4,7,-3,2)$, $\bar{b}_1 = (1,-1,2,0)$, $\bar{b}_2 = (2,4,-2,1)$, $\bar{b}_3 = (0,6,-6,1)$, $\bar{b}_4 = (1,5,-4,1)$.

6.30. $\bar{a}_1 = (1,1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,3,-1)$, $\bar{a}_3 = (-1,0,-1,2)$, $\bar{a}_4 = (0,1,1,3)$, $\bar{b}_1 = (3,2,5,0)$, $\bar{b}_2 = (1,2,3,1)$, $\bar{b}_3 = (4,4,8,1)$, $\bar{b}_4 = (2,0,2,-1)$.

7. Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, $\bar{a}_5$, $\bar{a}_6$, $\bar{a}_7$.

7.1. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (0,1,3,1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,-1,1)$, $\bar{a}_4 = (1,-1,2,0)$, $\bar{a}_5 = (8,3,1,5)$, $\bar{a}_6 = (4,2,1,3)$, $\bar{a}_7 = (2,0,1,1)$.

7.2. $\bar{a}_1 = (1,1,0,1)$, $\bar{a}_2 = (2,0,1,0)$, $\bar{a}_3 = (2,-1,1,0)$, $\bar{a}_4 = (3,-2,2,-1)$, $\bar{a}_5 = (1,0,0,1)$, $\bar{a}_6 = (-1,2,-1,1)$, $\bar{a}_7 = (2,2,0,2)$.

7.3. $\bar{a}_1 = (1,-8,3,5)$, $\bar{a}_2 = (1,-2,3,-1)$, $\bar{a}_3 = (-1,5,-3,-2)$, $\bar{a}_4 = (0,1,-1,-3)$, $\bar{a}_5 = (1,-3,4,-2)$, $\bar{a}_6 = (1,1,3,-4)$, $\bar{a}_7 = (0,3,-3,-9)$.

7.4. $\bar{a}_1 = (-1,3,1,-3)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,1,11)$, $\bar{a}_3 = (1,4,2,0)$, $\bar{a}_4 = (-2,-7,-3,4)$, $\bar{a}_5 = (2,1,1,3)$, $\bar{a}_6 = (3,5,3,3)$, $\bar{a}_7 = (0,1,1,4)$.

7.5. $\bar{a}_1 = (1,0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,-1,-1)$, $\bar{a}_3 = (1,0,-1,1)$, $\bar{a}_4 = (0,1,1,2)$, $\bar{a}_5 = (-1,-1,2,2)$, $\bar{a}_6 = (1,1,0,3)$, $\bar{a}_7 = (-4,-2,2,2)$.

7.6. $\bar{a}_1 = (-1,0,0,1)$, $\bar{a}_2 = (-1,1,0,1)$, $\bar{a}_3 = (1,-1,1,0)$, $\bar{a}_4 = (0,2,3,3)$, $\bar{a}_5 = (1,1,1,0)$, $\bar{a}_6 = (1,-2,-1,-2)$, $\bar{a}_7 = (1,3,2,1)$.

7.7. $\bar{a}_1 = (1,0,1,-4)$, $\bar{a}_2 = (0,1,1,-2)$, $\bar{a}_3 = (1,1,-1,0)$, $\bar{a}_4 = (-1,0,1,0)$, $\bar{a}_5 = (0,1,0,0)$, $\bar{a}_6 = (2,-1,1,-6)$, $\bar{a}_7 = (1,2,0,-2)$.

7.8. $\bar{a}_1 = (1,0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,1,2,2)$, $\bar{a}_3 = (1,-3,0,-1)$, $\bar{a}_4 = (-3,-1,2,1)$, $\bar{a}_5 = (-2,1,-1,0)$, $\bar{a}_6 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_7 = (-1,-1,-2,-3)$.

7.9. $\bar{a}_1 = (1,2,-1,0)$, $\bar{a}_2 = (2,5,-2,0)$, $\bar{a}_3 = (1,3,0,2)$, $\bar{a}_4 = (0,1,1,0)$, $\bar{a}_5 = (-1,0,3,1)$, $\bar{a}_6 = (0,2,2,0)$, $\bar{a}_7 = (-1,-3,0,1)$.

7.10. $\bar{a}_1 = (1,-1,0,-1)$, $\bar{a}_2 = (0,1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,0,-1,1)$, $\bar{a}_4 = (1,1,2,0)$, $\bar{a}_5 = (1,0,1,0)$, $\bar{a}_6 = (0,2,2,2)$, $\bar{a}_7 = (1,0,1,-3)$.

7.11. $\bar{a}_1 = (1,2,0,1)$, $\bar{a}_2 = (4,5,1,1)$, $\bar{a}_3 = (3,1,2,1)$, $\bar{a}_4 = (2,1,1,-1)$, $\bar{a}_5 = (1,-1,1,-2)$, $\bar{a}_6 = (5,2,3,0)$, $\bar{a}_7 = (-5,0,-4,-1)$.

7.12. $\bar{a}_1 = (1,1,2,-1)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,3,1)$, $\bar{a}_3 = (-2,-2,1,1)$, $\bar{a}_4 = (1,-2,1,2)$, $\bar{a}_5 = (-4,-1,-2,0)$, $\bar{a}_6 = (0,0,5,-1)$, $\bar{a}_7 = (-1,-4,-3,4)$.

7.13. $\bar{a}_1=(1,1,0,1)$, $\bar{a}_2=(1,2,1,3)$, $\bar{a}_3=(0,1,5,2)$, $\bar{a}_4=(2,3,1,4)$, $\bar{a}_5=(1,0,7,-1)$, $\bar{a}_6=(2,3,5,4)$, $\bar{a}_7=(4,5,5,6)$.

7.14. $\bar{a}_1=(0,2,1,2)$, $\bar{a}_2=(2,1,0,1)$, $\bar{a}_3=(0,1,-1,1)$, $\bar{a}_4=(1,2,0,1)$, $\bar{a}_5=(0,-2,2,-2)$, $\bar{a}_6=(0,-1,1,-1)$, $\bar{a}_7=(0,1,2,1)$.

7.15. $\bar{a}_1=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,2,2)$, $\bar{a}_3=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_4=(1,2,3,1)$, $\bar{a}_5=(1,0,0,1)$, $\bar{a}_6=(1,2,3,0)$, $\bar{a}_7=(2,1,1,2)$.

7.16. $\bar{a}_1=(1,2,1,-2)$, $\bar{a}_2=(0,1,1,2)$, $\bar{a}_3=(1,-1,4,1)$, $\bar{a}_4=(2,1,2,1)$, $\bar{a}_5=(1,1,0,-4)$, $\bar{a}_6=(1,-3,2,-3)$, $\bar{a}_7=(1,-1,1,3)$.

7.17. $\bar{a}_1=(1,2,3,4)$, $\bar{a}_2=(6,14,15,14)$, $\bar{a}_3=(1,3,2,1)$, $\bar{a}_4=(1,2,4,2)$, $\bar{a}_5=(-1,-3,-2,2)$, $\bar{a}_6=(6,13,20,12)$, $\bar{a}_7=(2,4,6,5)$.

7.18. $\bar{a}_1=(1,2,3,4)$, $\bar{a}_2=(0,1,1,2)$, $\bar{a}_3=(1,3,4,6)$, $\bar{a}_4=(-1,0,-1,0)$, $\bar{a}_5=(2,5,7,10)$, $\bar{a}_6=(0,3,3,6)$, $\bar{a}_7=(-1,-3,-4,-6)$.

7.19. $\bar{a}_1=(1,1,0,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,3,2)$, $\bar{a}_3=(-1,0,2,1)$, $\bar{a}_4=(0,1,0,0)$, $\bar{a}_5=(4,1,-2,2)$, $\bar{a}_6=(5,-3,-6,-5)$, $\bar{a}_7=(0,1,2,2)$.

7.20. $\bar{a}_1=(1,0,2,3)$, $\bar{a}_2=(0,2,5,6)$, $\bar{a}_3=(2,-2,-1,0)$, $\bar{a}_4=(-3,5,7,-9)$, $\bar{a}_5=(2,-2,-1,0)$, $\bar{a}_6=(1,-1,-2,3)$, $\bar{a}_7=(2,3,5,0)$.

7.21. $\bar{a}_1=(3,-1,-2,2)$, $\bar{a}_2=(0,0,6,3)$, $\bar{a}_3=(1,0,3,2)$, $\bar{a}_4=(2,-1,1,3)$, $\bar{a}_5=(2,0,0,1)$, $\bar{a}_6=(3,0,-3,0)$, $\bar{a}_7=(1,-1,-2,1)$.

7.22. $\bar{a}_1=(1,1,5,2)$, $\bar{a}_2=(0,3,1,-4)$, $\bar{a}_3=(2,4,1,0)$, $\bar{a}_4=(3,2,5,6)$, $\bar{a}_5=(6,9,2,4)$, $\bar{a}_6=(1,4,6,-2)$, $\bar{a}_7=(6,-1,18,20)$.

7.23. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2,0)$, $\bar{a}_3=(1,2,3,4)$, $\bar{a}_4=(1,2,0,1)$, $\bar{a}_5=(2,1,3,1)$, $\bar{a}_6=(2,4,3,5)$, $\bar{a}_7=(2,3,4,5)$.

7.24. $\bar{a}_1=(1,-1,3,-2)$, $\bar{a}_2=(-2,0,2,2)$, $\bar{a}_3=(8,-8,2,7)$, $\bar{a}_4=(-7,9,-18,-15)$, $\bar{a}_5=(-7,5,-2,7)$, $\bar{a}_6=(-3,3,2,1)$, $\bar{a}_7=(3,-3,9,7)$.

7.25. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2,3)$, $\bar{a}_3=(1,2,3,3)$, $\bar{a}_4=(1,3,4,2)$, $\bar{a}_5=(1,0,-1,-1)$, $\bar{a}_6=(0,3,2,-1)$, $\bar{a}_7=(0,-1,1,2)$.

7.26. $\bar{a}_1=(1,1,0,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,1,3)$, $\bar{a}_3=(1,0,1,2)$, $\bar{a}_4=(3,1,0,1)$, $\bar{a}_5=(2,3,0,1)$, $\bar{a}_6=(1,2,1,1)$, $\bar{a}_7=(1,1,3,1)$.

7.27. $\bar{a}_1=(0,1,2,3)$, $\bar{a}_2=(1,1,-1,2)$, $\bar{a}_3=(2,1,3,4)$, $\bar{a}_4=(5,1,-1,2)$, $\bar{a}_5=(-2,-2,2,4)$, $\bar{a}_6=(3,2,2,6)$, $\bar{a}_7=(7,3,-3,6)$.

7.28. $\bar{a}_1=(3,-1,-2,2)$, $\bar{a}_2=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_3=(4,0,-1,3)$, $\bar{a}_4=(1,2,0,1)$, $\bar{a}_5=(2,3,1,2)$, $\bar{a}_6=(0,1,-1,0)$, $\bar{a}_7=(3,5,1,3)$.

7.29. $\bar{a}_1 = (1,0,2,-1)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,6,1)$, $\bar{a}_3 = (2,-1,1,2)$, $\bar{a}_4 = (2,0,4,-2)$, $\bar{a}_5 = (0,1,3,-4)$, $\bar{a}_6 = (1,3,4,3)$, $\bar{a}_7 = (-1,1,2,1)$.

7.30. $\bar{a}_1 = (1,0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,2,3,0)$, $\bar{a}_3 = (1,2,3,1)$, $\bar{a}_4 = (2,1,1,2)$, $\bar{a}_5 = (-1,-4,-5,1)$, $\bar{a}_6 = (3,1,2,3)$, $\bar{a}_7 = (3,4,7,3)$.

8. Найти координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$.

8.1. $\bar{a}_1 = (3,1,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,0,2,3)$, $\bar{a}_3 = (2,3,-1,1)$, $\bar{a}_4 = (-1,1,2,-3)$, $\bar{b} = (1,2,5,-6)$.

8.2. $\bar{a}_1 = (2,1,3,1)$, $\bar{a}_2 = (2,2,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,-2,2,-3)$, $\bar{a}_4 = (-1,1,-2,2)$, $\bar{b} = (-1,2,0,2)$.

8.3. $\bar{a}_1 = (0,2,3,4)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,1,3)$, $\bar{a}_3 = (-1,3,-2,0)$, $\bar{a}_4 = (-5,-1,2,1)$, $\bar{b} = (2,6,7,5)$.

8.4. $\bar{a}_1 = (1,1,2,4)$, $\bar{a}_2 = (2,5,1,3)$, $\bar{a}_3 = (1,4,-1,-2)$, $\bar{a}_4 = (3,-1,2,1)$, $\bar{b} = (2,-5,3,1)$.

8.5. $\bar{a}_1 = (1,1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (0,2,-1,5)$, $\bar{a}_3 = (3,-2,3,4)$, $\bar{a}_4 = (1,1,-2,-1)$, $\bar{b} = (3,0,6,11)$.

8.6. $\bar{a}_1 = (-2,2,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (4,2,2,0)$, $\bar{a}_3 = (1,-3,1,2)$, $\bar{a}_4 = (-1,1,2,-3)$, $\bar{b} = (2,14,0,-2)$.

8.7. $\bar{a}_1 = (1,3,-2,-2)$, $\bar{a}_2 = (-2,1,1,3)$, $\bar{a}_3 = (2,4,0,-1)$, $\bar{a}_4 = (1,-2,-3,3)$, $\bar{b} = (1,13,0,2)$.

8.8. $\bar{a}_1 = (2,1,2,-3)$, $\bar{a}_2 = (1,-2,-1,6)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,1,4)$, $\bar{a}_4 = (2,2,0,-3)$, $\bar{b} = (0,0,-2,10)$.

8.9. $\bar{a}_1 = (1,1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (9,2,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (6,-2,1,-3)$, $\bar{a}_4 = (-3,1,-1,-2)$, $\bar{b} = (7,3,8,-1)$.

8.10. $\bar{a}_1 = (2,2,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,2,6)$, $\bar{a}_3 = (-2,0,-1,3)$, $\bar{a}_4 = (1,1,2,-2)$, $\bar{b} = (9,6,7,7)$.

8.11. $\bar{a}_1 = (1,2,-2,3)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,4,-3)$, $\bar{a}_3 = (1,1,1,2)$, $\bar{a}_4 = (-1,0,-1,2)$, $\bar{b} = (-2,3,-8,2)$.

8.12. $\bar{a}_1 = (2,1,1,-2)$, $\bar{a}_2 = (1,2,2,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,-2,0,1)$, $\bar{a}_4 = (2,1,-3,-3)$, $\bar{b} = (7,2,-6,-8)$.

8.13. $\bar{a}_1 = (3,-2,3,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,1,1,0)$, $\bar{a}_3 = (4,-2,-2,1)$, $\bar{a}_4 = (-1,-2,1,-3)$, $\bar{b} = (10,-4,8,5)$.

8.14. $\bar{a}_1=(2,-3,1,2)$, $\bar{a}_2=(-3,-6,-2,1)$, $\bar{a}_3=(1,4,2,-2)$, $\bar{a}_4=(-2,-3,1,4)$, $\bar{b}=(9,7,9,4)$.

8.15. $\bar{a}_1=(1,2,2,1)$, $\bar{a}_2=(-2,-1,2,2)$, $\bar{a}_3=(1,1,-3,-1)$, $\bar{a}_4=(2,-1,1,2)$, $\bar{b}=(-2,3,0,0)$.

8.16. $\bar{a}_1=(2,1,1,-2)$, $\bar{a}_2=(5,0,3,3)$, $\bar{a}_3=(6,-3,-1,-1)$, $\bar{a}_4=(-1,1,2,3)$, $\bar{b}=(2,8,10,4)$.

8.17. $\bar{a}_1=(2,2,1,1)$, $\bar{a}_2=(-3,1,0,4)$, $\bar{a}_3=(-2,4,3,4)$, $\bar{a}_4=(0,-2,-2,-1)$, $\bar{b}=(2,-8,-8,-3)$.

8.18. $\bar{a}_1=(1,2,3,2)$, $\bar{a}_2=(3,3,-1,1)$, $\bar{a}_3=(2,-2,4,0)$, $\bar{a}_4=(-3,-1,-2,-5)$, $\bar{b}=(-4,1,-11,-15)$.

8.19. $\bar{a}_1=(2,-1,1,-1)$, $\bar{a}_2=(4,2,2,1)$, $\bar{a}_3=(-1,2,1,2)$, $\bar{a}_4=(2,2,2,4)$, $\bar{b}=(-11,-5,-4,-2)$.

8.20. $\bar{a}_1=(3,1,2,1)$, $\bar{a}_2=(1,1,-2,3)$, $\bar{a}_3=(2,-1,1,2)$, $\bar{a}_4=(-2,2,-1,4)$, $\bar{b}=(5,-3,5,9)$.

8.21. $\bar{a}_1=(1,2,3,2)$, $\bar{a}_2=(2,1,-2,-3)$, $\bar{a}_3=(1,-1,4,1)$, $\bar{a}_4=(-1,2,-1,-2)$, $\bar{b}=(0,5,5,-1)$.

8.22. $\bar{a}_1=(1,2,2,1)$, $\bar{a}_2=(-2,5,-3,9)$, $\bar{a}_3=(1,6,-2,6)$, $\bar{a}_4=(2,-1,0,-3)$, $\bar{b}=(-1,11,-4,16)$.

8.23. $\bar{a}_1=(2,3,2,1)$, $\bar{a}_2=(4,-1,-1,2)$, $\bar{a}_3=(-1,2,1,-2)$, $\bar{a}_4=(6,-2,0,1)$, $\bar{b}=(1,12,8,-1)$.

8.24. $\bar{a}_1=(-2,-3,1,2)$, $\bar{a}_2=(1,6,0,-1)$, $\bar{a}_3=(-2,4,-3,1)$, $\bar{a}_4=(-2,-3,1,-1)$, $\bar{b}=(-12,-11,2,5)$.

8.25. $\bar{a}_1=(2,2,-1,1)$, $\bar{a}_2=(1,3,2,1)$, $\bar{a}_3=(4,2,2,-3)$, $\bar{a}_4=(-2,-1,2,-2)$, $\bar{b}=(1,10,4,6)$.

8.26. $\bar{a}_1=(-2,1,3,1)$, $\bar{a}_2=(4,2,1,-2)$, $\bar{a}_3=(1,0,-2,2)$, $\bar{a}_4=(-1,-3,1,1)$, $\bar{b}=(3,3,2,1)$.

8.27. $\bar{a}_1=(2,1,1,3)$, $\bar{a}_2=(2,0,3,1)$, $\bar{a}_3=(-3,3,-1,4)$, $\bar{a}_4=(1,-2,2,-2)$, $\bar{b}=(11,-6,12,-3)$.

8.28. $\bar{a}_1=(-1,2,3,-2)$, $\bar{a}_2=(2,-1,-3,1)$, $\bar{a}_3=(1,5,2,0)$, $\bar{a}_4=(2,1,2,-3)$, $\bar{b}=(-7,1,10,-6)$.

8.29. $\bar{a}_1 = (1,2,1,-2)$, $\bar{a}_2 = (0,1,2,3)$, $\bar{a}_3 = (1,-2,-1,-1)$, $\bar{a}_4 = (-3,4,2,3)$, $\bar{b} = (0,-10,-5,2)$.

9. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Записать общее решение однородной СЛАУ.

9.1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -9x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9.8. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

9.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -4x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9.12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9.13. $\begin{cases} -4x_1+3x_2+6x_3-6x_4=0, \\ -x_1+x_2-2x_3+2x_4=0, \\ -3x_1+2x_2+8x_3-8x_4=0, \\ -2x_1+2x_2-4x_3+4x_4=0. \end{cases}$

9.14. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4=0, \\ 7x_1+9x_2+11x_3+13x_4=0. \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ -3x_1-6x_2-9x_3-2x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

9.16. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+4x_3+7x_4=0, \\ -3x_1-2x_2-x_3-6x_4=0, \\ x_1+3x_2+15x_3-7x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+17x_3=0. \end{cases}$

9.17. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

9.18. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3+4x_4=0, \\ x_1+x_2+4x_3+x_4=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3+2x_4=0. \end{cases}$

9.19. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+9x_3-3x_4=0, \\ -x_1+x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+7x_3-x_4=0, \\ 2x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

9.20. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0. \end{cases}$

9.21. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

9.22. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3-7x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-4x_4=0, \\ -x_1+3x_2-5x_3-x_4=0. \end{cases}$

9.23. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=0, \\ -x_1+x_2-2x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-2x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$

9.24. $\begin{cases} 2x_2-3x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ -2x_1+2x_2-4x_3+2x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

9.25. $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 6x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-2x_3=0, \\ -3x_1+7x_2-2x_4=0. \end{cases}$

9.26. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3-x_4=0, \\ -x_1+3x_2-2x_3-3x_4=0. \end{cases}$

9.27. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9.28. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

9.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

9.30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

10. Записать общее решение неоднородной СЛАУ через фундаментальную систему решений соответствующей однородной СЛАУ.

10.1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8x_4 + x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 - 13x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_5 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 5, \\ 5x_1 + 5x_3 - 2x_4 = -8. \end{cases}$

10.5. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - x_5 = -1, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$

10.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

10.8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_5 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

10.9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

10.10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

10.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 6x_5 = -4. \end{cases}$

10.12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

10.13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_1 - 5x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 1. \end{cases}$

10.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

10.15. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

10.16. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$

10.17. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$

10.18. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

10.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

10.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

10.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + 4x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -5. \end{cases}$

10.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$

10.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

10.24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 4. \end{cases}$

10.25. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

10.26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

10.27. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$

10.28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$

10.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$

10.30. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 2. \end{cases}$

11. Даны подпространства $M = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$ и $L = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4)$. Найти базисы суммы и пересечения подпространств *M* и *L*. Определить размерности $M + L$ и $M \cap L$.

11.1. $\bar{a}_1 = (1,1,0,2)$, $\bar{a}_2 = (0,1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,-1,3)$, $\bar{a}_4 = (2,2,0,4)$, $\bar{b}_1 = (-1,0,1,-1)$, $\bar{b}_2 = (1,2,1,3)$, $\bar{b}_3 = (0,2,2,2)$, $\bar{b}_4 = (1,4,3,5)$.

11.2. $\bar{a}_1 = (1,-1,0,2)$, $\bar{a}_2 = (0,2,1,1)$, $\bar{a}_3 = (2,0,1,5)$, $\bar{a}_4 = (1,1,1,3)$, $\bar{b}_1 = (1,-3,-1,1)$, $\bar{b}_2 = (-1,0,2,1)$, $\bar{b}_3 = (0,-3,1,2)$, $\bar{b}_4 = (1,-6,0,3)$.

11.3. $\bar{a}_1 = (1,0,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,0,3)$, $\bar{a}_3 = (0,2,-1,5)$, $\bar{a}_4 = (3,-2,-2,1)$, $\bar{b}_1 = (-2,2,1,1)$, $\bar{b}_2 = (1,1,-1,0)$, $\bar{b}_3 = (0,4,-1,1)$, $\bar{b}_4 = (-3,5,1,2)$.

11.4. $\bar{a}_1 = (1,0,1,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,2,0)$, $\bar{a}_3 = (0,2,3,2)$, $\bar{a}_4 = (3,-2,4,4)$, $\bar{b}_1 = (2,-2,-1,2)$, $\bar{b}_2 = (-1,1,0,-3)$, $\bar{b}_3 = (1,-1,-1,-1)$, $\bar{b}_4 = (3,-3,-2,1)$.

11.5. $\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0,2,-1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,3,0)$, $\bar{a}_4 = (1,2,0,3)$, $\bar{b}_1 = (0,1,-1,2)$, $\bar{b}_2 = (2,1,0,1)$, $\bar{b}_3 = (2,2,-1,3)$, $\bar{b}_4 = (2,0,1,-1)$.

11.6. $\bar{a}_1=(1,0,2,3)$, $\bar{a}_2=(0,-1,2,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,4,4)$, $\bar{a}_4=(2,-1,6,7)$, $\bar{b}_1=(-1,-1,0,-2)$, $\bar{b}_2=(2,1,1,0)$, $\bar{b}_3=(1,0,1,-2)$, $\bar{b}_4=(3,2,1,2)$.

11.7. $\bar{a}_1=(1,10,-1)$, $\bar{a}_2=(2,0,2,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,2,2)$, $\bar{a}_4=(1,3,-2,-4)$, $\bar{b}_1=(1,5,-1,-4)$, $\bar{b}_2=(1,3,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,1,3,2)$, $\bar{b}_4=(0,-2,2,3)$.

11.8. $\bar{a}_1=(1,1,-3,-1)$, $\bar{a}_2=(2,1,-4,1)$, $\bar{a}_3=(1,0,-1,2)$, $\bar{a}_4=(0,-1,2,3)$, $\bar{b}_1=(1,-1,1,5)$, $\bar{b}_2=(0,2,1,1)$, $\bar{b}_3=(1,-3,0,4)$, $\bar{b}_4=(1,-5,-1,3)$.

11.9. $\bar{a}_1=(-1,2,-3,0)$, $\bar{a}_2=(3,9,-6,2)$, $\bar{a}_3=(2,11,-9,2)$, $\bar{a}_4=(4,7,-3,2)$, $\bar{b}_1=(1,-1,2,0)$, $\bar{b}_2=(2,4,-2,1)$, $\bar{b}_3=(0,6,-6,1)$, $\bar{b}_4=(1,5,-4,1)$.

11.10. $\bar{a}_1=(1,1,2,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,3,-1)$, $\bar{a}_3=(-1,0,-1,2)$, $\bar{a}_4=(0,1,1,3)$, $\bar{b}_1=(3,2,5,0)$, $\bar{b}_2=(1,2,3,1)$, $\bar{b}_3=(4,4,8,1)$, $\bar{b}_4=(2,0,2,-1)$.

11.11. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,-1,-1,-1)$, $\bar{a}_3=(0,2,2,2)$, $\bar{a}_4=(-2,2,2,2)$, $\bar{b}_1=(3,1,1,1)$, $\bar{b}_2=(0,1,1,-1)$, $\bar{b}_3=(3,0,0,2)$, $\bar{b}_4=(3,-1,-1,3)$.

11.12. $\bar{a}_1=(-1,1,-1,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,3,2)$, $\bar{a}_3=(3,3,5,5)$, $\bar{a}_4=(1,2,2,3)$, $\bar{b}_1=(3,0,4,1)$, $\bar{b}_2=(1,1,2,1)$, $\bar{b}_3=(2,-1,2,0)$, $\bar{b}_4=(-1,2,0,1)$.

11.13. $\bar{a}_1=(1,2,0,-4)$, $\bar{a}_2=(2,3,1,0)$, $\bar{a}_3=(1,3,-1,-12)$, $\bar{a}_4=(1,0,2,12)$, $\bar{b}_1=(3,5,1,-4)$, $\bar{b}_2=(1,0,4,-1)$, $\bar{b}_3=(2,5,-3,-3)$, $\bar{b}_4=(3,5,1,-4)$.

11.14. $\bar{a}_1=(1,0,2,2)$, $\bar{a}_2=(2,-1,3,1)$, $\bar{a}_3=(4,-1,7,5)$, $\bar{a}_4=(-1,1,-1,1)$, $\bar{b}_1=(3,-1,5,3)$, $\bar{b}_2=(0,1,2,-1)$, $\bar{b}_3=(3,-2,3,4)$, $\bar{b}_4=(6,-3,8,7)$.

11.15. $\bar{a}_1=(1,1,0,-1)$, $\bar{a}_2=(1,0,-1,1)$, $\bar{a}_3=(3,1,-2,1)$, $\bar{a}_4=(4,1,-3,2)$, $\bar{b}_1=(2,1,-1,0)$, $\bar{b}_2=(1,2,0,1)$, $\bar{b}_3=(-3,0,2,1)$, $\bar{b}_4=(-1,1,1,1)$.

11.16. $\bar{a}_1=(1,0,-1,2)$, $\bar{a}_2=(1,2,0,-1)$, $\bar{a}_3=(2,2,-1,1)$, $\bar{a}_4=(3,2,-2,3)$, $\bar{b}_1=(1,-2,-2,5)$, $\bar{b}_2=(0,1,-1,1)$, $\bar{b}_3=(-1,3,1,-4)$, $\bar{b}_4=(0,1,-1,1)$.

11.17. $\bar{a}_1=(0,1,1,2)$, $\bar{a}_2=(1,1,0,3)$, $\bar{a}_3=(-1,1,2,1)$, $\bar{a}_4=(-1,0,1,1)$, $\bar{b}_1=(1,0,-1,1)$, $\bar{b}_2=(3,1,0,1)$, $\bar{b}_3=(2,1,1,0)$, $\bar{b}_4=(1,1,2,-1)$.

11.18. $\bar{a}_1=(1,1,1,0)$, $\bar{a}_2=(1,-1,0,-1)$, $\bar{a}_3=(2,0,1,-1)$, $\bar{a}_4=(2,2,2,0)$, $\bar{b}_1=(0,2,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,0,1,-1)$, $\bar{b}_3=(1,2,2,0)$, $\bar{b}_4=(2,-2,1,-3)$.

11.19. $\bar{a}_1=(1,0,2,4)$, $\bar{a}_2=(3,2,6,2)$, $\bar{a}_3=(1,2,2,-6)$, $\bar{a}_4=(2,2,4,-2)$, $\bar{b}_1=(2,1,4,3)$, $\bar{b}_2=(1,3,5,2)$, $\bar{b}_3=(3,-1,3,4)$, $\bar{b}_4=(2,-4,-2,2)$.

11.20. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2,1)$, $\bar{a}_3=(2,1,3,2)$, $\bar{a}_4=(0,-1,1,0)$, $\bar{b}_1=(1,2,0,1)$, $\bar{b}_2=(1,2,3,0)$, $\bar{b}_3=(2,4,3,1)$, $\bar{b}_4=(0,0,3,-1)$.

11.21. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,-1,1)$, $\bar{a}_3=(0,1,2,0)$, $\bar{a}_4=(-1,1,3,-1)$, $\bar{b}_1=(2,1,0,2)$, $\bar{b}_2=(1,1,-1,2)$, $\bar{b}_3=(1,0,1,0)$, $\bar{b}_4=(01,-2,2)$.

11.22. $\bar{a}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_2=(1,0,2,1)$, $\bar{a}_3=(2,1,3,2)$, $\bar{a}_4=(3,2,4,3)$, $\bar{b}_1=(3,1,5,3)$, $\bar{b}_2=(0,1,2,-1)$, $\bar{b}_3=(3,0,3,4)$, $\bar{b}_4=(3,-1,1,5)$.

11.23. $\bar{a}_1=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,1,0)$, $\bar{a}_3=(3,2,1,-1)$, $\bar{a}_4=(1,1,0,-1)$, $\bar{b}_1=(-1,-1,0,1)$, $\bar{b}_2=(1,2,0,1)$, $\bar{b}_3=(1,3,0,3)$, $\bar{b}_4=(2,4,0,2)$.

11.24. $\bar{a}_1=(1,0,1,2)$, $\bar{a}_2=(2,1,0,2)$, $\bar{a}_3=(1,1,-1,0)$, $\bar{a}_4=(3,1,1,4)$, $\bar{b}_1=(1,0,1,2)$, $\bar{b}_2=(1,1,0,2)$, $\bar{b}_3=(0,1,-1,0)$, $\bar{b}_4=(2,1,1,4)$.

11.25. $\bar{a}_1=(1,2,0,1)$, $\bar{a}_2=(2,1,0,-1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,0,-2)$, $\bar{a}_4=(-1,1,0,2)$, $\bar{b}_1=(3,3,0,0)$, $\bar{b}_2=(1,2,1,0)$, $\bar{b}_3=(2,1,-1,0)$, $\bar{b}_4=(1,-1,-2,0)$.

11.26. $\bar{a}_1=(1,1,-1,2)$, $\bar{a}_2=(2,0,1,1)$, $\bar{a}_3=(1,-1,2,-1)$, $\bar{a}_4=(4,2,-1,5)$, $\bar{b}_1=(5,1,1,4)$, $\bar{b}_2=(1,0,1,3)$, $\bar{b}_3=(3,2,-2,2)$, $\bar{b}_4=(2,2,3,-1)$.

11.27. $\bar{a}_1=(1,0,1,0)$, $\bar{a}_2=(-1,1,-1,1)$, $\bar{a}_3=(1,1,1,1)$, $\bar{a}_4=(3,-2,3,-2)$, $\bar{b}_1=(-2,3,-2,3)$, $\bar{b}_2=(0,1,0,1)$, $\bar{b}_3=(2,-1,2,-1)$, $\bar{b}_4=(-2,2,-2,2)$.

11.28. $\bar{a}_1=(1,2,-1,0)$, $\bar{a}_2=(2,3,0,1)$, $\bar{a}_3=(3,5,-1,1)$, $\bar{a}_4=(2,4,-2,0)$, $\bar{b}_1=(1,1,1,1)$, $\bar{b}_2=(1,3,-1,0)$, $\bar{b}_3=(2,4,0,1)$, $\bar{b}_4=(3,6,1,1)$.

11.29. $\bar{a}_1=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_2=(-1,2,1,3)$, $\bar{a}_3=(1,2,3,6)$, $\bar{a}_4=(0,4,4,9)$, $\bar{b}_1=(-2,2,0,2)$, $\bar{b}_2=(0,1,1,2)$, $\bar{b}_3=(1,0,2,1)$, $\bar{b}_4=(1,1,3,3)$.

11.30. $\bar{a}_1=(1,1,-1,0)$, $\bar{a}_2=(1,0,1,1)$, $\bar{a}_3=(2,1,0,1)$, $\bar{a}_4=(3,2,-1,1)$, $\bar{b}_1=(0,1,-2,-1)$, $\bar{b}_2=(1,1,1,3)$, $\bar{b}_3=(1,2,-1,2)$, $\bar{b}_4=(1,0,3,4)$.

3. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(4,3)$, $B(-3,-3)$, $C(2,7)$.
Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение.

а) Уравнение стороны *AB* составим, используя уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4) = 7(y-3) \text{ или } 6x - 7y - 3 = 0.$$

б) Из уравнения стороны *AB*, составленного в предыдущем пункте, запишем уравнение с угловым коэффициентом по формуле:

$$y = kx + b,$$

$$y = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7},$$

откуда угловой коэффициент прямой *AB* равен $k_1 = \frac{6}{7}$.

С учетом условия перпендикулярности прямых *AB* и *CH* их угловые коэффициенты связаны соотношением

$$k_1 k_2 = -1,$$

то есть угловой коэффициент прямой *CH* равен $k_2 = -\frac{7}{6}$.

Уравнение прямой по точке $M_0(x_0, y_0)$ и угловому коэффициенту *k* имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

следовательно, уравнением высоты *CH* является

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y-56=0\,.$$

в) Найдем координаты *x* и *y* середины *M* отрезка *BC* по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\,,\; y=\frac{y_1+y_2}{2}\,,$$

$$x=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}\,,\; y=\frac{-3+7}{2}=2\,.$$

Теперь по двум точкам *A* и *M* составим уравнение медианы *AM*:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0\,.$$

г) Для нахождения координат точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH* составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-9y+19=0, \\ 7x+6y-56=0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $N(26/5, 49/15)$.

д) Так как прямая, проходящая через вершину *C*, параллельна стороне *AB*, то их угловые коэффициенты равны $k_1=\frac{6}{7}$. По точке *C* и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой *CH*:

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \text{ или } 6x-7y+37=0\,.$$

е) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, вычисляется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,$$

то есть расстояние от точки *C* до прямой *AB* равно

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4\,.$$

2. Даны четыре точки $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$, $C(2,4,9)$, $D(1,8,9)$. Составить уравнения:

а) плоскости *ABC*;

б) прямой *AB*;

в) прямой *DM*, перпендикулярной к плоскости *ABC*;

г) прямой *CN*, параллельной прямой *AB*;

д) плоскости, проходящей через точку *D* перпендикулярно к прямой *AB*.

Вычислить:

е) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;

ж) косинус угла между координатной плоскостью *xOy* и плоскостью *ABC*.

Решение.

а) По трем точкам $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ составим уравнение плоскости *ABC*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 & z - 8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$6x - 7y - 9z + 97 = 0.$$

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

уравнения прямой *AB* можно записать в виде:

$$\frac{x - 4}{-5} = \frac{y - 7}{6} = \frac{z - 8}{-8}.$$

в) Из условия перпендикулярности прямой *DM* и плоскости *ABC* следует, что в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой можно взять нормальный вектор $\bar{n} = \{6, -7, -9\}$ плоскости *ABC*. Тогда канонические уравнения прямой *DM* запишутся в виде:

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 8}{-7} = \frac{z - 9}{-9}.$$

г) Так как прямая *CN* параллельна прямой *AB*, то их направляющие векторы $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ можно считать совпадающими:

$$\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \{-5, 6, -8\}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой *CN* имеют вид

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-9}{-8}.$$

д) Из условия перпендикулярности плоскости, проходящей через точку *D*, и прямой *AB* следует, что в качестве нормального вектора $\bar{n}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s}=\{-5,6,-8\}$ прямой *AB*. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку *D*, запишется в виде:

$$-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0$$

или

$$5x-6y+8z-29=0.$$

е) Используя уравнения прямой *AD*: $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-8}{1}$ и плоскости *ABC*: $6x-7y-9z+97=0$, вычислим синус угла между ними:

$$\sin\varphi=\frac{|6\cdot(-3)-7\cdot 1-9\cdot 1|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=\frac{|-34|}{\sqrt{166}\cdot\sqrt{11}}\approx 0{,}8.$$

ж) Вычислим косинус угла между координатной плоскостью *xOy*, заданной уравнением $z=0$, и плоскостью *ABC*:

$$\cos\varphi=\frac{0\cdot 6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}}=\frac{-9}{\sqrt{166}}\approx -0{,}7.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4,3,1)$ и $N(-2,0,-1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1,1,-1)$ и $B(-3,1,0)$.

Решение.

Найдем координаты векторов $\overline{MN}$ и $\overline{AB}$:

$\overline{MN}=\{-6,-3,-2\}$, $\overline{AB}=\{-4,0,1\}$.

Найденные векторы не являются коллинеарными, но лежат в параллельных плоскостях, поэтому в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять векторное произведение векторов $\overline{MN}$ и $\overline{AB}$:

$$\bar{n}=\overline{MN}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -6 & -3 & -2\\ -4 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3\bar{i}+14\bar{j}-12\bar{k}.$$

Запишем уравнение плоскости по точке $M(4,3,1)$, принадлежащей плоскости, и нормальному вектору $\bar{n}$:

$$-3(x-4)+14(y-3)-12(z-1)=0,$$

откуда

$$-3x+14y-12z-18=0.$$

4. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2, симметричной точке $M_1(6,-4,-2)$ относительно плоскости $x+y+z-3=0$.

Решение.

Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости:

$$x=6+t,\ y=-4+t,\ z=-2+t.$$

Подставив эти выражения в уравнение плоскости, получим уравнение относительно параметра t, решив которое, найдем значение $t=1$. Следовательно, прямая M_1M_2 пересекает данную плоскость в точке $M(7,-3,-1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2, то верны следующие равенства:

$$7=\frac{6+x_2}{2},\ -3=\frac{-4+y_2}{2},\ -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

из которых находим координаты точки M_2:

$$x_2=8,\ y_2=-2,\ z_2=0.$$

5. Составить канонические уравнения:

а) эллипса, если $F(-14,0)$ – фокус, $a=16$ – большая полуось;

б) гиперболы, если $A(-4,0)$ – точка, принадлежащая кривой, $y=\frac{5}{8}x$ – уравнение асимптоты;

в) параболы, директриса которой имеет уравнение $y=-10$.

Решение.

а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – большая полуось, b – малая полуось.

Учитывая, что $F(-14{,}0)$ – фокус, а половина фокусного расстояния c вычисляется по формуле:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\ ,$$

находим значение малой полуоси:

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16^2-14^2}=\sqrt{256-196}=\sqrt{60}\ .$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{16^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{60})^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{60}=1.$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

Так как ордината точки $A(-4{,}0)$ равна нулю, то A является вершиной гиперболы, откуда действительная полуось $a=4$.

Из уравнения асимптоты гиперболы

$$y=\frac{5}{8}x$$

имеем

$$\frac{b}{a}=\frac{5}{8},$$

откуда находим мнимую полуось

$$b=\frac{5}{8}a=\frac{5}{8}\cdot 4=\frac{5}{2}=2{,}5\ .$$

Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{6{,}25}=1\ .$$

в) Каноническое уравнение параболы с учетом данного уравнения директрисы имеет вид:

$$x^2=2py\ .$$

Директриса искомой параболы определяется уравнением:

$$y = -\frac{p}{2},$$

значит,

$$-\frac{p}{2} = -10,$$

откуда параметр параболы $p = 20$.

Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$x^2 = 2 \cdot 20y \text{ или } x^2 = 40y.$$

6. Исследовать системы векторов $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^4$ и $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^4$ на линейную зависимость, если $\bar{a}_1 = (1,3,-8,-1)$, $\bar{a}_2 = (0,1,2,1)$, $\bar{a}_3 = (1,4,-6,0)$, $\bar{a}_4 = (1,5,-4,1)$, $\bar{b}_1 = (1,1,-3,1)$, $\bar{b}_2 = (1,-1,2,3)$, $\bar{b}_3 = (2,0,-1,4)$, $\bar{b}_4 = (0,2,-5,-2)$. В случае линейной зависимости привести пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору.

Решение.

а) Исследуем на линейную зависимость систему векторов $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^4$. Составим матрицу, строки которой состоят из координат векторов и их обозначений. Применяя элементарные преобразования строк к обеим частям матрицы, вычислим ее ранг.

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 1 & 4 & -6 & 0 & \bar{a}_3 \\ 1 & 5 & -4 & 1 & \bar{a}_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \bar{a}_4 - \bar{a}_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3 - \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_4 - \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 \end{array}\right).$$

Левая часть матрицы содержит две ненулевые строки, значит, ее ранг равен 2. Следовательно, векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ образуют линейно зависимую систему. Чтобы привести пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору, достаточно записать одно из соотношений, соответствующих нулевым строкам матрицы:

$$-\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4 = \bar{0},$$

$$-\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_4 = \bar{0}.$$

б) Для системы векторов $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^{4}$ рассмотрим другой способ исследования на линейную зависимость. Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому вектору:

$$x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + x_3\bar{b}_3 + x_4\bar{b}_4 = \bar{0}\ .$$

Заменим векторы их координатами:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\4\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\2\\-5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

и перейдем к однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение системы найдем методом Жордана-Гаусса с помощью элементарных преобразований строк матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы меньше числа векторов, то система векторов $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^{4}$ является линейно зависимой.

В качестве базисного минора возьмем ненулевой определитель второго порядка, образованный коэффициентами при неизвестных x_1, x_2. Перейдем к системе уравнений, оставляя в левых частях уравнений базисные переменные x_1, x_2, а в правые части перенося свободные переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_3, \\ x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4, \\ x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Чтобы привести пример нетривиальной линейной комбинации данных векторов, равной нулевому вектору, необходимо найти некоторое частное решение данной системы:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,$$

в соответствии с которым запишем следующую линейную комбинацию:

$$-1 \cdot \bar{b}_1 + 1 \cdot \bar{b}_2 + 0 \cdot \bar{b}_3 + 1 \cdot \bar{b}_4 = \bar{0}.$$

7. Найти базис и размерность линейной оболочки *L*, порожденной системой векторов $\bar{a}_1 = (1,0,2,0)$**,** $\bar{a}_2 = (1,2,3,-1)$**,** $\bar{a}_3 = (1,2,-3,0)$**,** $\bar{a}_4 = (3,2,1,0)$**,** $\bar{a}_5 = (3,0,0,1)$**,** $\bar{a}_6 = (5,2,5,0)$**,** $\bar{a}_7 = (0,2,1,-1)$**.**

Решение.

Для отыскания базиса линейной оболочки среди данных векторов необходимо найти максимально линейно независимую систему.

Запишем матрицу, состоящую из координат векторов и их обозначений. Применяя элементарные преобразования строк к обеим частям матрицы, вычислим ее ранг.

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 2 & 0 & \bar{a}_1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & \bar{a}_2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & \bar{a}_3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \bar{a}_4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & \bar{a}_5 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & \bar{a}_6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \bar{a}_7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 2 & 0 & \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & \bar{a}_4 - 3\bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_5 - 3\bar{a}_1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & \bar{a}_6 - 5\bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \bar{a}_7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 2 & 0 & \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_3 - \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_4 - 3\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_5 - 3\bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_6 - 5\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_7 - \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 2 & 0 & \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_3 - \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_4 - 2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_5 - 3\bar{a}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \bar{a}_6 - 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_7 - \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|l}1&0&2&0&\bar{a}_1\\0&2&1&-1&\bar{a}_2-\bar{a}_1\\0&0&-6&1&\bar{a}_3-\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_4-2\bar{a}_1-\bar{a}_2-\bar{a}_3+\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_5-3\bar{a}_1-\bar{a}_3+\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_6-4\bar{a}_1-\bar{a}_2-\bar{a}_3+\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_7-\bar{a}_2+\bar{a}_1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|l}1&0&2&0&\bar{a}_1\\0&2&1&-1&\bar{a}_2-\bar{a}_1\\0&0&-6&1&\bar{a}_3-\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_4-2\bar{a}_1-\bar{a}_3\\0&0&0&0&\bar{a}_5-3\bar{a}_1-\bar{a}_3+\bar{a}_2\\0&0&0&0&\bar{a}_6-4\bar{a}_1-\bar{a}_3\\0&0&0&0&\bar{a}_7-\bar{a}_2+\bar{a}_1\end{array}\right).$$

Левая часть матрицы содержит три ненулевые строки, значит, ее ранг равен 3. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, содержащиеся в правых частях ненулевых строк, образуют линейно независимую систему. Чтобы доказать, что эти векторы являются базисом, покажем, что остальные векторы $\bar{a}_4$, $\bar{a}_5$, $\bar{a}_6$, $\bar{a}_7$ линейно выражаются через векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Для этого по последним четырем строкам матрицы составим следующие векторные равенства:

$$\begin{cases}\bar{0}=\bar{a}_4-2\bar{a}_1-\bar{a}_3,\\ \bar{0}=\bar{a}_5-3\bar{a}_1-\bar{a}_3+\bar{a}_2,\\ \bar{0}=\bar{a}_6-4\bar{a}_1-\bar{a}_3,\\ \bar{0}=\bar{a}_7-\bar{a}_2+\bar{a}_1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}\bar{a}_4=2\bar{a}_1+\bar{a}_3,\\ \bar{a}_5=3\bar{a}_1+\bar{a}_3-\bar{a}_2,\\ \bar{a}_6=4\bar{a}_1+\bar{a}_3,\\ \bar{a}_7=\bar{a}_2-\bar{a}_1.\end{cases}$$

Убедиться в правильности найденных линейных комбинаций можно, подставив координаты векторов в полученные соотношения.

Таким образом, векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ являются базисом, следовательно, размерность линейной оболочки $\dim L=3$.

8. Найти координаты вектора $\bar{b}=(3,-7,4,-8)$ в базисе $\bar{a}_1=(-1,-1,2,-2)$, $\bar{a}_2=(1,-2,1,-1)$, $\bar{a}_3=(3,-1,1,-2)$, $\bar{a}_4=(2,-2,0,-4)$.

Решение.

Обозначим координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$ через (x_1,x_2,x_3,x_4). Выполняется следующее векторное равенство:

$$\bar{b}=x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3+x_4\bar{a}_4,$$

которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$$

Решим ее методом Жордана-Гаусса, преобразовывая расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -8 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right),$$

откуда находим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Следовательно, в базисе $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$ вектор $\bar{b} = (1,2,0,1)$.

9. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

и записать общее решение СЛАУ.

Решение.

Составим матрицу системы и найдем ее ранг:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $r=2$ меньше числа неизвестных $n=4$. Следовательно, данная система уравнений обладает фундаментальными системами решений, которые состоят из двух решений, так как

$$k=n-r=4-2=2.$$

В качестве базисного минора выберем минор, образованный коэффициентами при переменных x_1, x_3, которые возьмем в качестве базисных, а переменные x_2, x_4 объявим свободными. По последней матрице запишем систему из двух уравнений, перенося свободные переменные в правые части:

$$\begin{cases} -x_1+x_3=3x_2-2x_4, \\ \qquad 2x_3=7x_2-7x_4. \end{cases}$$

Найдем частные решения, придавая свободным переменным удобные числовые значения:

1) $x_2=2$, $x_4=0$, $x_1=1$, $x_3=7$, то есть решение $\overline{x}_1=(1,2,7,0)$ является решением фундаментальной системы решений;

2) $x_2=0$, $x_4=2$, $x_1=-3$, $x_3=-7$, откуда $\overline{x}_2=(-3,0,-7,2)$ – второе решение ФСР.

Решения $\overline{x}_1=(1,2,7,0)$ и $\overline{x}_2=(-3,0,-7,2)$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение однородной системы уравнений имеет вид:

$$\overline{x}_{o.o.}=c_1\cdot\overline{x}_1+c_2\cdot\overline{x}_2,$$

или

$$\overline{x}_{o.o.}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\7\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\-7\\2\end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

10. Решить неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad +x_3+x_4+4x_5=2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=-1, \\ 3x_1-x_2+3x_3 \qquad +5x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5=3. \end{cases}$$

и записать общее решение через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Решение.

1) Вначале исследуем систему на совместность. Для этого составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк одновременно найдем ранги расширенной матрицы и матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранги обеих матриц одинаковы и равны 2, следовательно, система является совместной.

Общее решение неоднородной СЛАУ имеет вид:

$$\bar{x}_{о.н.} = \bar{x}_{о.о.} + \bar{x}_{ч.н.},$$

где $\bar{x}_{о.о.}$ – общее решение соответствующей однородной системы, $\bar{x}_{ч.н.}$ – любое фиксированное частное решение неоднородной системы.

2) Найдем сначала частное решение неоднородной системы. Так как ранг матрицы системы $r = 2$ и минор второго порядка, образованный коэффициентами при переменных x_1 и x_2, отличен от нуля, то в качестве базисных переменных возьмем переменные x_1, x_2,а остальные переменные объявим свободными. По последней матрице, полученной в пункте 1) запишем систему двух уравнений, в которой свободные переменные перенесем в правые части:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 - x_5 - 1, \\ \quad 2x_2 = \ \ 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 + 4. \end{cases}$$

Для нахождения частного решения $\bar{x}_{ч.н.}$ неоднородной системы придадим свободным переменным числовые значения и найдем соответствующие значения базисных переменных:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

то есть

$$\bar{x}_{ч.н.} = (1,2,0,0,0)\ .$$

3) Теперь рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\ + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 \qquad + 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \end{cases}$$

для которой найдем фундаментальную систему решений и запишем общее решение. Воспользуемся видом преобразованной матрицы неоднородной системы и запишем однородную систему двух уравнений, выбрав в качестве базисных и свободных переменных те же переменные, что и при рассмотрении неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 - x_5, \\ \quad 2x_2 = \ \ 3x_3 - 3x_4 - 2x_5. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из трех решений, так как разность числа неизвестных $n = 5$ и ранга матрицы $r = 2$ равна 3. Найдем частные решения, придавая свободным переменным удобные числовые значения:

а) $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, откуда $\bar{x}_1 = (-1{,}3{,}2{,}0{,}0)$ является решением фундаментальной системы решений;

б) $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, следовательно, $\bar{x}_2 = (-1{,}-3{,}0{,}2{,}0)$ – второе решение ФСР;

в) $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, значит, решение $\bar{x}_3 = (-2{,}-1{,}0{,}0{,}1)$ также входит в систему фундаментальных решений.

Таким образом, решения $\bar{x}_1 = (-1{,}3{,}2{,}0{,}0)$, $\bar{x}_2 = (-1{,}-3{,}0{,}2{,}0)$ и $\bar{x}_3 = (-2{,}-1{,}0{,}0{,}1)$ образуют фундаментальную систему; общее решение однородной системы уравнений имеет вид:

$$\bar{x}_{о.о.} = c_1 \cdot \bar{x}_1 + c_2 \cdot \bar{x}_2 + c_3 \cdot \bar{x}_3,$$

или

$$\bar{x}_{о.о.} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Учитывая найденные решения $\bar{x}_{о.о.}$ и $\bar{x}_{ч.н.}$, окончательно получим общее решение неоднородной системы в виде:

$$\bar{x}_{о.н.} = \bar{x}_{о.о.} + \bar{x}_{ч.н.} = c_1 \cdot \bar{x}_1 + c_2 \cdot \bar{x}_2 + c_3 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_{ч.н.},$$

или

$$\bar{x}_{о.н.} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

11. Даны подпространства $M = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$ и $L = L(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4)$. Найти базисы суммы и пересечения подпространств M и L. Определить размерности $M + L$ и $M \bigcap L$, если $\bar{a}_1 = (1,3,-8,-1)$, $\bar{a}_2 = (0,1,2,1)$, $\bar{a}_3 = (1,4,-6,0)$, $\bar{a}_4 = (1,5,-4,1)$, $\bar{c}_1 = (1,1,-3,1)$, $\bar{c}_2 = (1,-1,2,3)$, $\bar{c}_3 = (2,0,-1,4)$, $\bar{c}_4 = (0,2,-5,-2)$.

Решение.

а) Базис суммы подпространств можно находить по определению суммы подпространств или в соответствии с теоремой о минимальной порождающей совокупности.

Рассмотрим второй способ, который заключается в следующем. Если подпространство M порождается системой векторов $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$, а подпространство L – системой векторов $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^{4}$, тогда множество векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4\}$ порождает сумму $M + L$. Для отыскания базиса необходимо из этой совокупности выбрать минимальное порождающее множество, которое и будет базисом суммы подпространств.

Таким образом, задача сводится к отысканию базиса линейной оболочки, порожденной множеством $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4\}$.

Запишем матрицу, состоящую из координат векторов и их обозначений. Применяя элементарные преобразования строк к обеим частям матрицы, вычислим ее ранг.

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 1 & 4 & -6 & 0 & \bar{a}_3 \\ 1 & 5 & -4 & 1 & \bar{a}_4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & \bar{c}_1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & \bar{c}_2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & \bar{c}_3 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & \bar{c}_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \bar{a}_4 - \bar{a}_1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 & \bar{c}_1 - \bar{a}_1 \\ 0 & -4 & 10 & 4 & \bar{c}_2 - \bar{a}_1 \\ 0 & -6 & 15 & 6 & \bar{c}_3 - 2\bar{a}_1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & \bar{c}_4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3-\bar{a}_1-\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_4-\bar{a}_1-2\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & \bar{c}_1-\bar{a}_1+2\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 18 & 8 & \bar{c}_2-\bar{a}_1+4\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 27 & 12 & \bar{c}_3-2\bar{a}_1+6\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & -9 & -4 & \bar{c}_4-2\bar{a}_2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -8 & -1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3-\bar{a}_1-\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_4-\bar{a}_1-2\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & \bar{c}_1-\bar{a}_1+2\bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_2+\bar{a}_1-2\bar{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_3+\bar{a}_1-3\bar{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_4-\bar{a}_1+\bar{c}_1 \end{array}\right).$$

Левая часть матрицы содержит три ненулевые строки, значит, ее ранг равен 3. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{c}_1$, содержащиеся в правых частях ненулевых строк, образуют линейно независимую систему. Чтобы доказать, что эти векторы являются базисом, покажем, что через них линейно выражаются остальные векторы. Для этого по ненулевым строкам матрицы составим следующие векторные равенства:

$$\begin{cases} \bar{0}=\bar{a}_3-\bar{a}_1-\bar{a}_2, \\ \bar{0}=\bar{a}_4-\bar{a}_1-2\bar{a}_2, \\ \bar{0}=\bar{c}_2+\bar{a}_1-2\bar{c}_1, \\ \bar{0}=\bar{c}_3+\bar{a}_1-3\bar{c}_1, \\ \bar{0}=\bar{c}_4-\bar{a}_1+\bar{c}_1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \bar{a}_3=\bar{a}_1+\bar{a}_2, \\ \bar{a}_4=\bar{a}_1+2\bar{a}_2, \\ \bar{c}_2=-\bar{a}_1+2\bar{c}_1, \\ \bar{c}_3=-\bar{a}_1+3\bar{c}_1, \\ \bar{c}_4=\bar{a}_1-\bar{c}_1. \end{cases}$$

Следовательно, базисом суммы подпространств $M+L$ является система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{c}_1$. Размерность суммы равна числу векторов в базисе, то есть $\dim M+L=3$.

б) Базис пересечения подпространств $M\bigcap L$ найдем в соответствии с определением пересечения. Рассмотрим некоторый вектор $\bar{z}$ из пересечения $M\bigcap L$. Так как этот вектор принадлежит обоим подпространствам M и L, то запишем его линейные представления через векторы $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^{4}$ и через систему векторов $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^{4}$:

$$\bar{z} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 = y_1\bar{c}_1 + y_2\bar{c}_2 + y_3\bar{c}_3 + y_4\bar{c}_4 .$$

Рассмотрим векторное уравнение:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 - y_1\bar{c}_1 - y_2\bar{c}_2 - y_3\bar{c}_3 - y_4\bar{c}_4 = \bar{0} ,$$

в котором заменим обозначения векторов их координатами и перейдем к однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - y_1 - y_2 - 2y_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - y_1 + y_2 - 2y_4 = 0, \\ -8x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 3y_1 - 2y_2 + y_3 + 5y_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_4 - y_1 - 3y_2 - 4y_3 + 2y_4 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу системы и найдем ее ранг с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -8 & 2 & -6 & -4 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -8 & 2 & -6 & -4 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -5 & -10 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & -18 & -27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & -12 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 4. В качестве базисного минора возьмем минор, образованный первым, вторым, пятым и восьмым столбцами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Соответственно номерам столбцов базисными переменными являются x_1, x_2, y_1, y_4, а свободными – переменные x_3, x_4, y_2, y_3.

По виду последней матрицы запишем систему уравнений, оставляя базисные переменные в левых частях уравнений, а свободные переменные перенося в правые части:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - y_1 \qquad = -x_3 - x_4 \quad + y_2 + 2y_3, \\ \quad x_2 + 2y_1 - 2y_4 = -x_3 - 2x_4 - 4y_2 - 6y_3, \\ \qquad - y_1 \ + y_4 = \qquad\qquad 2y_2 + 3y_3, \\ \qquad\qquad y_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы определить, какие именно векторы вида

$$\bar{z} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 = y_1\bar{c}_1 + y_2\bar{c}_2 + y_3\bar{c}_3 + y_4\bar{c}_4$$

принадлежат пересечению подпространств $M \cap L$, найдем частные решения данной системы, придавая различные значения свободным переменным:

1) пусть $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, тогда $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_1 = 0$, $y_4 = 0$, значит,

$\bar{z} = -\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4 = 0 \cdot \bar{c}_1 + 0 \cdot \bar{c}_2 + 0 \cdot \bar{c}_3 + 0 \cdot \bar{c}_4 = \bar{0}$;

2) при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ получим $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $y_1 = 0$, $y_4 = 0$,

$\bar{z} = -\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_4 = 0 \cdot \bar{c}_1 + 0 \cdot \bar{c}_2 + 0 \cdot \bar{c}_3 + 0 \cdot \bar{c}_4 = \bar{0}$;

3) при $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $y_1 = -2$, $y_4 = 0$,

$\bar{z} = -\bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4 = -2\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + 0 \cdot \bar{c}_3 + 0 \cdot \bar{c}_4$,

откуда $\bar{z} = -\bar{a}_1 = -2\bar{c}_1 + \bar{c}_2$;

4) если $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $y_1 = -3$, $y_4 = 0$, откуда

$\bar{z} = -\bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4 = -3\bar{c}_1 + 0 \cdot \bar{c}_2 + \bar{c}_3 + 0 \cdot \bar{c}_4$,

то есть $\bar{z} = -\bar{a}_1 = -3\bar{c}_1 + \bar{c}_3$.

Таким образом, пересечение подпространств $M \cap L$ из данных векторов содержит только вектор $\bar{a}_1$, который является базисом пересечения, следовательно, $\dim M \cap L = 1$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С., Никольский, С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1988.

2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1987.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1997.

4. Головина, Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И. Головина. – М.: Наука, 1979.

5. Бронштейн, И.Н., Семендяев, К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986.

6. Цыпкин, А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений / А.Г. Цыпкин. – М.: Наука, 1988.

7. Краснов, М.Л. Вся высшая математика: учебник. Т. 1 / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

8. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1999.

9 Математика: энциклопедия / под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003.

10. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие для втузов / под ред. акад. А.Н. Тихонова. – М.: Высшая школа, 1994.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Составители:
Аверкова Галина Владимировна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Практикум

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 25.09.08. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57