1. 2. Проводники и диэлектрики в электрическом поле

Справочные сведения

Электрическое поле в диэлектрике создается не только свободными, но и связанными зарядами. В соответствии с этим теорема Гаусса для вектора напряженности *E* примет вид (в СИ):

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \left(\sum Q + \sum Q'\right), \qquad (2..1.1)$$

где $\sum Q$ – сумма свободных зарядов; где $\sum Q'$ – сумма связанных зарядов, охваченных поверхностью интегрирования.

Учитывая, что

$$\sum Q' = - \oint \vec{P} d\vec{S},$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризации, выражение (2.2.1) можно привести к виду

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) d\vec{S} = \sum Q. \qquad (2.1.2)$$

Введя обозначение $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, получим так называемую обобщенную теорему Гаусса:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = \sum Q. \qquad (2.1.3)$$

Здесь $\vec{D}$ – вектор электрического смещения, он является дополнительной характеристикой электрического поля в диэлектрике. Вектор поляризации $\vec{P}$ прямо пропорционален вектору напряженности $\vec{E}$ действующего в диэлектрике поля:

$$\vec{P} = a\varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (2.1.4)$$

где *a* – электрическая восприимчивость. Это безразмерный коэффициент, постоянный для каждого вещества.

Выражение для вектора электрического смещения можно привести к виду

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,(1+a) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E};$$

Здесь $\varepsilon = 1+a$ обозначает относительную диэлектрическую проницаемость среды.

Если в электрическое поле плоского конденсатора, созданное зарядами, плотность которых на пластинах конденсатора σ, поместить плоскую пластину из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью *ε*, то плотность связанных зарядов на поверхностях пластины диэлектрика будет определяться выражением:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma .$$

Емкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов определяются по формулам:

$$C_{пл} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d};$$

$$C_{ц} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}};$$

$$C_{сф} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где S — площадь пластин,

d — расстояние между пластинами,

l—длина цилиндрического конденсатора,

R_1 и R_2 — радиусы цилиндров (радиусы сферических обкладок конденсаторов).

Емкость уединенного шара

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Емкость батареи конденсаторов при параллельном соединении:

$$C = \Sigma C_i;$$

при последовательном соединении:

$$C = \frac{1}{\sum\frac{1}{C_i}}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2};$$

Плотность энергии электрического поля

$$\omega = \frac{DE}{2}.$$

Примеры решения задач

При рассмотрении электростатического поля в диэлектриках используют теорему Гаусса и принцип суперпозиции полей свободных и связанных зарядов.

При решении задач этого параграфа необходимо считать диэлектрики однородными и изотропными, и что их границы совпадают с эквипотенциальными поверхностями.

Изменения электрического поля, обусловленные введением проводников, определяется только величиной и распределением индуцированных зарядов. Причем всегда выполняются условия:

1) внутри проводника $E_i = 0$;
2) на поверхности проводника $\varphi = const.$

Причиной ослабления поля в диэлектрике является связанные заряды, появляющиеся на поверхности диэлектрика вследствие явления поляризации и создающие собственное поле, направленное навстречу внешнему полю. Если граница диэлектрика перпендикулярна силовым линиям поля, то вектор напряженности терпит разрыв.

Если электрическое поле создается конденсаторами различной формы: плоскими, цилиндрическими, сферическим и т. д. или системой последовательно и параллельно соединенных конденсаторов, то удобно использовать понятие емкости.

В задачах, где приходится определять изменение энергии поля вследствие удаления диэлектрика или раздвижения обкладок конденсатора, следует учесть разницу между случаями, когда конденсатор отключен от источников питания до проведения указанных действий, и когда он остается соединенным с источником питания все время.

Задачи о движении заряженных частиц в известном поле можно решить или динамическим методом, или с применением законов сохранения.

Задача 1. Точечный заряд $q = 3 \cdot 10^{-8}$ *Кл* находится на расстоянии

a =3 *см* от металлической стенки, соединенной с землей. Найти: поверхностную плотность σ заряда, индуцированного на стенке, в точке, ближайшей к заряду q; выполнить то же в точке, находящейся на расстоянии r= 5 см от заряда q; определить общую величину заряда, индуцированного на стенке.

Решение.

В точке, расположенной непосредственно у поверхности стенки на расстоянии r от заряда q, согласно принципу суперпозиции, поле будет определяться по формуле

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_{+}(r) + \vec{E}_{-}(r), \qquad (2.1.5)$$

Здесь $\vec{E}_{+}$ и $\vec{E}_{-}$ - векторы напряженностей полей, созданных соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Вектор напряженности результирующего поля будет направлен горизонтально и иметь значение

$$E(r) = (E_{+} + E_{-}) \cos a = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos a. \qquad (2.1.6)$$

Легко видеть, что $\cos a = \dfrac{a}{r}$; окончательно будем иметь

$$E(r) = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (2.1.7)$$

Такое значение имеет поле непосредственно у поверхности стенки. Стенка заряжена с поверхностной плотностью σ, являющейся функцией координат. На поверхности стенки вектор $\vec{E}$ меняется скачком от E(r), определяемого формулой (2.1.7), до нуля, так как в толще самой стенки и слева от нее электрического поля нет.

Величина скачка ΔE, претерпеваемого вектором напряженности, равна

$$\left|\Delta E\right| = \left|\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right|. \qquad (2.1.8)$$

Так как поле в самом металле отсутствует, то выражения (2.1.7) и (2.1.8) можно приравнять, и тогда

$$\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (2.1.9)$$

откуда

$$\sigma = \frac{qa}{2\pi r^3}. \qquad (2.1.10)$$

Формула (2.1.10) дает абсолютное значение поверхностной плотности заряда.

Подставляя численные значения в (2.1.10) и учитывая знак индуцированного заряда, окончательно будем иметь

$$\sigma_1 = -\frac{q}{2\pi a^2} = -5{,}3\cdot10^{-6}\ Кл/м^2;$$

$$\sigma_2 = -\frac{q}{2\pi r^3} = -1{,}1\cdot10^{-6}\ Кл/м^2.$$

Для расчета полного заряда Q стенки найдем геометрическое место равных плотностей: оно будет представляться бесконечно тонким кольцом радиуса ρ и толщины dρ с центром, находящимся в точке, лежащей на расстоянии a от заряда q. Заряд, приходящийся на такое кольцо,

$$dQ = \sigma dS, \tag{2.1.11}$$

где $dS = 2\pi\rho d\rho$ - площадь рассматриваемого кольца.

Подставив равенство (2.1.10) в формулу (2.1.11) и проинтегрируем полученное выражение по всей стенке; при этом радиус колец будет меняться в пределах от 0 до ∞; найдем, что полный заряд

$$\left|Q\right| = qa\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{r^3}. \tag{2.1.12}$$

Расстояние от точечного заряда до кольца равно

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2}.$$

Подставляя это значение в выражение (2.1.12) и учитывая, что индуцированный заряд отрицателен, получаем окончательный ответ

$$Q = -qa\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{3/2}} = -q.$$

Задача 2. В плоском конденсаторе, заряженном до разности потенциалов *U=600 В*, расстояние между обкладками (*l*=0,*4 см*) заполнено наполовину слюдой, относительная диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 7$. Найти напряженность поля в диэлектрике и в вакууме для случая: граница диэлектрика параллельна заряженным пластинам.

Решение.

Граница диэлектрик – вакуум расположена перпендикулярно силовым линиям поля, поэтому вектор смещения при переходе через эту границу не меняется. Поскольку источниками поля являются две плоскопараллельные равномерно заряженные пластины, можно считать, что вектор смещения вообще не будет зависеть от положения рассматриваемой точки, т.е.

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 \tag{2.1.13}$$

Здесь $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ – векторы смещения в точках *1* и *2*.

Однородность поля в пределах слоя диэлектрика и слоя вакуума позволяет записать, что

$$U = E_1x_1 + E_2x_2 \tag{2.1.14}$$

где E_1 и E_2 – напряженности электрического поля в слоях 1 и 2; x_1и x_2– толщины слоев диэлектрика и вакуума.

Учитывая связь между значениями векторов напряженности и смещения, равенство (2.1.13) можно преобразовать к виду

$$\varepsilon E_1 = E_2. \qquad (2.1.15)$$

Решая совместно уравнения (2.1.14) и (2.1.15) при условии, что $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$, получаем

$$E_1 = \frac{2U}{l(1+\varepsilon)} = 3{,}75 \cdot 10^4\ В/м;$$

$$E_2 = \frac{2U\varepsilon}{l(1+\varepsilon)} = 26{,}25 \cdot 10^4\ В/м.$$

Задача 3. Металлическому изолированному шару радиусом R = 10 см сообщили заряд $Q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл, после этого поверхность шара покрыли слоем диэлектрика толщиной h = 2 см. Чему равна плотность наведенных зарядов на внутренней и внешней поверхностях слоя диэлектрика и полный наведенный заряд, если относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε = 2?

Решение.

По теореме Остроградского — Гаусса вектор электрического смещения в любой точке диэлектрика:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad (2.1.16)$$

где r — радиус гауссовой поверхности, или

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

(это справедливо и для внутренней поверхности диэлектрического слоя).

С другой стороны, вектор электрического смещения и вектор поляризации $\vec{P}_e$ связаны соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_e,$$

откуда

$$\vec{P}_e = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

С учетом равенства (2.1.16) получаем:

$$\vec{P}_e = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Но нормальная составляющая вектора поляризации численно равна плотности наведенных зарядов:

$$\sigma' = (\vec{P}_e \vec{n}).$$

В случае шаровой поверхности $\vec{P}_e \parallel \vec{n}$ и $P_e = \sigma'$. Следовательно, для внутренней поверхности диэлектрика имеем:

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{Q}{4\pi R^2};$$

а для внешней:

$$\sigma_2' = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{4\pi (R + h)^2}$$

Наведенный заряд один и тот же и на внутренней и на внешней поверхности слоя диэлектрика:

$$Q_1' = Q_2'.$$

$$Q' = \frac{Q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}.$$

Подставляя данные задачи, получаем:

$$\sigma_1' = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \ \frac{Кл}{м^2};$$

$$\sigma_2' = 1{,}38 \cdot 10^{-5} \ \frac{Кл}{м^2};$$

$$Q' = Q_1' = Q_2' = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Задача4. Пять конденсаторов одинаковой емкости соединены последовательно в батарею. Параллельно одному из кондукторов подключен статический вольтметр, емкость которого в два раза меньше емкости каждого конденсатора. Вольтметр показывает 500 В. Какова разность потенциалов на всей батарее?

Решение.

Найдем емкость конденсатора и параллельно соединенного с ним вольтметра:

$$C_1 = C + \frac{C}{2} = \frac{3}{2}C \ .$$

Тогда емкость всей батареи конденсаторов и вольтметра можно подсчитать, пользуясь соотношением:

$$\frac{1}{C_б} = \frac{4}{c} + \frac{2}{3C} = \frac{14}{3C} \ ,$$

откуда

$$C_б = \frac{3}{14}C \ .$$

Заряд на системе конденсатор - вольтметр $Q = C_1U_1$, но при последовательном соединении этот заряд будет и на всей батарее. Следовательно, разность потенциалов на батарее

$$U = \frac{Q}{C_б} = \frac{C_1U_1}{C_б} = \frac{3CU_1 \cdot 14}{2 \cdot 3C} = 7U_1 \, .$$

Подставляя данные задачи, получим:

U = 3500 В.

Задача 5. Два параллельных цилиндрических провода радиусом r = 0,5 мм расположены так, что расстояние между их осями d = 10 см. Найдите емкость единицы длины такой системы (система находится в воздухе).

Решение.

Так как d » r, то можно считать, что заряды распределены по поверхности проводников равномерно.

Напряженность в точке *A*, находящейся на расстоянии x от положительно заряженного провода

$$E = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d-x)} \, ,$$

где q_1 — заряд, приходящийся на единицу длины каждого провода.

Разность потенциалов между проводами

$$U = \int_r^{d-r} E dx = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_r^{d-r}\frac{dx}{x} + \int_r^{d-r}\frac{dx}{d-x}\right] =$$

$$= \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{r}{d-r}\right] = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r}{r}\right)^2 = \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r} \ .$$

Емкость каждой единицы длины такой системы проводов равна:

$$C_1 = \frac{q_1}{U}\frac{q_1 \pi\varepsilon_0}{q_1 \ln\frac{d}{r}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}}.$$

Вычисления приводят к результату:

$$C_1 = 3{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Задача 6. На плоский воздушный конденсатор подается разность потенциалов U = 2 кВ. Размеры пластин 40 × 60 см, расстояние между ними d = 0,5 см. После зарядки конденсатор отключают от источника и затем раздвигают его обкладки так, что расстояние между ними увеличивается вдвое. Определите: а) работу по раздвижению обкладок; б) плотность энергии электрического поля до и после раздвижения обкладок.

Решение.

Работа по раздвижению пластин равна изменению энергии заряженного конденсатора:

$$A = W_2 - W_1. \qquad 2.1.17)$$

Энергия конденсатора может быть выражена как

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} \text{ и } W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2}. \qquad (2.1.18)$$

Так как конденсатор был отключен от источника, то заряд на его обкладках не изменялся, т. е.

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \qquad (2.1.19)$$

Емкость конденсатора при первом положении обкладок

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

При раздвижении обкладок

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

Тогда на основании соотношения (2.1.19)

$$U_2 = \frac{U_1 C_1}{C_2} = 2U_1.$$

Следовательно, работа по раздвижению обкладок

$$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}(U_2^2 C_2 - U_1^2 C_1) = \frac{1}{2}(4U_1^2 \frac{C_1}{2} - U_1^2 C_1) = \frac{1}{2} U_1^2 C_1;$$

$$A = 84 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Плотность энергии электрического поля рассчитывается по формуле

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Плотность энергии поля до раздвижения пластин

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U_1^2}{d_1^2}.$$

Плотность энергии поля после раздвижения пластин

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U_2^2}{d_2^2},\ \text{но } U_2 = 2U_1,\ \text{а } d_2 = 2d_1,$$

поэтому

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U_1^2}{d_1^2}$$

т. е. плотность энергии не изменилась.

Задача 7. Два конденсатора емкостью 100 и 200 *см* каждый соединены последовательно, заряжены до разности потенциалов U_0 = 600 *В* и отключены от батареи. Конденсаторы, не разряжая, разъединяют и соединяют параллельно. Найти изменение заряда на каждом конденсаторе и разность потенциалов, которая установится при параллельном соединении.

Решение.

При последовательном соединении каждый конденсатор обладает зарядом, равным заряду всей системы:

$$q_{01} = q_{02} = Q_0. \qquad (2.1.20)$$

Здесь q_{01} и q_{02} - заряды 1-го и 2-го конденсаторов при последовательном соединении; Q_0- заряд системы.

Согласно определению

$$Q_0 = U_0 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (2.1.21)$$

Этот же заряд сохранится на каждом конденсаторе и после их разъединения.

При параллельном соединении конденсаторов перетекание зарядов будет продолжаться до тех пор, пока не установится одинаковая разность потенциалов U.

Разность потенциалов, общая для параллельного соединения, может быть найдена как отношение заряда Q системы к емкости батареи:

$$U = \frac{Q}{C_1 + C_2}; \qquad (2.1.22)$$

а заряд системы представляет собой сумму зарядов обоих конденсаторов:

$$Q = q_1 + q_2 = q_{01} + q_{02}. \qquad (2.1.23)$$

Здесь q_1 и q_2 - заряды на каждом из конденсаторов после параллельного соединения, причем

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= U \cdot C_1, \\ q_2 &= U \cdot C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.24)$$

Подставляя выражения (2.1.20) и (2.1.22) в (2.1.23), а затем в (2.1.22), получаем

$$U = \frac{2U_0 C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = 267\ В.$$

Учитывая выражения (2.1.24), находим изменения зарядов на каждом конденсаторе:

$$\Delta q_1 = q_1 - q_{01} = \frac{U_0 C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(\frac{2C_1}{C_1 + C_2} - 1\right) = \frac{U_0 C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}(C_1 - C_2);$$

$$\Delta q_2 = q_2 - q_{02} = \frac{U_0 C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(\frac{2C_2}{C_1 + C_2} - 1\right) = \frac{U_0 C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}(C_2 - C_1).$$

Подстановка числовых данных в эти формулы дает результат:

$$\Delta q_1 = -\,0{,}015\ мкК;$$
$$\Delta q_2 = +0{,}015\ мкК.$$

Задача 8. Плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S=200 $см^2$ каждая и расстоянием между ними l=5 *мм* заряжается до разности потенциалов U_0=600 *В* и отключается от батареи. Как изменяются емкость и энергия конденсатора, если в пространство между обкладками параллельно им внести металлическую пластину такой же площади и толщины l'=2 *мм*?

Решение.

Уменьшение расстояния между обкладками за счет внесения пластины вызовет увеличение емкости конденсатора на величину

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{l - l'} - \frac{\varepsilon_0 S}{l} = 23{,}6 \cdot 10^{-12}\ \textit{Ф}$$

(Здесь C_2 - конечная емкость конденсатора).

Изменение энергии конденсатора может быть рассчитано двумя способами.

1-й с п о с о б. Поскольку конденсатор отключен от батареи, заряд на его обкладках остается постоянным и равным

$$Q = C_1 U_0\ ,$$

где C_1 - начальная емкость конденсатора.

Изменение энергии конденсатора при изменении емкости равно

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2l^2} \cdot l' = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \textit{Дж}.$$

2-й с п о с о б. Постоянство заряда на обкладках конденсатора обуславливает постоянство напряженности поля, а, следовательно, и плотности энергии.

Но так как внутри внесенной металлической пластины поля нет, то убыль энергии конденсатора равна энергии электрического поля в объеме металлической пластинки:

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot S l'\ .$$

Здесь E – напряженность поля между обкладками.

Напряженность поля $E = \dfrac{U_0}{l}$. Окончательно получим

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2l^2} S l'\ .$$

Задача 9. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух пластин площадью S=200 *см*^{2} каждая, расположенных на расстоянии l_1=0,3 *см* друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками до l_2=0,5 *см*? Задачу решить для двух случаев: 1) конденсатор заряжают до U_0=600 *В* и отключают от батареи; 2) конденсатор остается все время соединенным с батареей, поддерживающей постоянную разность потенциалов U_0=600 *В*.

Решение.

Искомую работу можно рассчитать либо непосредственно как работу приложенной силы, либо из уравнения энергетического баланса.

Рассмотрим оба способа.

1-й с п о с о б. При бесконечно малом перемещении dl одной из пластин элементарная работа

$$\delta A'=Fdl; \qquad (2.1.25)$$

здесь F – приложенная сила, равная силе взаимодействия между пластинами, т.е.

$$F=E_1q,$$

где $q=\dfrac{\varepsilon_0 SU}{l}$ - заряд передвигаемой пластины, $E_1=\dfrac{U}{2l}$ - напряженность поля, создаваемого второй пластиной. Подстановка значений F, q, E_1 в формулу (2.1.25) дает

$$\delta A'=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2l^2}dl. \qquad (2.1.26)$$

Расстояние l между пластинами меняется от l_1 до l_2.

Если конденсатор отключен от батареи, то напряжение U на его обкладках непрерывно меняется, но заряд, а, следовательно, и напряженность поля между обкладками остаются неизменными. Это значит, что отношение

$$\frac{U}{l}=E=\text{const},$$

и тогда можно записать

$$\frac{U}{l}=\frac{U_0}{l_1}.$$

В этом случае выражение (2.1.26) примет вид

$$\Delta A_1'=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2l_1^2}dl.$$

Тогда полная работа внешних сил

$$A_1'=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2l_1^2}(l_2-l_1)=71.2\cdot 10^{-7}\ Дж.$$

Если конденсатор соединен с батареей, то напряжение U все время постоянно и равно U_0 , и, интегрируя выражение (2.1.26), получим, что работа внешних сил

$$A_2'=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dl}{l^2}=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2}\left(\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}\right)=42{,}7\cdot 10^{-7}\ Дж.$$

Задача 10. Воздушный конденсатор емкостью C_0 = 0,2 *мкФ* заряжен до разности потенциалов U_0 = 600 В. Найти изменение энергии конденсатора и работу, совершаемую силами поля, при заполнении конденсатора жидким диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Расчет произвести в двух случаях: 1) конденсатор отключен от батареи; 2) конденсатор соединен с батареей.

Решение.

Изменение энергии конденсатора согласно уравнению энергетического баланса определяется работой внешних сил, т.е. работой сил поля, взятой с обратным знаком и работой батареи - работой сил стороннего поля.

При введении в поле конденсатора диэлектрика на его поверхности вследствие поляризации образуются связанные заряды, и диэлектрик будет втягиваться в поле конденсатора. Следовательно, работа A сил поля будет обязательно положительной.

В первом случае, когда конденсатор отключен от батареи, при совершении силами поля положительной работы энергия конденсатора будет уменьшаться, т.е. изменение энергии

$$\Delta W_k = -A. \tag{2.1.27}$$

Во втором случае надо учитывать, что связанные заряды на поверхности диэлектрика, введенного между обкладками конденсатора, будут уменьшать напряженность результирующего поля, и разность потенциалов между обкладками конденсатора останется постоянной только за счет добавочных зарядов, посылаемых батареей.

Батарея будет совершать положительную работу, за счет чего будет возрастать энергия конденсатора. В этом случае изменение энергии

$$\Delta W_k = - A + A_{бат}. \tag{2.1.28}$$

Первый случай.

Энергию конденсатора удобно рассчитать по формуле:

$$W = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q - заряд конденсатора, остающийся постоянным; C – емкость конденсатора.

При заполнении конденсатора диэлектриком емкость его возрастает в ε раз до значения C_1. Соответственно с этим

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_0}\right). \tag{2.1.29}$$

Выразим заряд конденсатора через начальные значения емкости и разности потенциалов:

$$Q = C_0 U_0. \tag{2.1.30}$$

Подставляя выражение (2.1.30) в равенство (2.1.29) и учитывая, что $C_1 = \varepsilon C_0$, находим

$$\Delta W = \frac{C_0 U_0^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = -18 \cdot 10^{-3}\ Дж;$$

$$A_1 = -\Delta W = 18 \cdot 10^{-3}\ Дж.$$

Второй случай.

Изменение энергии конденсатора найдем из формулы

$$\Delta W = \frac{U_0^2}{2}(C_1 - C_0) = \frac{U_0^2 C_0}{2}(\varepsilon - 1). \qquad (2.1.31)$$

Работа батареи

$$A_б = \Delta Q U_0 = C_0 U_0^2 (\varepsilon - 1) \qquad (2.1.32)$$

Подставляя выражения (2.1.31) и (2.1.32) в равенство (2.1.28), находим искомую работу сил поля:

$$A_2 = A_б - \Delta W = \frac{C_0 U_0^2}{2}(\varepsilon - 1) = 36 \cdot 10^{-3}\ Дж$$

Задача 11. Альфа-частица, вылетающая при радиоактивном распаде из ядра атома радия со скоростью $\upsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ м/с, движется к неподвижному ядру натрия. На какое наименьшее расстояние приблизится α-частица к этому ядру?

Решение

Систему ядро натрия - α-частица можно рассматривать как замкнутую и считать ее консервативной, тогда полная энергия частицы, движущейся в потенциальном поле точечного заряда,

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + U = \text{const}, \text{где } \frac{m\upsilon^2}{2} \text{ - кинетическая энергия,}$$

U - потенциальная энергия частицы.

Потенциальная энергия частицы при бесконечном удалении ее от заряда, создающего поле, стремится к нулю .

Движение возможно до тех пор, пока частица обладает кинетической энергией, т. е. пока $E > U$ (рис. 1.2.6).

Кинетическая энергия α-частицы при приближении к ядру уменьшается. В начальный момент отношение скорости v к скорости света c таково, что $\beta^2 = \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2$ « 1, следовательно, в данном случае можно не учитывать релятивистский характер движения.

Наименьшее расстояние r_0, на которое α-частица сможет подойти к ядру натрия, определителя из условия:

$$E = U_{r_0}$$

т.е. когда вся кинетическая энергия частицы перейдет в потенциальную.

Но

$$U_{r_0} = \frac{q_\alpha q_{n\alpha}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0};\ \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{q_\alpha q_{N\alpha}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0},$$

или, учитывая данные задачи, получаем:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2e\cdot 11e}{r_0},$$

откуда

$$r_0 = \frac{11e^2}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 m\upsilon^2}.$$

Подстановка числовых данных СИ дает:

$$r_0 = 6\cdot 10^{-15}\ \text{м}.$$

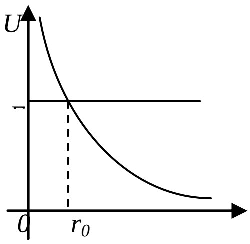

рис. 1.2.6

Задача 12. В простейшей двух электродной лампе катодом служит накаленная нить, натянутая вдоль оси цилиндра, являющегося анодом. Диаметр нити катода d_1 = 0,1 мм, диаметр цилиндра d_2 = 10 мм. Разность потенциалов между катодом и анодом U = 91 В. Начальная скорость электронов, покидающих катод, очень мала. Определите: а) ускорение и скорость электронов в точке, отстоящей от оси нити накала на расстоянии r = 3,5 мм; б) максимальную энергию, приобретенную электроном.

Решение.

а) По второму закону динамики ускорение тела в любой точке поля равно:

$$a = \frac{F}{m}$$

Но $F = eE$, поэтому

$$a = \frac{eE}{m} \qquad (2.1.33)$$

Напряженность поля определяется зарядом катода. Катод можно принять за цилиндр, тогда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}, \qquad (2.1.34)$$

где τ — линейная плотность заряда катода.

Для нахождения τ воспользуемся значением разности потенциалов на цилиндрическом конденсаторе:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

Отсюда

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (2.1.35)$$

С учетом соотношений (2.1.34) и (2.1.35) для ускорения а получим выражение:

$$a = \frac{eU}{rm\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (2.1.36)$$

Электрон попадает в ускоряющее поле, которое совершает работу по увеличению его кинетической энергии:

$$\Delta\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = e(\varphi_0 - \varphi_A),$$

где φ_A - потенциал в точке А,

φ_0 - потенциал катода.

Учитывая, что начальная скорость электронов мала, получим:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = e\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_1} \qquad (2.1.37)$$

Подставим значение τ из (2.1.35), тогда

$$\upsilon^2 = \frac{2eU\ln\frac{r}{r_1}}{m\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (2.1.38)$$

б) Максимальную энергию, электрон получит, пройдя наибольшую разность потенциалов, т. е. при достижении анода:

$$W_{\text{макс}} = eU. \qquad (2.1.39)$$

Проведем вычисления в СИ:

$a = 10^{15}$ м/с^2; $\upsilon = 5{,}4 \cdot 10^6$м/с; $W_{\text{макс}} = 1{,}46 \cdot 10^{-17}$ Дж.

Задача 13. В электроннолучевой трубке расстояние от конца управляющих горизонтальных пластин до экрана l = 25 см. Длина пластин b = 6 см, расстояние между ними h = 1,8 см. При разности потенциалов на отклоняющих пластинах U = 50 В светящееся пятно на экране смещается на s = 21 мм от места, где оно получается в отсутствие разности потенциалов (рис. 2.1.7.). С какой скоростью электроны влетают в поле отклоняющих пластин? (Действие силы тяжести не учитывать.)

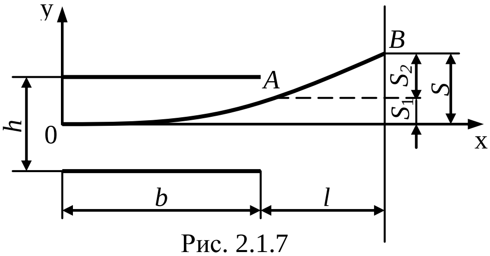

Рис. 2.1.7

Решение

Электрон в электрическом поле отклоняющих пластин движется по параболе. Сделаем допущение, что электрическое поле отклоняющих пластин однородно и за пределами пластин отсутствует. Выберем систему координат с началом в точке O. Движение электрона вдоль оси X равномерное, поэтому

$$t = \frac{x}{\upsilon_0} \qquad (2.1.40)$$

В момент попадания электрона в поле отклоняющих пластин $y_0 = 0$ и $\upsilon_{y0} = 0$. Уравнение движения на участке OА:

$$my = eE = e\frac{U}{h}.$$

Откуда

$$my = e\frac{U}{h}t \quad \text{и} \quad my = ½e\frac{U}{h}t^{2\cdot}$$

Заменив t его значением из (2.1.40), получаем:

$$y = \frac{1}{2} e \frac{U}{mh} \frac{x^2}{\upsilon_0^2}.$$

Отклонение, приобретенное на участке *OA* (при $x = b$, $y = s_1$):

$$s_1 = \frac{1}{2} e \frac{U}{mh} \frac{b^2}{\upsilon_0^2}.$$

На участке *AB* движение равномерное, прямолинейное:

$$s_2 = l tg\alpha = l\left(\frac{dy}{dx}\right)_A; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e \frac{2xU}{hm\upsilon_0^2};$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{eUb}{mh\upsilon_0^2} \quad \text{и} \quad s_2 = l\frac{eUb}{mh\upsilon_0^2};$$

Тогда

$$s = s_1 + s_2.$$

$$s = \frac{eUb}{mh\upsilon_0^2}\left(\frac{1}{2}b + l\right);$$

откуда

$$\upsilon_0^2 = \frac{eUb}{mhs}\left(\frac{1}{2}b + l\right).$$

Подстановка числовых данных дает $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^7$ м/с.

Индивидуальные задания

1.2.1. Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью ρ = 5нКл/м^3 по шару радиусом R = 10см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5$. Определить напряженность электростатического поля на расстояниях r_1 = 5см и r_2 = 15см от центра шара.

Ответ: $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon}$; E_1 = 1,88 В/м; $E_1 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon}$; E_2 = 8,37 В/м

1.2.2. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов U_1 = 500В. Площадь пластин S = 200см^3, расстояние между ними d = 1,5 см. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин (ε = 2). Определить разность потенциалов между пластинами после внесения диэлектрика и емкости конденсатора до и после внесения диэлектрика.

Ответ: $U_2 = 250$В, $C_1 = 118$ пФ;

1.2.3. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U_0 = 300В, при прохождении через плоский незаряженный, горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на экране, расположенном на расстоянии x = 12см от конца конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние y = 3см. Расстояние между пластинами d = 1,4см, длина конденсатора l = 6см. Найти разность потенциалов, приложенную к пластинам конденсатора. Ответ: $U = \dfrac{2Uyd}{l\left(x + \frac{l}{2}\right)}$

1.2.4. Два электрона удерживаются в равновесии за счет нити длины l. Система находится на горизонтальной поверхности. Нить пережигают. Какую максимальную скорость приобретут электроны, если коэффициент трения μ, а масса электрона m ?

Ответ: $U_{\max} = \dfrac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ml}} - \dfrac{1}{\sqrt{\mu gl}}$

1.2.5. Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 4см. Электрон начинает двигаться от отрицательно заряженной пластины в тот момент, когда от положительно заряженной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии l от положительной пластины встретятся электрон и протон? Ответ: l = 22мкм

1.2.6. Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 1см. От одной из пластин одновременно начинают двигаться протон и a^- частица. Какое расстояние l пройдет a^- частица за то время, в течение которого протон пройдет весь путь от одной пластины до другой?

Ответ: l = 0,5 см

1.2.7. Электрон с некоторой начальной скоростью v_0 влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Разность потенциалов между пластинами конденсатора U = 300В; расстояние между пластинами d = 2см; длина конденсатора l = 10см. Какова должна быть предельная начальная скорость электрона, чтобы он не вылетел из конденсатора?

Ответ: $\upsilon_0 =\leq \sqrt{\dfrac{|e|E}{md}}$; υ_0 = 3,64·107 м/с;

1.2.8. Электрон движется в плоском горизонтально расположенном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью υ = 3,6·10^{7}м/с. Напряженность поля внутри конденсатора E = 3,7кВ/м; длина пластин конденсатора l = 20см. На какое расстояние сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе? Ответ: 1см

1.2.9. Восемь заряженных водяных капель радиусом r = 1мм и зарядом q = 0,1нКл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найти потенциал большой капли.

Ответ: $\varphi = n^{\frac{2}{3}} q \left(4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r\right)$; φ= 3,6 кВ

1.2.10. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов U = 300В. Определить разность потенциалов этой системы, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить слюдой ($\varepsilon = 7$).

Ответ: 75 В.

1.2.11. Два металлических шара радиусами R_1 = 2см и R_2 = 6см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд q = 1нКл. Какова поверхностная плотность зарядов на шарах? Ответ: $\sigma = \dfrac{q}{4\pi R^2}$

1.2.12. Шар радиусом R_1 = 6см заряжен до потенциала φ_1 = 300В, а шар радиусом R_2 = 4см до потенциала φ_2 = 500В. Определить потенциалы шаров после того, как их соединили металлическим проводником, емкостью которого можно пренебречь.

Ответ: $\varphi = \dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}$; φ = 380 В.

1.2.13. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов U = 600В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком. Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до U_1 = 100В. Ответ:5

1.2.14. Найти соотношение между радиусом шара R и максимальным значением потенциала φ, до которого он может быть заряжен в воздухе, если при нормальном давлении разряд в воздухе наступает при напряженности электрического поля E = 3МВ/м. Каким будет максимальный потенциал шара диаметром D = 1м.

Ответ: $\varphi = E_0 R$; φ_{max}=1,5 нВ

1.2.15. Два конденсатора емкостью C_1 = 3мкФ и C_2 = 6мкФ соединены последовательно и присоединены к батарее с ЭДС ε = 120В. Определить заряд каждого конденсатора и разность потенциалов между его обкладками.

Ответ: $\varphi_1 = \dfrac{\varepsilon C_2}{C_1 + C_2}$; φ_1 = 80В; φ_2 = 40В; $Q_1 = Q_2$ = 0,36 нК;

1.2.16.Определите емкость плоского конденсатора, между обкладками которого находится стекло ($d_1 = 10^{-4}$м), покрытое с обеих сторон слоем парафина толщиной $d_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$м. Площадь обкладок конденсатора S = 0,02 м^2. Ответ: C = 51,6 пФ

1.2.17.Две плоские пластинки площадью S = 200 см^2 каждая, заряженные равными по величине зарядами, притягиваются в керосине с силой $F = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Н. Расстояние между пластинками очень мало. Определите находящиеся на них заряды. Ответ: $q = 1{,}33 \cdot 10^{-7}$ Кл.

1.2.18.Два конденсатора, емкости которых C_1 = 600 пФ и C_2 = 1000 пФ, соединены последовательно. Батарею заряжают до разности потенциалов U = 20 кВ. Затем конденсаторы не разряжая соединяют параллельно. Определите работу разряда , происходящего при этом переключении. Ответ: $A = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$Дж

1.2.19.Емкость батареи конденсаторов, образованной двумя последовательно соединенными конденсаторами C = 100пФ, а заряд q = 20нКл. Определить емкость второго конденсатора, а также разность потенциалов на обкладках каждого конденсатора, если C_1 = 200пФ.

Ответ: $C_2 = \dfrac{CC_1}{C_1 - C}$; C_2=200 пФ; U_1=100 В; U_2=100 В.

1.2.20. Уединенная металлическая сфера электроемкостью C = 4пФ заряжена до потенциала φ = 1кВ. Определить энергию поля, заключенную в сферическом слое между сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в 4 раза больше радиуса сферы. Ответ: $W = \dfrac{3c\varphi^2}{8}$; W = 1,5мкДж.

1.2.21. Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 = 20см и R_2 = 50см заряжены соответственно одинаковыми зарядами q = 100нКл. Определить энергию электрического поля, заключенного между этими сферами.

Ответ: $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$; W = 135 мкДж

1.2.22. Сплошной эбонитовый шар (ε = 3) радиусом R = 5см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ=10нКл/м^3. Определить энергию электростатического поля, заключенную внутри шара.

Ответ: W = 2,46 пДж

1.2.23. Сплошной шар из диэлектрика радиусом R = 5см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ=10нКл/м^3. Определить энергию электростатического поля, заключенную в окружающем шар пространстве.

Ответ: $W = \dfrac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon\ \varepsilon} R^5$; W = 0, 164 пДж.

1.2.24. Плоский воздушный конденсатор емкостью C = 10пФ зарядили до разности потенциалов U_1=500 В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в 3 раза. Определить: 1)разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2)работу внешних сил по раздвижению пластин.

Ответ: U_2 = 1,5 кВ; A = 2,5 мкДж.

1.2.25. Разность потенциалов между пластинами плосеого конденсатора U = 100В. Площадь каждой пластины S = 200 см^2 , расстояние между пластинами d =0,5 мм, пространство между ними заполнено парафином. Определите силу притяжения пластин друг к другу. Ответ: $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2}$; F = 7,08 мН

1.2.26.Конденсаторы соединены в батареи (рис. 1.1.8, а и б). Каковы емкости этих батарей? Покажите, что емкости этих батарей равны, если выполняется условие: $\dfrac{C_1}{C_3} = \dfrac{C_2}{C_4} = k$?

Ответ: $C_а = \dfrac{C_1 + C_2}{1 + k} = C_б$

1.2.27. Конденсатор емкостью C заряжен от источника постоянной ЭДС через сопротивление R. С каким КПД происходит процесс зарядки? Ответ: 0,5

1.2.28. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (ε = 5), объем которого V = 20см^3. Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора σ = 8,35мкКл/м^2 . Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора.

Ответ: A_1 = 19,7 мкДж; A_2 = 98 мкДж.

1.2.29. Между пластинами плоского конденсатора вложена тонкая пластинка из диэлектрика ($\varepsilon = 6$). Какое давление испытывает эта пластинка, если напряженность электрического поля $E = 1$МВ/м?

Ответ: $p = 26{,}5$ Па

1.2.30. Конденсаторы C_1 с C_2 подключаются к источнику ЭДС Е (рис. 1.1.9). Вначале переключатель находится в положении 1, так что заряжается конденсатор C_1, затем переключатель занимает положение 2. Как при этом изменится энергия системы конденсаторов? Рассмотрите случаи: $C_1 = C_2$; $C_1 > C_2$; $C_1 < C_2$;

Ответ: $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{C_1 + C_2}{C_1}$.

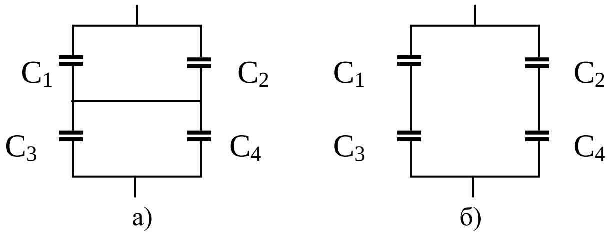

Рис. 1.1.8

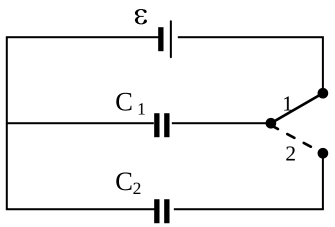

Рис. 1.1.9