Дисциплина:
Теория принятия решений

Лекция. Линейное программирование. Графический метод.

Первухин Михаил Александрович

Доцент кафедры математики и моделирования

Классификация проблем принятия решений

Первухин Михаил Александрович

Проблемы принятия решений

- Хорошо структурированные
- Слабо структурированные
- Неструктурированные

Хорошо структурированные проблемы ПР

Управляемые и неуправляемые факторы, как и связи между ними, могут быть выражены в количественной форме

Наличие единственного критерия

Независимость оптимального решения от пристрастий и предпочтений ЛПР

Объективность изучаемого объекта

Слабо структурированные проблемы ПР

Часть информации, которая требуется для полного задания связей между факторами, принципиально отсутствует

Наличие многих критериев

Присутствуют факторы, которые носят как количественный, так и качественный характер

Решения определяются вкусами и пристрастиями ЛПР

Качественные факторы

К качественным относятся факторы, для которых не существует, по крайней мере на сегодняшний день, объективной оценки.

К качественным факторам относятся: красота, мода, престиж, комфорт, удобство и т. д.

Неструктурированные проблемы ПР

Преобладают качественные факторы

Наличие многих критериев

Отсутствие количественных связей между факторами

Решения определяются вкусами и пристрастиями ЛПР и носят компромиссный субъективный характер

Модель объекта

Модель объекта — это идеализированный образ реального объекта исследования и окружающих его условий, который с той или иной степенью адекватности отражает наиболее существенные свойства и характеристики реального объекта.

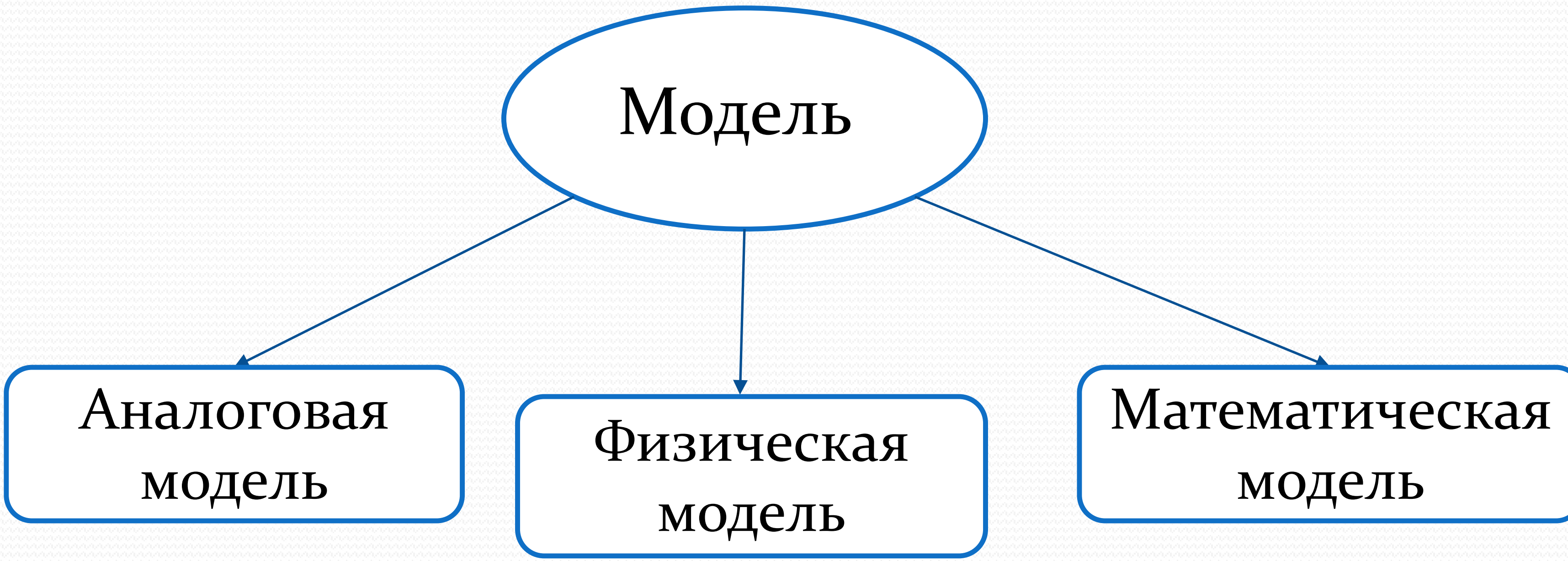
Модель обязательно отражает цели исследования.

Адекватность модели

Адекватность модели — это степень соответствия построенной модели реальному объекту.

Адекватность показывает, насколько модель правильно отражает процессы, протекающие в реальности, насколько качественно и количественно близко поведение объекта, полученное на модели, в сравнении с реальными объектом.

Моделирование в теории принятия решений



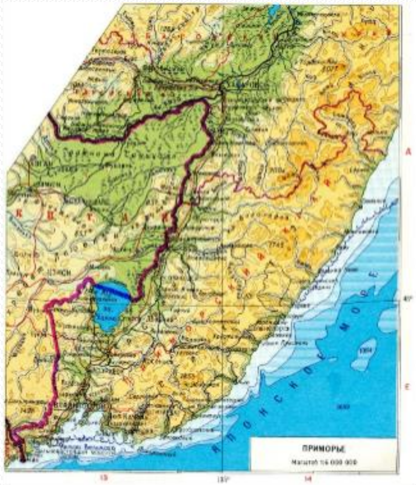
Аналоговая модель

Аналоговая модель — это модель, основанная на аналогии или подобии между объектами, операциями или процессами, имеющими различную физическую природу.

Примеры аналоговых моделей

Лекарственные препараты сначала проверяют на животных, чтобы понять реакцию человека

Примеры аналоговых моделей



Физическая карта-адекватная аналоговая модель реальной местности.

Фотография тоже является аналоговой моделью.

Первухин Михаил Александрович

Примеры аналоговых моделей

Схема метро - аналоговая модель транспортной сети метро г. Москва.

Часы - аналоговая модель течения времени.

Физическая модель

Физическая модель – это уменьшенная в несколько раз материальная копия исследуемого объекта в основных, наиболее существенных чертах, воспроизводящая реальный объект в искусственно созданных условиях, имитирующих реальные окружающие условия и воздействия.

Физическое моделирование

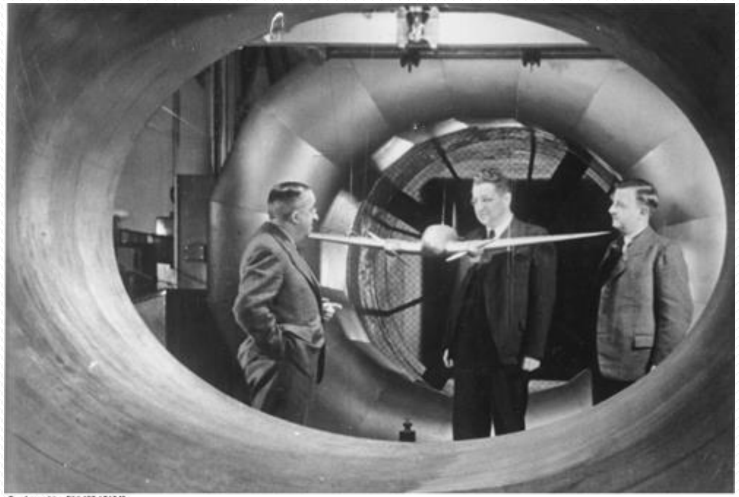
Физическое моделирование – это исследование поведения реального объекта в реальных условиях при реальных воздействиях путём проведения экспериментальных исследований *на его физической модели*, в условиях, имитирующих реальную внешнюю среду и реальные воздействия.

Примеры физических моделей

Поведение человека при гравитационных перегрузках или в условиях невесомости, возникающих в космосе, исследуются посредством физического моделирования на специальных установках, искусственно имитирующих перегрузки или невесомость.

Глобус – физическая модель планеты земля.

Примеры физических моделей



Во время проектирования нового самолёта необходимо проверить, насколько удачно выбраны форма и размеры, как послушен будет он управлению, как велико сопротивление, оказываемое самолётом в воздухе во время полёта, и т. д.

В аэродинамических трубах испытывают небольшие модели, представляющие собой по форме точную копию проверяемого самолёта

Первухин Михаил Александрович

Когда применяют физические модели

Физическое моделирование применяется в тех случаях, когда:

- исследуемый объект слишком сложен для моделирования другими средствами;
- окружающие условия и воздействия при функционировании объекта не могут быть воспроизведены в реальности или не доступны для проведения исследований;
- изготовление реального объекта и его натурные испытания в реальных условиях сопряжены с огромными рисками, неоправданными затратами ресурсов и потерями, катастрофами и непредвиденными последствиями.

Математическая модель

Математическая модель – это идеализированный образ реального объекта, выраженный в математических понятиях и символах, с определённой степенью адекватности отражающий наиболее существенные свойства и характеристики реального объекта.

Математическое моделирование заключается в исследовании реального объекта с помощью построенной адекватной математической модели.

Модели В ТПР

В теории принятия решений выделяют три класса моделей:

- Принятие решений в условиях определённости.
- Принятие решений в условиях риска.
- Принятие решений в условиях полной неопределённости.

Принятие решений в условиях определенности

Первухин Михаил Александрович

Математическое программирование

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Линейное программирование (ЛП) – раздел математического программирования, характеризующийся тем, что все функции, входящие в модель, являются линейными функциями.

Линейное программирование

Модель задачи линейного программирования включает:

1. совокупность неизвестных величин
$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$
1. целевую функцию $z = z(\bar{x})$;
2. условия (систему ограничений) $g_i(\bar{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$, где z и g_i - заданные линейные функции, а b_i - некоторые действительные числа.

Пример

На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца, приведены в таблице.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	420
Прибыль от реализации одной шкурки (у.е.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Составление математической модели задачи

Переменные x_1, x_2 будут выражать количество лисиц и песцов соответственно, которое нужно выращивать на звероферме.

По условию необходимо максимизировать прибыль от продажи шкурок животных. Прибыль можно задать функцией:

$$z = 16x_1 + 12x_2.$$

Тот факт, что нам необходимо максимизировать функцию в математике обозначается так:

$$z = 16x_1 + 12x_2 \to max.$$

Для того, чтобы прокормить x_1 лисицу и x_2 песцов нам понадобится:

- корма I вида – $2x_1 + 3x_2$,
- корма II вида – $4x_1 + x_2$,
- корма III вида – $6x_1 + 7x_2$.

Ограничения

Запасы корма ограничены и это тоже необходимо отразить в математической модели.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 420. \end{cases}$$

Кроме того, число животных не может быть отрицательным и не целым.

Математическая модель задачи

x_1, x_2 – количество лисиц и песцов.

$$z = 16x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + \ \ x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 420, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \ - \text{целые}. \end{cases}$$

Задача формирования инвестиционного портфеля

Инвестор располагает суммой в 100 тыс. ден, ед. и желает сформировать свой инвестиционный портфель, вложив ее в акции трёх компаний I&J, K&L, M&N. Акции каждой компании характеризуются ожидаемым годовым доходом на одну акцию и ценой акции (см. табл.).

Акции компаний	Цена одной акции, ден. ед./ед.	Ожидаемый годовой доход на одну акцию, ден. ед./ед.
I & J	80	15
K & L	25	6
M&N	30	9

Инвестор предполагает вложить в акции все свои средства, причём в акции компании I & J — не менее 20 тыс. ден. ед., в акции компании K & L — не менее 35 тыс. ден. ед., а в акции компании M & N — не более 45 тыс. ден. ед.

Инвестору необходимо определить, акции каких компаний и в каком количестве ему следует приобрести, чтобы ожидаемая годовая прибыль инвестиционного портфеля была максимальной.

Математическая модель задачи

x_1– количество акций компании I&J,

x_2– количество акций компании K&L,

x_3– количество акций компании M&N.

$$z = 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 80x_1 + 25x_2 + 30x_3 = 100\,000, \\ 80x_1 \geq 20\,000, \\ 25x_2 \geq 35\,000, \\ 30x_3 \leq 45\,000, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача о рюкзаке

На причале в ожидании погрузки на речную баржу стоят 4 вида грузов: бочки с рыбой (20 бочек), ящики с помидорами (250 шт.), мешки с сахарным песком (150 шт.) и мешки с картофелем (150 шт.)

Вместимость баржи равна 90 $м^3$, а грузоподъемность составляет 35 000 кг. Объем, вес и стоимость одной бочки с рыбой, одного ящика с помидорами, одного мешка с сахаром и одного мешка с картофелем приведены в таблице:

Характеристика груза	Характеристики единицы груза каждого вида			
	бочка с рыбой	ящик с по-мидорами	мешок с сахарным песком	мешок с картофелем
Объем, *м³*	1,5	0,25	0,17	0,13
Вес, *кг*	220	75	120	100
Стоимость, *ден. ед.*	6800	3400	2400	1800

Получатель груза оговорил условие, по которому ему должно быть доставлено не меньше 12 бочек с рыбой, не меньше 120 ящиков с помидорами и не меньше 35 и 85 мешков с сахарным песком и картофелем соответственно.

Какими грузами и в каком количестве необходимо загрузить баржу, чтобы суммарная ценность груза была максимальной?

Математическая модель задачи

x_1 – количество загружаемых на баржу бочек с рыбой,

x_2 – количество загружаемых ящиков с помидорами,

x_3 – количество загружаемых мешков с сахарным песком,

x_4 – количество загружаемых мешков с картофелем.

$$z = 6800x_1 + 3400x_2 + 2400x_3 + 1800x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}17x_3 + 0{,}13x_4 \le 90, \\ 220x_1 + 75x_2 + 120x_3 + 100x_4 \le 35\,000, \\ x_1 \ge 12, x_2 \ge 120, x_3 \ge 35, x_4 \ge 85, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{целые.} \end{cases}$$

Графический метод решения задач линейного программирования

- Рассмотрим следующую задачу

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \to \max$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \le b_1; \\ a_3x_1 + a_4x_2 \ge b_2; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Алгоритм графического метода

- Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств. В нашем примере необходимо построить прямые

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1;$$
$$a_3x_1 + a_4x_2 = b_2.$$

- Чтобы это сделать нужно для каждой прямой найти координаты любых двух точек, лежащих на данной прямой.

- Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. То есть для каждого неравенства выбираем любую точку, не лежащую на соответствующей прямой, и подставляем ее координаты в неравенство, если неравенство выполняется, то заштриховываем полуплоскость, содержащую данную точку, в противном случае штрихуем другую полуплоскость.

- Находим область, удовлетворяющую все неравенствам системы (***многоугольник решений***).
- Строим вектор $\bar{c}(c_1; c_2)$, где c_1, c_2 - коэффициенты целевой функции. Вектор строится следующим образом: начало вектора находится в точке $(0; 0)$, а конец в точке $(c_1; c_2)$.
- Строим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.

- Параллельно перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{c}$ (если задача $z \to \max$) или в направлении противоположном вектору $\bar{c}$ (если задача $z \to \min$). В результате чего либо находят точку (точки) экстремума, либо устанавливают неограниченность целевой функции.
- Определяют координаты точки экстремума и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример

Решить графическим способом следующую задачу ЛП:

$$z = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

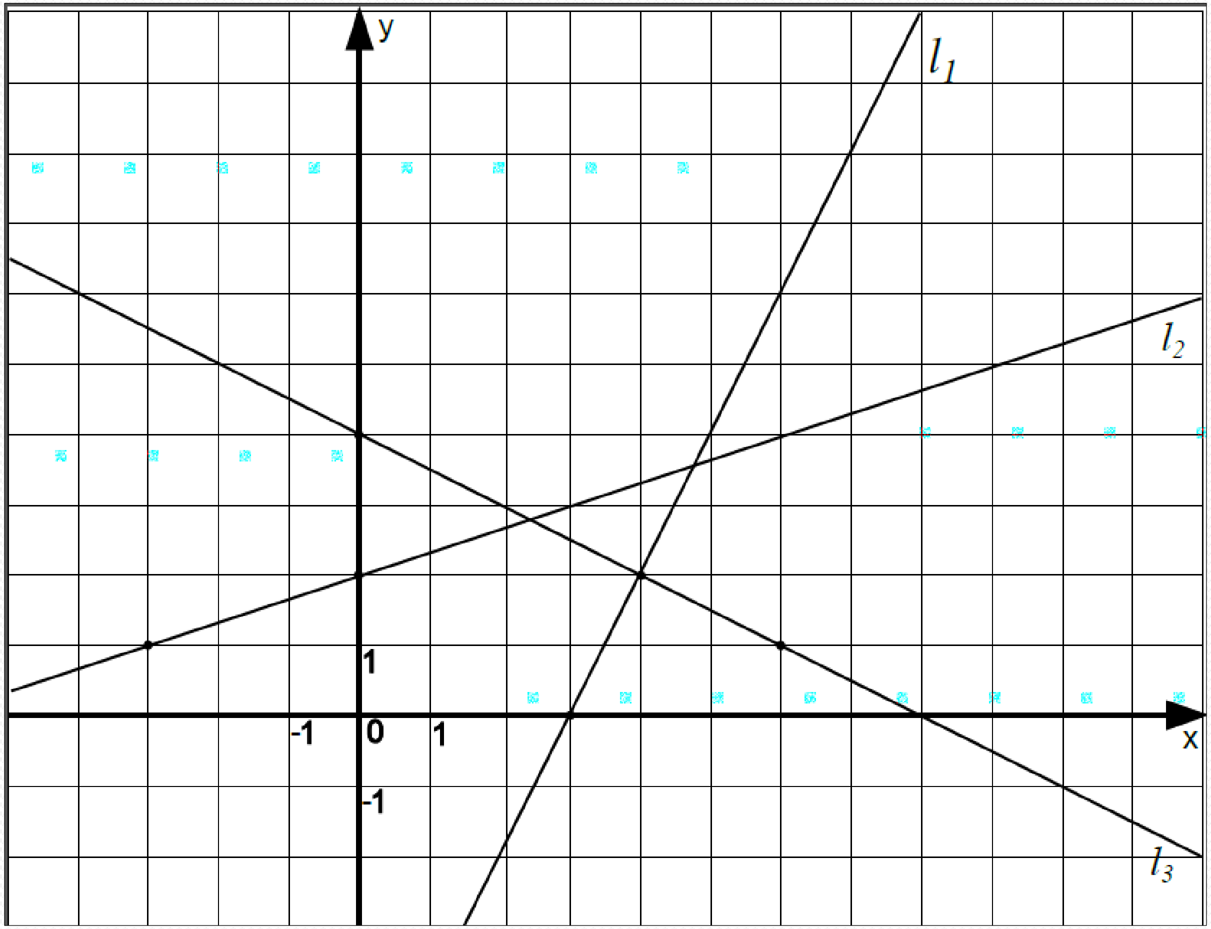
Решение

$$l_1:\ 4x_1 - 2x_2 = 12,$$
$$l_2:\ -x_1 + 3x_2 = 6,$$
$$l_3:\ 2x_1 + 4x_2 = 16.$$

Находим координаты точек, лежащих на прямых.

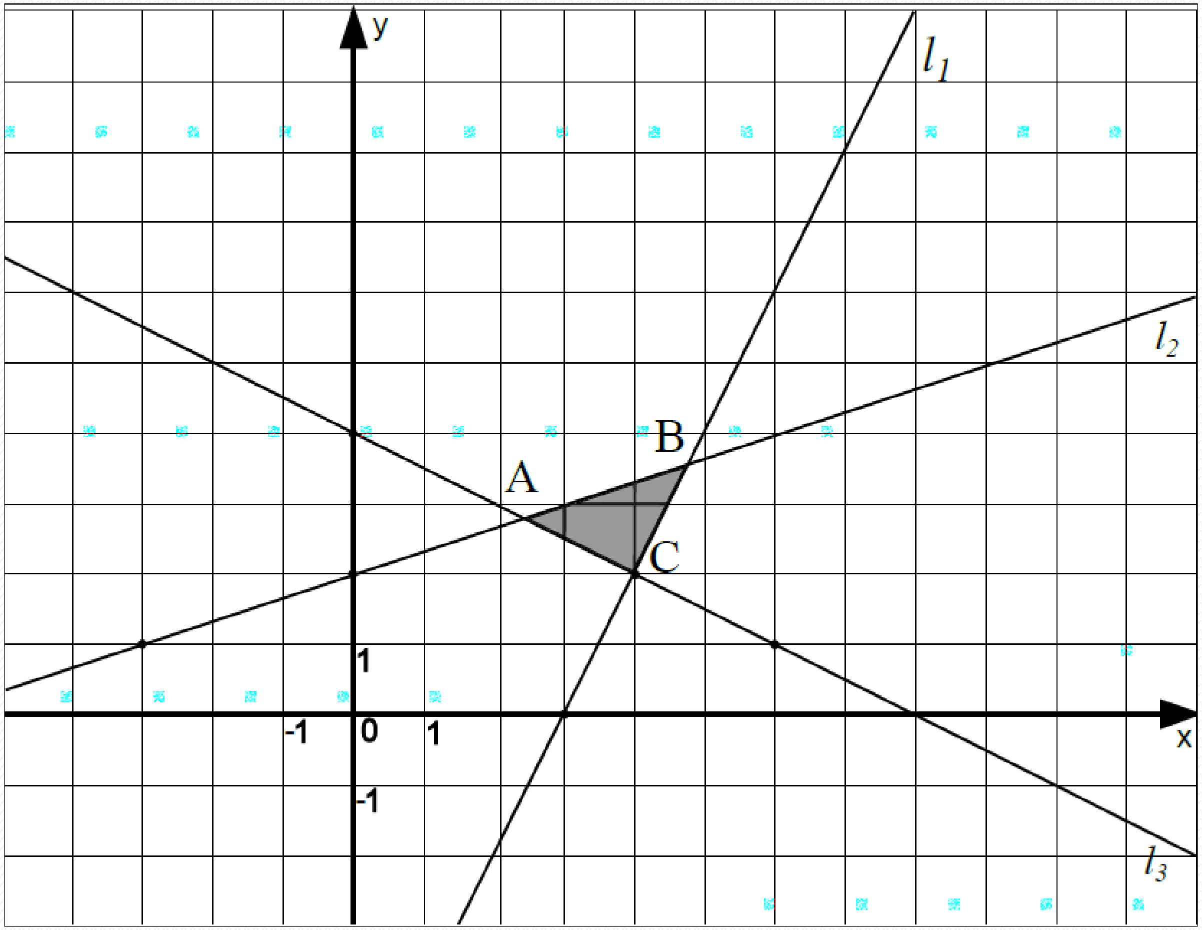
l_1		l_2		l_3	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
4	2	-3	1	0	4
3	0	0	2	6	1

Построение прямых

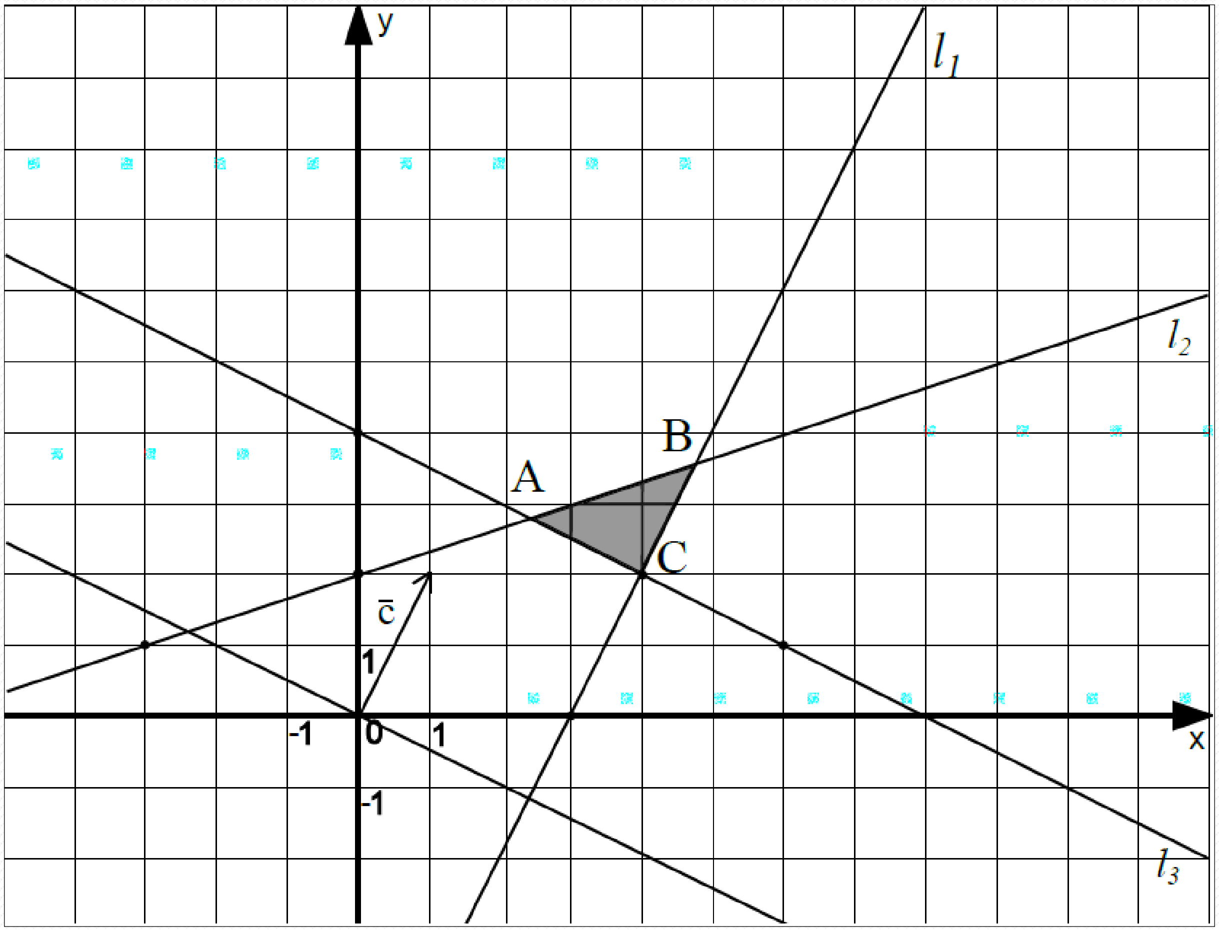


Первухин Михаил Александрович

Многоугольник решений

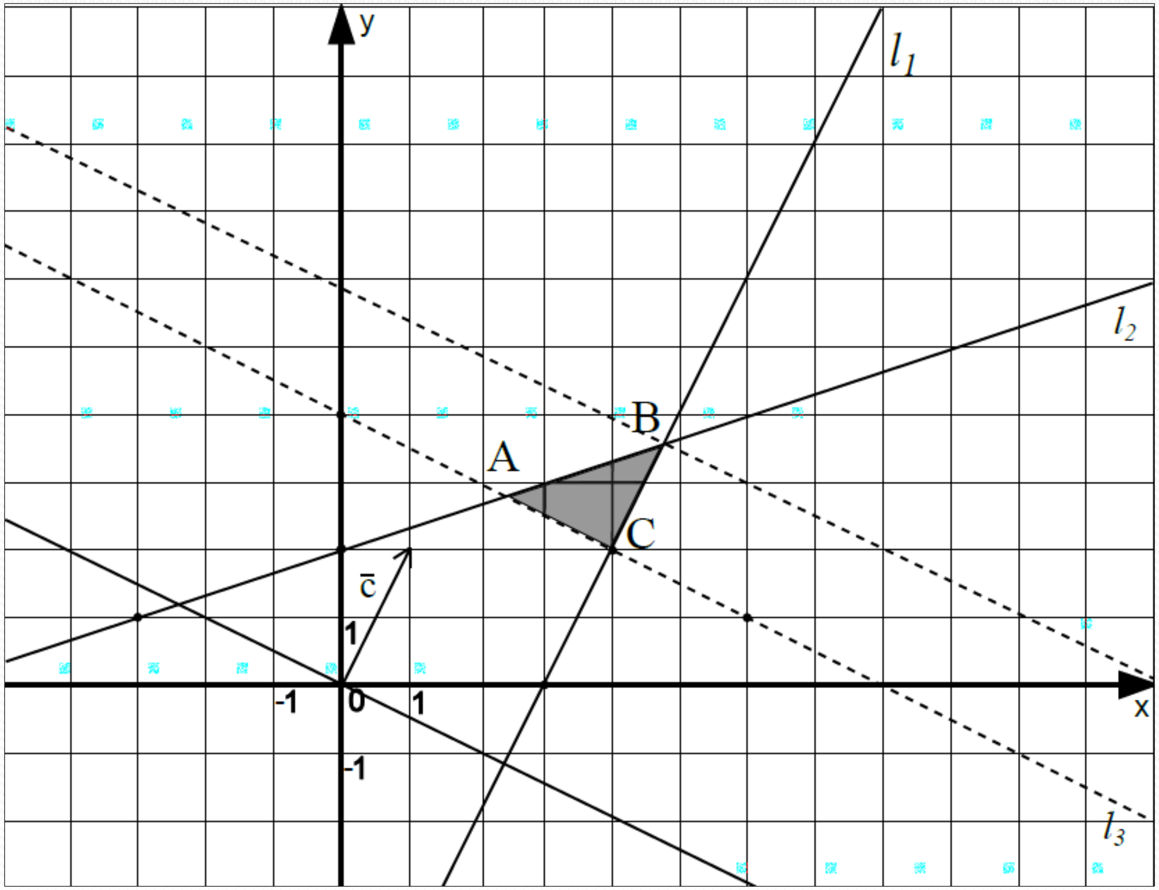


Построение целевой функции



Первухин Михаил Александрович

Определение максимума целевой функции



Перемещаем прямую $x_1 + 2x_2 = 0$ в направлении вектора $\bar{c}$. Последняя точка в которой прямая, параллельная прямой $x_1 + 2x_2 = 0$, пересечёт многоугольник решений и будет точкой максимума.

Точка максимума

В нашем примере максимум будет достигаться в точке B. Координаты точки B найдём из системы:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

Таким образом, $B(4{,}8;3{,}6)$.

Поэтому $X_{max} = B(4{,}8;3{,}6)$. Тогда

$$z_{max} = 4{,}8 + 2 \cdot 3{,}6 = 12.$$

Ответ: $z_{max} = 12$ в точке $X_{max}(4{,}8;3{,}6)$.