Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Практикум

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2008

ББК 22.11
М 33

Рецензенты: С.В. Киселевская, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математики и моделирования;
Н.А. Бажанова, ст. преп. каф. математики и моделирования

М 33 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ: практикум / авт.-сост. О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная, Н.Н. Одияко, Г.И. Шуман. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 84 с.

Практикум совмещает теоретический материал изучаемых в курсе «Математическое моделирование экономических процессов и систем» и практические задания по решению соответствующих задач с использованием информационной системы Excel. Приведены примеры задач. Имеются задачи для самостоятельного решения.

Для студентов экономических специальностей.

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование экономических процессов и систем является важнейшим инструментом исследования и прогнозирования. При изучении различных экономических явлений используют их формальные описания. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия и использовать эти оценки в управлении, в частности, предсказывать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров. Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации, дают более глубокие представления о закономерностях экономических процессов, способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне. Характерной чертой современной экономики является более широкое использование экономико-математических методов и моделей для управления экономическими процессами и системами.

Использование математических методов и моделей актуально как на уровне деятельности фирмы в условиях рынка, так и на макроэкономическом уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны. В учебное пособие включены такие прикладные модели (модели спроса и потребления, модели производителя), в которых решаются задача об оптимальном выборе, а также динамические модели экономического роста. Экономический рост можно рассматривать как увеличение объема создаваемых полезностей, и, следовательно, как повышение жизненного уровня населения. Особенностью данного пособия является использование электронных таблиц Excel как для графического анализа моделей, так и для построения регрессионных уравнений экономических процессов. Учебное пособие подготовлено в соответствии с программой дисциплины «Математическое моделирование экономических процессов и систем» для специальностей «Математические методы в экономике» и «Бизнес-информатика» на основе Государственных образовательных стандартов.

Отдельные темы данного учебного пособия могут быть использованы для специальностей «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет и аудит», «Менеджмент», «Маркетинг», «Экономика и управление на предприятии», «Мировая экономика», «Управление персоналом» и других экономических специальностей. Это объясняется тем, что в пособии рассматриваются экономико-математические модели, общие для изучения всеми перечисленными специальностями. Учебное пособие совмещает теоретические основы изучаемого материала в курсе «Математическое моделирование экономических процессов и систем» и практические задания для решения соответствующих задач с использованием информационной системы Excel.

1. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Анализ функций спроса и потребления

Функции потребления отражают конечные результаты использования различных потребительских благ. Функции потребления называют также функциями уровня жизни, функциями благосостояния, функциями полезности. Они характеризуют совместное потребление некоторого набора благ и определяют уровень потребления. В пространстве благ каждой функции полезности (потребления) соответствует некоторое семейство непересекающихся поверхностей безразличия, соответствующих определенным уровням потребления набора благ. При установленных ценах и имеющемся доходе потребитель стремится получить максимум полезности. Для этого потребитель должен выбирать блага таким образом, чтобы отношение предельной полезности благ к их цене были одинаковыми для всех приобретенных благ. Другими словами, в оптимальном наборе благ предельные полезности выбираемых благ должны быть пропорциональны ценам: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i$.

Геометрическая интерпретация максимизации функции полезности заключается в том, что максимальная полезность достигается в точке касания самой высокой кривой безразличия с бюджетной линией. Такая точка называется точкой равновесия. В этой точке наклон бюджетной линии и кривой безразличия равны. Так как наклон бюджетной линии равен обратному соотношению цен, а наклон кривой безразличия равен обратному соотношению предельных полезностей, то равенство соотношения цен соотношению предельных полезностей существует только в точке равновесия: $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \dfrac{p_i}{p_j}$.

Функции потребления (полезности) могут быть преобразованы в функции покупательского спроса. При этом предполагается, что потребитель максимизирует полезность в рамках своего дохода с учетом цены каждого блага. Функции спроса могут охватывать всю сферу потребления (макроэкономические функции) и отражать индивидуальный спрос (микроэкономические функции). При анализе функции спроса большое значение имеет определение эластичности факторов, особенно относительно дохода и цен.

Эластичность по доходу представляет собой процентное изменение спроса на благо (товар) при изменении дохода на один процент.

Эластичность спроса по цене является мерой чувствительности спроса на изменение дохода. Различают прямые и перекрестные эластичности по цене. В первом случае измеряется изменение спроса на благо при изменении на один процент его же цены. Во втором случае измеряется изменение спроса на благо при изменении на один процент цены другого блага. Наконец, большое значение при анализе имеет расчет частной эластичности замены одного блага другим. Если эта эластичность отрицательна, то блага являются дополняющими, если равна нулю, то блага являются независимыми, если положительна, то блага являются конкурирующими.

Пример. Функция полезности имеет вид:

$$u(x_1; x_2) = (x_1 + 4)(x_2 + 5),$$

бюджет потребителя $I = 55$, известны цены первого блага и второго $p_1 = 2$; $p_2 = 1$.

Требуется:

– записать уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия;

– определить перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя;

– определить перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия, связанного с повышением цены на второе благо до двух единиц;

– определить разность между компенсирующим и эквивалентным изменениями дохода.

Решение: а) найдем уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия. Потребитель будет находиться в состоянии равновесия, когда отношение предельных полезностей благ пропорционально ценам этих благ. Найдем предельные полезности каждого блага:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 + 5 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 + 4,$$

тогда

$$\frac{x_2 + 5}{x_1 + 4} = \frac{2}{1}, \text{ откуда } x_2 = 2x_1 + 3.$$

Подставим $x_2 = 2x_1 + 3$ в бюджетное ограничение $2x_1 + x_2 = 55$, тогда $x_1^* = 13$, $x_2^* = 29$. Значения x_1^*, x_2^* – оптимальный набор благ, при котором достигается максимальная полезность и потребитель находится в состоянии равновесия.

В этом случае максимальное значение функции полезности принимает значение: $u(x_1, x_2) = (13+4)(29+5) = 578$.

Найдем уравнение кривой безразличия, на которой оказался потребитель в момент равновесия:

$$578 = (x_1 + 4)(x_2 + 5) ,$$

откуда

$$x_2 = \frac{558 - 5x_1}{x_1 + 4} ; \tag{1.1}$$

б) определим перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя. Из условия равновесия потребителя

$$\frac{x_2 + 5}{x_1 + 4} = \frac{p_1}{p_2}$$

выразим

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}(x_1 + 4) - 5 . \tag{1.2}$$

Подставим это выражение в бюджетное уравнение $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 55$, и найдем функцию спроса на первое благо:

$$p_1 x_1 + p_2\left[\frac{p_1}{p_2}(x_1 + 4) - 5\right] = 55 ,$$

$$p_1 x_1 + p_1(x_1 + 4) - 5p_2 = 55,\ \ p_1 x_1 + p_1 x_1 + 4p_1 - 5p_2 = 55, \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{55 - 4p_1 + 5p_2}{2p_1} . \tag{1.3}$$

Найдем функцию спроса на второе благо. Подставим выражение (1.2) в выражение (1.3):

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{55 - 4p_1 + 5p_2}{2p_1} + 4\right) - 5 = \frac{55 - 4p_1 + 5p_2}{2p_2} + \frac{4p_1}{p_2} - 5 =$$

$$= \frac{55 - 4p_1 + 5p_2 + 8p_1 - 10p_2}{2p_2} = \frac{55 + 4p_1 - 5p_2}{2p_2} .$$

Итак, функция спроса на второе благо имеет вид:

$$x_2 = \frac{55 + 4p_1 - 5p_2}{2p_2}. \qquad (1.4)$$

Найдем перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя:

$$E_{21} = \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{2p_1 p_2}{55 + 4p_1 - 5p_2} \cdot \frac{4}{2p_2} = \frac{4p_1}{55 + 4p_1 - 5p_2}.$$

Подставим в это выражение значения $p_1 = 2, p_2 = 1$, получим

$E_{21} = 0{,}138$. Это значит, что при увеличении цены первого блага на один процент (при неизменной цене на второе благо), спрос на второе благо увеличится на 0,138 процента Спрос на второе благо неэластичный: при изменении цены на один процент на первое благо, спрос на второе благо изменился менее чем на один процент;

в) определим перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия, связанного с повышением цены на второе благо до двух единиц. Если цена на второе благо увеличится до двух единиц, потребитель достигает равновесия при выполнении условия:

$$\frac{x_2 + 5}{x_1 + 4} = \frac{2}{2}, \text{ тогда } x_1 = x_2 + 1.$$

При имеющемся бюджете $I = 55$ и новых ценах потребитель приобретет первое и второе блага в количестве: $x_1^* = 14{,}25$ и $x_2^* = 13{,}25$, Значения x_1^*, x_2^* – новый набор благ, при котором достигается максимальная полезность и потребитель находится в состоянии равновесия после повышения цены на второе благо.

Найдем перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия:

$$E_{12} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{p_2 \cdot 2p_1}{55 - 4p_1 + 5p_2} \cdot \frac{5}{2p_1} = \frac{5p_2}{55 - 4p_1 + 5p_2}.$$

С учетом того, что $p_1 = 2, p_2 = 2$, получим $E_{12} = 0{,}175$. Это значит, что при увеличении цены на второе благо на один процент (при неизменной цене на первое благо), спрос на первое благо увеличится на 0,175 процента. Спрос на первое благо неэластичный: при изменении цены на один процент на второе благо, спрос на первое благо изменится менее чем на один процент;

д) определим разность между компенсирующим и эквивалентным изменениями дохода. Вычислим значение функции полезности после повышения цены на второе благо в точке равновесия:

$$u_1(x_1, x_2) = (14{,}25+4)(13{,}25+5) = 333{,}06 \approx 333\,.$$

Соответствующее уравнение кривой безразличия:

$$333 = (x_1+4)(x_2+5) \text{ или } x_2 = \frac{313-5x_1}{x_1+4}\,.$$

Найдем точку касания новой кривой безразличия с прямой, которая параллельна исходной бюджетной линии $2x_1 + x_2 = 55$, в которой предельная норма замещения благ равна $MRS_{12} = \frac{dx_2}{dx_1} = -2$. В точке касания, наклон кривой безразличия $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-5(x_1+4)-(313-5x_1)}{(x_1+4)^2}$ равен наклону бюджетной линии $\frac{dx_2}{dx_1} = -2$.

Тогда $\frac{5(x_1+4)+(313-5x_1)}{(x_1+4)^2} = 2$ или $(x_1+4)^2 = 166{,}5$. Решая квадратное уравнение $x_1^2 + 8x_1 - 150{,}5 = 0$, получим $x_1 = 8{,}9$ (выбираем значение $x > 0$), тогда $x_2 = 20{,}8$. Для покупки такого набора благ достаточен бюджет в размере $I = 2 \cdot 8{,}9 + 20{,}8 = 38{,}6$. Уравнение новой бюджетной линии (прямой, которая параллельна исходной бюджетной линии) имеет вид $2x_1 + x_2 = 38{,}6$.

Если бы при исходной системе цен бюджет потребления сократился на $55 - 38{,}6 = 16{,}4$, то его благосостояние снизилось бы на столько же, на сколько оно упало вследствие подорожания второго благ. Это эквивалентное изменение дохода. Графическое представление эквивалентного изменения дохода видно из графиков на рис. 1.1 и 1.2. На рис. 1.1 построены: кривая безразличия $x_2 = \frac{558-5x_1}{x_1+4}$ (ряд 2) и бюджетная линия $2x_1 + x_2 = 55$ (ряд 1) с точкой равновесия (13;29); кривая безразличия $x_2 = \frac{312{,}82-5x_1}{x_1+4}$ (ряд 4) и бюджетная линия $2x_1 + x_2 = 36{,}8$ (ряд 3) с точкой равновесия (8,9;20,8).

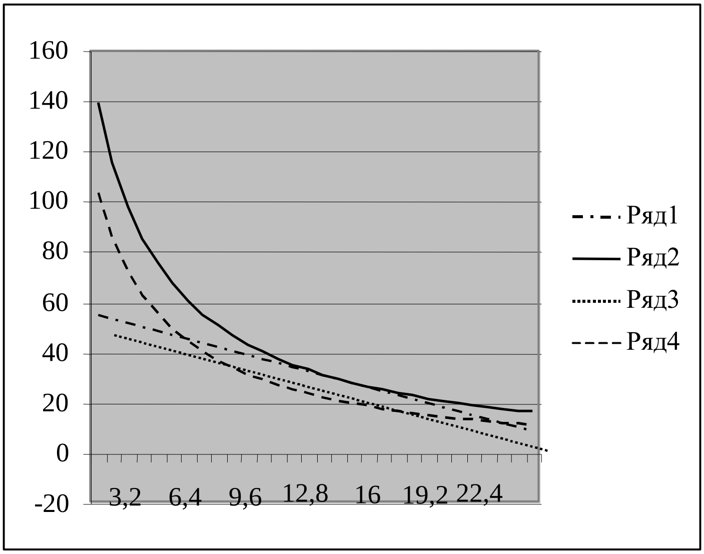


Рис. 1.1. Эквивалентное изменение дохода (доход изменился, цена не изменилась)

На рис. 1.2 построены: кривая безразличия $x_2 = \dfrac{558 - 5x_1}{x_1 + 4}$ (ряд 1) и бюджетная линия $2x_1 + x_2 = 55$ (ряд 2) с точкой равновесия (13;29); кривая безразличия $x_2 = \dfrac{313 - 5x_1}{x_1 + 4}$ (ряд 3) и бюджетная линия $2x_1 + 2x_2 = 55$ (ряд 4) с точкой равновесия (14,25;13,25).

Для определения компенсирующего изменения дохода найдем точку касания исходной кривой безразличия

$$x_2 = \frac{558 - 5x_1}{x_1 + 4}$$

с прямой, параллельной новой бюджетной линии: $2x_1 + 2x_2 = 55$.

В точке равновесия наклон исходной кривой безразличия:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-5(x_1 + 4) - (558 - 5x_1)}{(x_1 + 4)^2}$$

и наклон бюджетной линии: $\frac{dx_2}{dx_1} = -1$, равны: $\frac{5(x_1+4)+(558-5x_1)}{(x_1+4)^2} = 1$ или $(x_1+4)^2 = 578$.

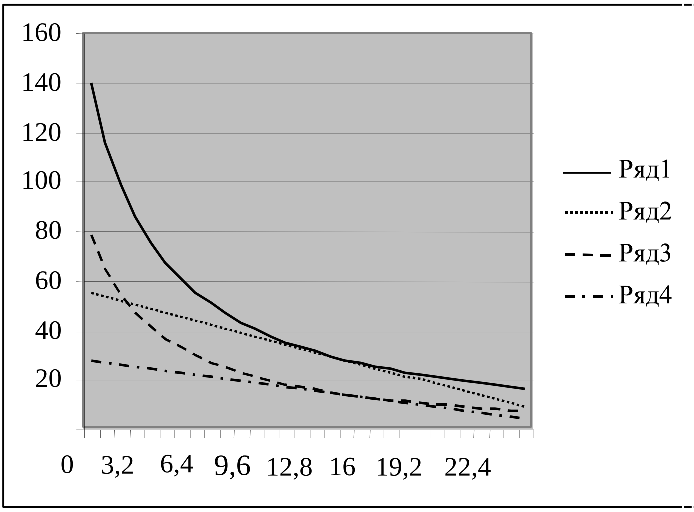


Рис. 1.2. Эквивалентное изменение дохода (доход не изменился, цена изменилась)

Решая квадратное уравнение $x_1^2 + 8x_1 - 562 = 0$, получим $x_1 = 20{,}04$, тогда $x_2 = \frac{558-5x_1}{x_1+4} = 19{,}04$. На покупку такого набора благ необходимо израсходовать $2 \cdot 20{,}04 + 2 \cdot 19{,}04 = 78{,}16$. Уравнение соответствующей бюджетной линии имеет вид:

$$2x_1 + 2x_2 = 78{,}16.$$

Чтобы в новой системе цен благосостояние потребителя стало таким же, каким оно было до повышения цены на второй благо, надо увеличить его бюджет на $78{,}16 - 55 = 23{,}16$.

Это компенсирующее изменение дохода. Разность между компенсирующим и эквивалентным изменением дохода: $23{,}16 - 16{,}4 = 6{,}76$. На рис. 1.3 построены: кривая безразличия $x_2 = \frac{558-5x_1}{x_1+4}$ (ряд 1) и бюджетная линия $2x_1 + x_2 = 55$ (ряд 2) с точкой равновесия (13;29); кривая безразличия в новой системе цен $x_2 = \dfrac{557{,}92 - 5x_1}{x_1 + 4}$ (ряд3) и бюджетная линия $2x_1 + 2x_2 = 55 + 23{,}16 = 78{,}16$ (ряд 4) с точкой равновесия (20,04;19,04). Из графиков кривых безразличия (с незначительной погрешностью за счет округления) видно, что после увеличения дохода в новой системе цен благосостояние потребителя такое же, как и до повышения цены на второе благо.

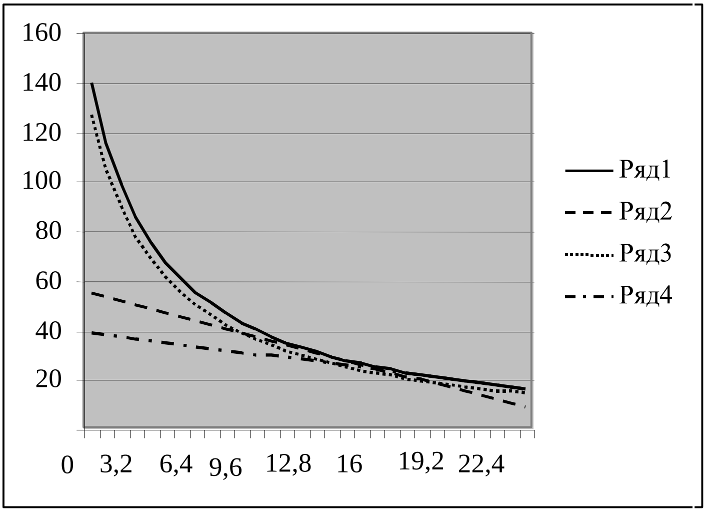


Рис. 1.3. Компенсирующее изменение дохода

Пример. При разработке плана заказа путевок для оздоровительных мероприятий коллектива фирмы проведены исследования потребностей сотрудников фирмы на путевки по туристическим маршрутам (x_1) и путевки санаторно-курортного лечения (x_2). В результате регрессионного анализа получена следующая зависимость денежных средств, вносимых сотрудниками за путевки, от числа путевок указанных видов: $u(x_1, x_2) = 90x_1 - x_1^2 + 50x_2 - x_2^2$. Построить карту линий безразличия и выполнить расчеты вариантов потребления путевок.

Решение: а) построим карту безразличия для заданной функции. Кривые безразличия являются линиями равного уровня, на которых функция полезности $u(x_1, x_2)$ (или другими словами уровень затрат) принимает одно и тоже значение. Для построения кривых безразличия следует выразить одно из благ через другое и уровень затрат, величина которого принимает постоянное значение u_c.

Например, выразим x_2: $x_2^2 - 50x_2 = 90x_1 - x_1^2 - u_c$, $(x_2^2 - 50x_2 + 625) - 625 = 90x_1 - x_1^2 - u_c$, $(x_2 - 25)^2 = 90x_1 - x_1^2 - u_c + 625$, $x_2 = 25 \pm \sqrt{625 + 90x_1 - x_1^2 - u_c}$.

Подставляя различные значения x_1 при равных значениях u_c можно построить кривые безразличия. В нашем случае функция $u(x_1, x_2)$ при $u(x_1, x_2) = u_C$ представляет собой уравнение окружности. Запишем его в каноническом виде:

$$(x_2 - 25)^2 + x_1^2 - 90x_1 = 625 - u_c,$$

$$(x_2 - 25)^2 + (x_1^2 - 90x_1 + 2025) - 2025 = 625 - u_c$$

$$(x_2 - 25)^2 + (x_1 - 45)^2 = 2650 - u_c.$$

Центр окружности находится в точке С(45;25), а радиус $R = \sqrt{2650 - u_c}$. Найдем кривые безразличия для значений функции полезности $u(x_1, x_2)$, равных $650; 1000; 1800$. Радиусы окружностей, определяющих кривые функции полезности соответственно равны: $\sqrt{2650 - 650} = 44{,}72$; $\sqrt{2650 - 1000} = 40{,}62$; $\sqrt{2650 - 1800} = 29{,}15$. Так как x_1 и x_2 положительны, дуги кривых расположены только в первом квадранте координат. Результаты построения кривых безразличия представлены на рис. 1.4. Кривая безразличия $x_2 = 25 - \sqrt{625 - x_1^2 + 90x_1 - 650}$ (ряд 1) соответствует уровню потребления, равному 650. Кривая безразличия $x_2 = 25 - \sqrt{625 - x_1^2 + 90x_1 - 1000}$ (ряд 2) соответствует уровню потребления 1000. Кривая безразличия $x_2 = 25 - \sqrt{625 - x_1^2 + 90x_1 - 1800}$ (ряд 3) соответствует уровню потребления 1800;

2) предположим, что в базовом периоде в фирме использовалось 20 туристических и 10 санаторно-курортных путевок. Предельная норма заменяемости путевок (или эквивалентная норма заменяемости)

$$\gamma = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} = -\frac{25 - x_2}{45 - x_1} = -\frac{15}{25} = -0{,}6,$$

а расходы на приобретение путевок составляли 1800. В планируемом периоде предполагается, что расходы на приобретение путевок увеличатся до 2000. Требуется рассчитать, сколько путевок будет приобретено, если предельная норма заменяемости путевок не изменится. Рассмотрим, каким образом изменится предельная норма заменяемости, в случаях: а) предложение путевок санаторно-курортного лечения останется на базовом уровне; б) предложение возрастет до 15 штук; в) предложение возрастет до 20 штук.

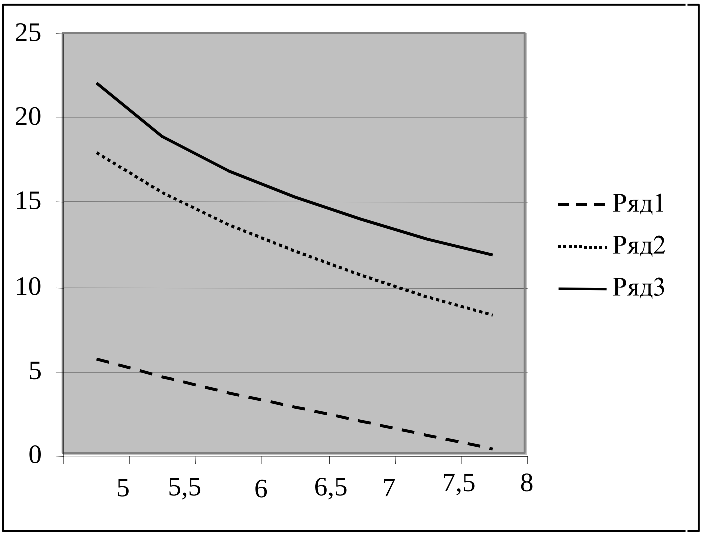


Рис. 1.4. Кривые безразличия для разных уровней потребления

При неизменной предельной норме заменяемости в плановом периоде, значения x_1 и x_2 найдем, решая совместно заданное уравнение функции полезности и прямой предпочтения:

$$2000 = 90x_1 - x_1^2 + 50x_2 - x_2^2 ,$$

$$x_2 - 25 = 0{,}6(x_1 - 45) .$$

При решении получаются два корня $x_1 = 23{,}14$ и $x_1 = 66{,}66$. Второй корень необходимо отбросить как нереальный. Тогда значение $x_2 = 11{,}9$, то есть примерно 11–12 штук. Следовательно, при неизменной предельной норме заменяемости, при увеличении расхода на путевки до 2000, то есть на (2000:1800)100%-100%=11,1%, число туристических путевок увеличится на четыре штуки (или на 20 процентов), а путевок санаторно-курортного лечения на две штуки (или на 20 процентов). Таким образом, при определении предложения путевок санаторно-курортного типа в плановом периоде будем иметь:

– если предложение путевок санаторно-курортного лечения останется на базовом уровне, то из уравнения $2000 = 90x_1 - x_1^2 + 50 \cdot 10 - 10^2$ находим число туристических путевок. Оно будет равно примерно 24–25 штук, а предельная норма заменяемости определится из соотношения

$$\gamma = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{25-10}{45-24} = -\frac{15}{21} = -0{,}71\,;$$

– если предложение путевок санаторно-курортного лечения возрастет до 15 штук, то число туристических путевок будет примерно равно 21-22 штукам, а $\gamma = \dfrac{dx_1}{dx_2} = -0{,}42$;

– если предложение путевок санаторно-курортного лечения возрастет до 20 штук, то $x_1 = 20$ и $\gamma = -0{,}2$.

Результаты анализа говорят о том, что с ростом предложения путевок санаторно-курортного лечения число туристических путевок незначительно снижается, а предельная норма заменяемости этих благ резко дифференцируется.

Получим функцию спроса из функции полезности (потребления) при известеном доходе потребителя и ценах благ, будем исходить из гипотезы, что потребитель тратит весь свой бюджет на приобретение рассматриваемого набора благ.

Предположим, что средняя стоимость туристической путевки составляет $p_1 = 50$ д.е., а стоимость путевки санаторно-курортного лечения $p_2 = 130$ д.е. Установлено также, что на приобретение путевок в год фирма может выделить а) 10 000 д.е. и б) 100 000 д.е. Требуется найти функцию спроса для целевой функции потребления путевок на предприятии в целом и определить оптимальный спрос на путевки для вариантов а) и б).

Распределение средств на приобретение путевок осуществляется в соответствии с бюджетным ограничением:

$$I = p_1 x_1 + p_2 x_2\,, \qquad (1.5)$$

где I – затрачиваемые денежные средства (доход потребителя).

Из задачи о максимальном выборе потребителя следует, что отношение предельных полезностей благ пропорционально ценам этих благ $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2}$, тогда $\dfrac{90-2x_1}{50-2x_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ или $\dfrac{45-x_1}{25-x_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Выразим x_1 через x_2:

$$45 - x_1 = \frac{p_1}{p_2}(25 - x_2),$$

$$x_1 = 45 - \frac{p_1}{p_2}(25 - x_2). \qquad (1.6)$$

Подставим (1.6) в (1.5) получим:

$$I = p_1\left(45 - \frac{p_1}{p_2}(25 - x_2)\right) + p_2 x_2,$$

$$Ip_2 = 45 p_1 p_2 - 25 p_1^2 + p_1^2 x_2 + p_2^2 x_2,$$

$$x_2(p_1^2 + p_2^2) = Ip_2 - 45 p_1 p_2 + 25 p_1^2,$$

откуда $x_2^* = \dfrac{Ip_2 - 45 p_1 p_2 + 25 p_1^2}{p_1^2 + p_2^2}$,

тогда $x_1^* = \dfrac{Ip_1 - 25 p_1 p_2 + 45 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2}$.

Значения x_1^* и x_2^* определяют оптимальный спрос на путевки.

Для случая $p_1 = 50$, $p_2 = 130$ и $I = 10000$ оптимальный спрос равен:

$$x_1 = \frac{50 \cdot 10000 - 25 \cdot 50 \cdot 130 + 45 \cdot 130^2}{50^2 + 130^2} \approx 57 \text{ шт.},$$

$$x_2 = \frac{130 \cdot 10000 - 45 \cdot 50 \cdot 130 + 25 \cdot 50^2}{50^2 + 130^2} \approx 55 \text{ шт.}$$

В основе модели поведения потребителя лежит утверждение о том, что при установленных ценах и имеющемся доходе потребитель стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей, то есть получить максимум полезности.

Для случая $p_1 = 50$, $p_2 = 130$ и $I = 100000$ оптимальный спрос равен:

$$x_1 = \frac{50 \cdot 100000 - 25 \cdot 50 \cdot 130 + 45 \cdot 130^2}{50^2 + 130^2} \approx 289 \text{ шт.},$$

$$x_2 = \frac{130 \cdot 100000 - 45 \cdot 50 \cdot 130 + 25 \cdot 50^2}{50^2 + 130^2} \approx 668 \text{ шт.}$$

Анализ функций спроса. Чтобы определить характер рассматриваемых путевок (благ), необходимо рассчитать эластичности их спроса по доходу, по цене и частные эластичности замены.

Эластичность спроса по доходу определяется по формуле:

$$E_i = \frac{I}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial I}. \tag{1.7}$$

Эластичность спроса по цене определяется по формуле:

$$E_{ij} = \frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial p_j}. \tag{1.8}$$

Частные эластичности замены определяются по формуле:

$$S_{ij} = \frac{E_{pj}}{k_j} - E_i, \tag{1.9}$$

где k_j – доля суммарного дохода, $k_j = \frac{x_j \cdot p_j}{I}$;

x_i – благо.

При $i = j$ имеем прямую эластичность по цене, при $i \neq j$ – перекрестную эластичность.

Для случая, когда $p_1 = 50$, $p_2 = 130$ и $I = 10000$ найдем:

– эластичность спроса по доходу на первое благо

$$E_1 = \frac{I}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} = \frac{I}{x_1} \cdot \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} = \frac{10000}{57} \cdot \frac{50}{2500 + 16900} = 0{,}45;$$

– эластичность спроса по доходу на второе благо

$$E_2 = \frac{I}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} = \frac{I}{x_1} \cdot \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} = \frac{10000}{55} \cdot \frac{130}{2500 + 16900} = 1{,}22;$$

– эластичность спроса на первое благо относительно цены первого блага

$$E_{11} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = 0{,}06;$$

– эластичность спроса на второе благо относительно цены второго блага

$$E_{22} = \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -0{,}8;$$

– эластичность спроса на первое благо относительно цены второго блага

$$E_{12} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -0{,}5;$$

– эластичность спроса на второе благо относительно цены первого блага

$$E_{21} = \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -0{,}41;$$

– частные эластичности замены $S_{12} = -1{,}15$ и $S_{21} = -2{,}65$.

Для случая, когда $p_1 = 50$, $p_2 = 130$ и $I = 100000$ найдем:

– эластичность спроса по доходу на первое благо $E_1 = 0{,}89$;

– эластичность спроса по доходу на второе благо $E_2 = 1{,}003$;

– эластичность спроса на первое благо относительно цены первого блага $E_{11} = 0{,}61$;

– эластичность спроса на второе благо относительно цены второго блага $E_{22} = -0{,}76$;

– эластичность спроса на первое благо относительно цены второго блага $E_{12} = -1{,}5$;

– эластичность спроса на второе благо относительно цены первого блага $E_{21} = -0{,}26$;

– частные эластичности замены $S_{12} = -2{,}64$ и $S_{21} = -2{,}82$.

На основе изучения величин эластичностей по доходу можно отметить, что путевки туристического вида являются неэластичными по доходу и представляют собой необходимые блага. Путевки санаторно-курортного лечения эластичны по доходу, и имеют характер предмета относительной роскоши. Оба вида благ для варианта а) не являются эластичными по цене. Эластичными по перекрестной цене являются лишь туристические путевки по варианту б). Так как все частные эластичности замены отрицательны, можно заключить, что туристические путевки и путевки санаторно-курортного лечения являются неконкурирующими взаимодополняющими благами.

1.2. Построение и анализ производственных функций

В настоящее время развит статистический подход к построению производственных функций для конкретных хозяйственных единиц. При этом обычно используется некоторый стандартный набор алгебраических выражений, параметры которых находятся при помощи методов математической статистики.

Среди разнообразных типов ПФ наиболее часто применяются: линейные функции вида $y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$, для которых легко решается задача оценивания коэффициентов (параметров) по статистическим данным; степенные функции вида $y = a_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, для которых задача нахождения параметров сводится к оцениванию линейной формы путем перехода к логарифмам.

Конечной целью построения производственной функции является ее оптимизация, то есть нахождение максимума производственной функции при ограничениях на ресурсы, которые задаются в натуральной или стоимостной форме.

Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы могут замещать друг друга. Это означает, что единицу одного ресурса можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции при этом не изменится.

Это достигается введением производственной кривой безразличия (изокванты) и предельной нормы замещения ресурсов. Изокванта есть геометрическое место точек всех комбинаций затрат, обеспечивающих одинаковый уровень выпуска.

В общем виде предельную норму замещения i-го ресурса j-м ресурсом можно записать так:

$$\gamma = R_{ij} = \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\frac{\partial y}{\partial x_j}}.$$

Предельная норма замещения R_{ij} имеет отрицательное значение, так как при увеличении использования одного из ресурсов, чтобы сохранить постоянное значение результата деятельности, использование другого ресурса надо уменьшить.

Предельная норма замещения ресурсов равна обратному соотношению их предельных производительностей.

Пример. На основе исходных статистических данных с помощью стандартной функции Excel «ЛИНЕЙН» построить линейную производственную функцию $y = aL + bK$ со свободным членом равным нулю, где L – затраты труда, K – затраты капитала, а затем провести ее графический и экономический анализ. Провести расчеты вариантов планов при следующих предположениях: выпуск базового периода составляет 10 единиц при трудозатратах L, величину которых предлагается установить самостоятельно. Требуется увеличить выпуск в следующем периоде на 25 процентов, а далее еще на 25 процентов, причем предполагая, что затраты ресурса K не ограничены, а трудозатраты должны оставаться на прежнем уровне или уменьшиться на 10 процентов.

Решение. В чистый лист Excel внесем исходные статистические данные, представленные в табл. 1.1. При построении линейной формы регрессионной зависимости используем стандартную функцию Excel «ЛИНЕЙН» из раздела статистических функций.

Таблица 1.1

y	L	K
10,11	3,45	6,17
13,65	3,48	7,55
13,75	3,06	6,93
11,64	3,66	6,55
12,87	3,79	6,71
12,43	3,85	7,73
14,33	3,44	7,43
15,26	4,08	7,55
15,9	4,5	7,6
18,21	4,31	6,88
13,22	3,57	6,54
13,45	3,55	4,37
12,22	4,61	6,82
12	3,99	7,33
13,07	4,78	6,01

Коэффициенты линейного уравнения регрессии представлены в первой строке табл. 1.2: $a = 0{,}943477$ и $b = 1{,}805948$.

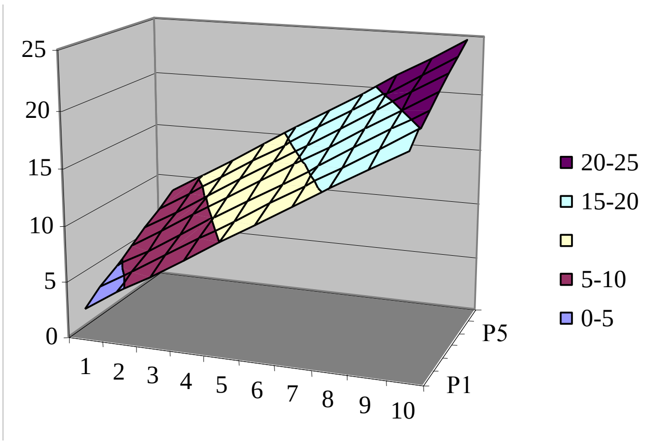
Таблица 1.2

Линейная регрессия		
0,943477	1,805948	0
0,45217	0,7947474	#Н/Д
0,981847	1,9687107	#Н/Д
351,5767	13	#Н/Д
2725,298	50,385683	#Н/Д

Получили линейную производственную функцию без свободного члена:

$$y = 0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K\,, \qquad (1.10)$$

график, которой представлен ниже



Проведем графический и экономический анализ производственной функции (1.10). Построим графики «затраты – выпуск». Зафиксируем три значения ресурса L: L =3; L =4; L =5. Соответственно получим уравнения: $y = 1{,}806 \cdot K + 2{,}83$; $y = 1{,}806 \cdot K + 3{,}77$; $y = 1{,}806 \cdot K + 4{,}72$. Вид графиков «затраты – выпуск» при фиксированном значении L представлен на рис. 1.5.

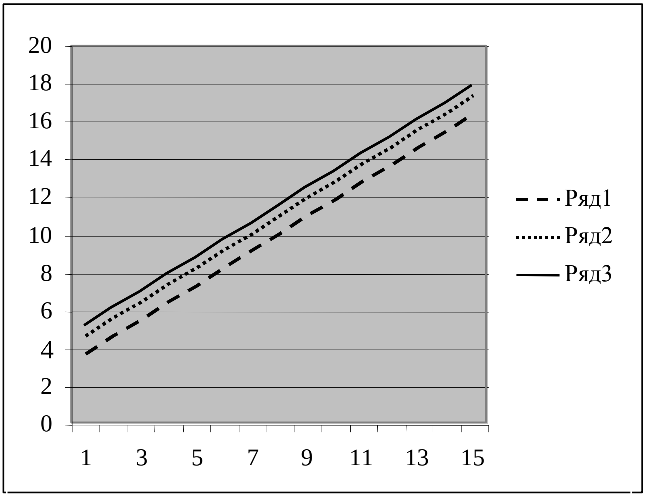


Рис. 1.5. Вид графика «затрата–выпуск» при фиксированном значении L

Аналогично построим графики «затраты – выпуск» при фиксированном значении K : K =5; K =6; K =7. Соответственно получим уравнения:

$$y = 0{,}943 \cdot L + 9{,}03;\; y = 0{,}943 \cdot L + 10{,}84;\; y = 0{,}943 \cdot L + 12{,}64.$$

Вид графиков «затраты – выпуск» при фиксированном значении K представлен на рис. 1.6.

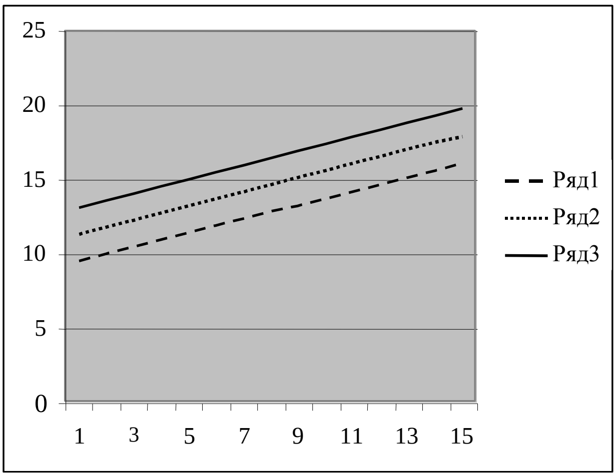


Рис. 1.6. Вид графика «затрата–выпуск» при фиксированном значении K

Для построения изоквант линейной производственной функции (1.10) зафиксируем некоторые значения выпуска y : y =10; y =5; y =3. Тогда уравнение изокванты для y =10 имеет вид:

$$10 = 0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K \text{ или } K(L) = \frac{10 - 0{,}943 \cdot L}{1{,}806}.$$

Уравнение изокванты для y =5 имеет вид:

$$5 = 0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K \text{ или } K(L) = \frac{5 - 0{,}943 \cdot L}{1{,}806}.$$

Уравнение изокванты для y =3 имеет вид:

$$3 = 0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K \text{ или } K(L) = \frac{3 - 0{,}943 \cdot L}{1{,}806}.$$

Соответствующие изокванты изображены на рис. 1.7.

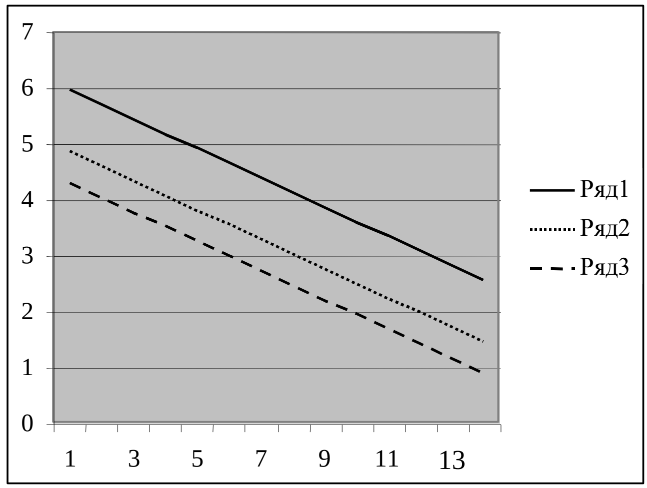


Рис. 1.7. Изоквант линейной производственной функции

Рассчитаем среднюю и предельную производительность производственных ресурсов. Средняя производительность труда равна:

$$A_{y_L} = \frac{y}{L} = \frac{0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K}{L} = 0{,}943 + 1{,}806 \cdot \frac{K}{L} = 0{,}943 + 1{,}806 \cdot k,$$

где k – капиталовооруженность, $k = \dfrac{K}{L}$.

Средняя производительность капитала равна:

$$A_{y_K} = \frac{y}{K} = \frac{0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K}{K} = 0{,}943\frac{L}{K} + 1{,}806 = \frac{0{,}943}{k} + 1{,}806 .$$

Для линейной производственной функции предельная производительность ресурсов постоянна и равна коэффициентам при соответствующих переменных (ресурсах) в производственной функции:

– предельная производительность труда

$$M_{y_L} = \frac{\partial y}{\partial L} = 0{,}943 ;$$

– предельная производительность капитала

$$M_{y_K} = \frac{\partial y}{\partial K} = 1{,}806 .$$

Рассчитаем коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам:

– эластичность выпуска по труду

$$E_L(y) = \frac{L}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{My}{Ay} = \frac{0{,}943 \cdot L}{0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K} = \frac{0{,}943}{0{,}943 + 1{,}806 \cdot k} ;$$

– эластичность выпуска по капиталу

$$E_K(y) = \frac{K}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{My}{Ay} = \frac{1{,}806 \cdot K}{0{,}943 \cdot L + 1{,}806 \cdot K} = \frac{1{,}806}{1{,}806 + \dfrac{0{,}943}{k}} .$$

Предельная норма замещения ресурсов

$$\gamma = \frac{dK}{dL} = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial L}}{\dfrac{\partial y}{\partial K}} = -\frac{0{,}943}{1{,}806} = -0{,}5$$

для линейной производственной функции (1.10) постоянна и не зависит от соотношения используемых ресурсов. В этом случае эластичность замещения ресурсов:

$$\sigma_{LK} = \frac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{d\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\dfrac{K}{L}} = \frac{dk}{d\gamma} \cdot \frac{\gamma}{k} ,$$

равна бесконечности и ресурсы считаются полностью взаимозамещаемыми. Линейная производственная функция имеет нулевую «кривизну» и, соответственно, бесконечную эластичность замещения.

Проведем расчеты планируемых вариантов изменения производства. Допустим, что в базовом периоде выпускалось 10 ед. (одна единица, например, соответствует 100 000 руб.) продукции, то есть $y_0 = 10$. Планируется в следующем плановом периоде увеличить объем выпуска на 25 процентов, то есть выпускать 12,5 ед. продукции, а далее увеличить объем выпуска еще на 25 процентов. Рассмотрим два случая: а) ограничений по ресурсам нет; б) затраты ресурса K неограниченны, трудозатраты L должны оставаться на прежнем уровне или уменьшиться на 10процентов.

Для производственной функции (1.10) имеет место постоянная отдача от расширения производства, то есть при изменении масштаба ресурсов L и K на некоторую величину, масштаб y изменится на такую же величину. Поэтому для очередного планового периода следует планировать затраты ресурсов, пропорциональные ресурсам в базовом периоде. Если, например, в базовом периоде на выпуск в 10 единиц продукции расходовалось 5 единиц стоимости капитала (или основных производственных фондов) и 1,03 единиц трудозатрат, то в очередном плановом периоде их потребуется соответственно: $K = 5 \cdot 1{,}25 = 6{,}25$ и $L = 1{,}03 \cdot 1{,}25 = 1{,}29$ (увеличились на 25 процентов). Объем выпуска при этом составит:

$$y = 0{,}943 \cdot 1{,}29 + 1{,}806 \cdot 6{,}25 = 12{,}5.$$

Средняя производительность труда в базовом периоде равна

$$\frac{y}{L} = \frac{10}{1{,}03} = 9{,}7.$$

Средняя производительность труда в планируемом периоде равна

$$\frac{y}{L} = \frac{12{,}5}{1{,}29} = 9{,}7.$$

Средняя производительность капитала в базовом периоде равна

$$\frac{y}{K} = \frac{10}{5} = 2.$$

Средняя производительность труда в планируемом периоде равна

$$\frac{y}{K} = \frac{12{,}5}{6{,}25} = 2.$$

В плановом периоде средняя производительность труда и капитала не изменились. Не изменятся и эластичности ресурсов. Рассмотрим случай а) Увеличим выпуск продукции еще на 25 процентов. Тогда выпуск продукции увеличился на 3,125 единиц и стал равным $y = 15{,}625$. Затраты капитала и труда так же увеличились на 25 процентов и стали равными: $K = 6{,}25 \cdot 1{,}25 = 7{,}8$; $L = 1{,}29 \cdot 1{,}25 = 1{,}6$ Объем выпуска при этом составит: $y = 0{,}943 \cdot 1{,}6 + 1{,}806 \cdot 7{,}8 = 15{,}6$. Рассмотрим случай б) Если затраты ресурса K неограниченны, трудозатраты L при этом должны оставаться на прежнем уровне или уменьшиться на 10 процентов. Затраты ресурса K увеличили на 25 процентов, а затраты ресурса L оставим без изменения: $K = 7{,}8$ и $L = 1{,}29$. Объем выпуска при этом составит: $y = 0{,}943 \cdot 1{,}29 + 1{,}806 \cdot 7{,}8 = 15{,}3$. И, наконец, капитал увеличим на 25 процентов, а трудозатраты уменьшим на 10 процентов: $K = 7{,}8$ и $L = 1{,}29 - 0{,}129 = 1{,}161$. Объем выпуска при этом составит: $y = 0{,}943 \cdot 1{,}161 + 1{,}806 \cdot 7{,}8 = 15{,}2$.

Пример. Команда «Данные/Таблица подстановки» позволяет создавать таблицы подстановки, которые дают возможность проводить вычисления по формулам для одного из случаев:

а) имеется один набор данных для одной ячейки (одной переменной), на которую ссылаются одна или несколько формул. В этом случае создается таблица подстановки с одним входом; имеются два набора данных для двух ячеек (две переменные), на которые ссылается одна формула. Создаваемая в этом случае таблица называется таблицей подстановки с двумя выходами. В табл. 1.3 показан общий макет таблицы подстановки с одним входом. Левый столбец содержит различные значения входного параметра. Верхняя строка содержит формулы или ссылки на ячейки с формулами, по которым рассчитывается результат. Можно использовать любое количество ссылок на формулы (или только одну). Левая верхняя ячейка таблицы не используется. Excel вычисляет значения, которые получаются в результате подстановки каждого из исходных значений во входную ячейку и помещает результат в соответствующий столбец (в ячейку, которая находится под ячейкой с соответствующей формулой или ссылкой на формулу).

Таблица 1.3

Макет таблицы подстановки с одним входом

Формула	Произвольное кол-во ссылок на формулы
Массив исходных данных	Результаты расчетов для разных значений входного параметра (формула массива)

б) таблица подстановки с двумя входами позволяет отобразить на экране результаты расчетов при изменении двух входных параметров (табл. 1.4). В данную таблицу можно свести результаты расчетов только по одной формуле. Если в верхней строке таблицы подстановки с одним входом можно разместить любое количество формул или ссылок на них, то в таблице подстановки с двумя входами в верхней строке содержатся значения для подстановки второго входного параметра. И только в верхней левой ячейке находится ссылка на ячейку с единственной формулой.

Таблица 1.4

Макет таблицы подстановки с двумя входами

Формула	Массив исходных данных 2-го параметра
Массив исходных данных для первого параметра	Результаты расчетов для разных значений двух входных параметров (формула массива)

Пример. Для заданной производственной функции $y(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$ с помощью Excel построить изокванты и изоклинали. Используя в Excel окно «Таблица подстановки» рассчитать матрицу для производственной функции и по данным рассчитанной таблицы построить график поверхности производственной функции.

Решение. Используя окно «Таблица подстановки» рассчитаем матрицу для производственной функции $y(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$, представленной в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Матрица для производной функции $y(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$

1	1				
1	1	2	3	4	5
1	1	1,319508	1,551846	1,741101	1,903654
2	1,515717	2	2,352158	2,639016	2,8854
3	1,933182	2,550849	3	3,365865	3,68011
4	2,297397	3,031433	3,565205	4	4,373448
5	2,626528	3,465724	4,075966	4,573051	5
6	2,930156	3,866364	4,54715	5,101698	5,578003
7	3,214096	4,241025	4,98778	5,596066	6,118526
8	3,482202	4,594793	5,40384	6,062866	6,628908
9	3,737193	4,931255	5,799546	6,506831	7,114322
10	3,981072	5,253056	6,178009	6,931448	7,578583

По данным рассчитанной таблицы построим график производственной функции «Поверхность». Выделяем в таблице формулу массива, затем – «Мастер диаграмм», «Поверхность», «Вид поверхности»**.** График функции (поверхность) $y(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$ представлен на рис. 1.8. Изолинии на графике производственной функции являются изоквантами, построенными в соответствии с ценой деления. Их легко представить в осях ресурсов, задав контурный тип диаграммы (мастер диаграмм, поверхность, вид поверхности).

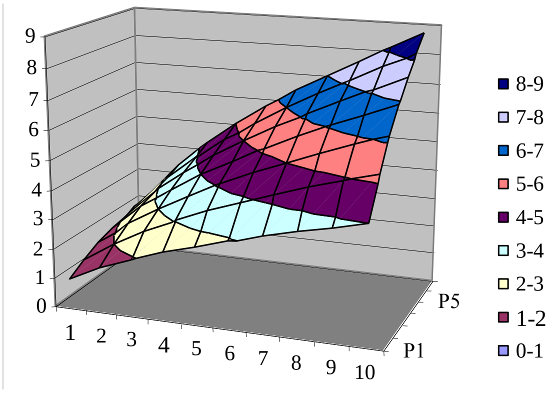


Рис. 1.8. График функции $y(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$

На рис. 1.9 представлены изокванты в осях ресурсов. Изокванты построим с уровнями выпуска равными 6; 8; 10. Для этого рассчитаем изокванты для данных уровней, по формуле: $x_2(x_1) = \left(\frac{y_0}{x_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$, где y_0 – заданный уровень значения производственной функции.

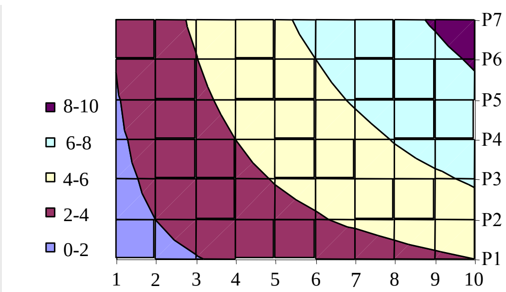


Рис. 1.9. Изокванты в осях ресурсов

Расчетные данные, по которым построены графики изоквант, представлены в соответствии с табл. 1.6.

Таблица 1.6

Расчетные данные для построения изоквант

x_1	x_2	изокванта-6	изокванта-8	изокванта- 10
0,1	5	7,8872048	16,190862	28,2842712
0,5	10	2,788548	5,724334	10
1	15	1,5178933	3,1159328	5,44331054
1,5	20	0,9859006	2,0238577	3,53553391
2	25	0,705453	1,4481547	2,52982213
3	30	0,5366563	1,1016486	1,9245009
4	35	0,425869	0,8742244	1,5272071
5	40	0,3485685	0,7155418	1,25
6	45	0,2921187	0,5996615	1,0475656
7	50	0,2494153	0,512	0,89442719

На рис. 1.10 построены графики изоквант. Первый график (ряд 1) соответствует изокванте вида:

$$x_2 = \left(\frac{6}{x_1^{0,4}} \right)^{0,6}.$$

Второй график (ряд 2) соответствует изокванте вида:

$$x_2 = \left(\frac{8}{x_1^{0,4}} \right)^{0,6}.$$

Третий график (ряд 3) соответствует изокванте вида:

$$x_2 = \left(\frac{10}{x_1^{0,4}} \right)^{0,6}.$$

Линии $\gamma(x_1, x_2) = \gamma_0$ называют изоклиналями производственных функций. Для производственной функции вида $y(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, уравнение изоклиналий при заданном γ_0 имеет вид:

$$x_2 = -\gamma_0 \frac{\beta}{\alpha} x_1. \qquad (1.11)$$

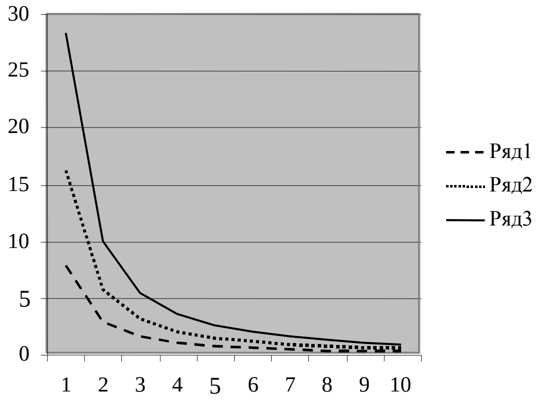


Рис. 1.10. Графики изоквант

Зададим различные соотношения ресурсов и установим предельные нормы замещения: $\gamma_0 = -2$; $\gamma_0 = -1$; $\gamma_0 = -0{,}5$. Подставим различные значения γ_0 в формулу (11) и получим табл. 1.7 расчетных данных, по которым построены графики изоклиналей.

Таблица 1.7

Расчетные данные для построения изоклиналей

x_1	изоклиналь 2	изоклиналь 1	изоклиналь 0,5
0,1	0,3	0,15	0,075
0,5	1,5	0,75	0,375
0,9	3	1,5	0,75
1,3	4,5	2,25	1,125
1,7	6	3	1,5
2,1	9	4,5	2,25
2,5	12	6	3
2,9	15	7,5	3,75
3,3	18	9	4,5
3,7	21	10,5	5,25

На рис. 1.11 первый график (ряд 1) соответствует $\gamma_0 = -2$, второй график (ряд 2) соответствует $\gamma_0 = -1$, третий график (ряд3) соответствует $\gamma_0 = -0{,}5$. В данном примере изоклинали имеют простой вид – они являются лучами, исходящими из начала координат. Такое свойство имеют изоклинали для класса однородных производственных функций.

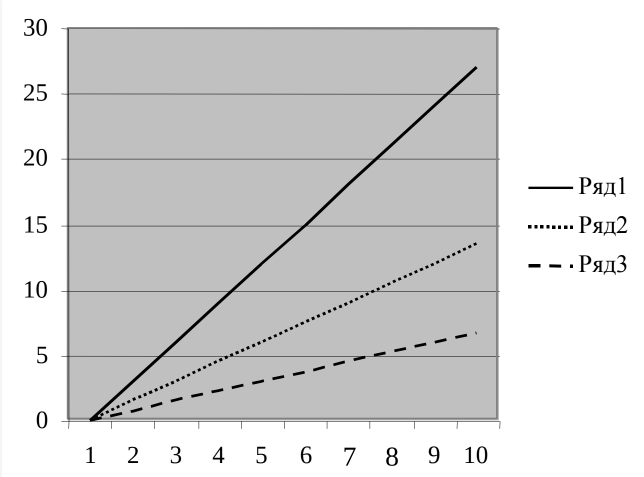


Рис. 1.11. Графики изоклиналей

1.3. Анализ функции полных издержек

Суммарные издержки (total cojst-TC) – общие издержки выпуска определенного объема продукции. Суммарные издержки рассматриваются как в краткосрочном периоде, так и долгосрочном периоде.

Краткосрочный период – это период времени слишком короткий для изменения производственных мощностей, но достаточный для изменения интенсивности использования этих мощностей. Производственные мощности остаются неизменными в краткосрочном периоде, а объем выпуска может изменяться путем изменения количества рабочей силы, сырья и других ресурсов, применяемых на этих мощностях. В течение краткосрочного периода фирма может изменить объем производства путем соединения изменяющегося количества ресурсов с фиксированными мощностями.

Долгосрочный период – это период времени достаточный для того, чтобы все желательные изменения в структуре ресурсов могли быть предприняты как отраслью, так и отдельным составляющим ее предприятием. Предприятие и отрасль в целом могут изменить масштабы своих производственных мощностей. Поскольку в краткосрочном периоде ряд вводимых факторов производства (прежде всего капитал) не меняется, то какая-то часть суммарных издержек также не зависит от количества переменных единиц ресурсов и от объема выпуска.

Суммарные издержки, которые не меняются по мере увеличения производства в краткосрочном периоде, называются суммарными постоянными издержками (total fixed cost –*TFC*).

Суммарные издержки, которые изменяют свою величину с ростом или уменьшением выпуска продукции, составляют переменные издержки (total variable cost – *TVC*). Следовательно, для любого объема производства x суммарные издержки складываются из суммарных постоянных и суммарных переменных издержек:

$$TC(x) = TFC(x) + TVC(x) .$$

Предприятие (фирма), желая добиться максимальной прибыли, стремится снизить издержки на единицу продукции. В связи с этим важно ввести понятие средних и предельных издержек.

Средние суммарные издержки рассчитываются путем деления суммарных издержек $TC(x)$ на объем произведенной продукции x:

$$ATC(x) = \frac{TC(x)}{x} .$$

Средние постоянные издержки $ATFC(x)$ определяются по формуле:

$$ATFC(x) = \frac{TEC(x)}{x} ,$$

то есть путем деления суммарных постоянных издержек на количество произведенной продукции. Так как постоянные издержки по определению не зависят от объема выпускаемой продукции, то средние постоянные издержки будут уменьшаться с увеличением объема выпуска. Средние переменные издержки $ATVC(x)$ определяются делением суммарных переменных издержек на соответствующее количество произведенной продукции:

$$ATVC(x) = \frac{TVC(x)}{x} .$$

Прирост издержек, связанный с выпуском дополнительной единицы продукции, то есть отношение прироста переменных издержек к вызванному ими приросту продукции, называется предельными издержками $MTVC(x)$:

$$MTVC(x) = \frac{dTVC(x)}{dx} .$$

Для непрерывных функций предельные издержки рассматриваются как первая производная функции суммарных переменных издержек. В этом случае предельные издержки показывают, на сколько единиц изменятся издержки, если объем выпуска продукции изменится на единицу.

Поскольку постоянные издержки не меняются и не зависят от величины выпуска продукции, то изменение суммарных издержек $TC(x)$ определяется изменением только переменных издержек.

Для долгосрочного периода также рассматривается изменение переменных издержек.

Важным понятием в теории производства является уровень наиболее экономичного производства, при котором средние (переменные) издержки по производству продукции минимальны. Минимальные издержки достигаются при условии равенства средних и предельных издержек: $ATVC(x) = MTVC(x)$.

Пример. Функция полных переменных издержек производства имеет вид $TVC(x)$. Найти предельные $MTVC(x)$ и средние $ATVC(x)$ издержки. Построить графики функций $TVC(x)$, $MTVC(x)$, и исследовать характер их изменения. Выяснить при каких объемах производства выполняется закон наиболее экономичного производства. Рассчитать эластичность полных издержек в точках экстремума функции $MTVC(x)$ и $ATVC(x)$.

Решение. Пусть функция полных издержек

$$TVC(x) = x^3 - 6x^2 + 14x .$$

Средние издержки определяются формулой:

$$ATVC(x) = \frac{TVC(x)}{x} = \frac{x^3 - 6x^2 + 14x}{x} = x^2 - 6x + 14 ,$$

предельные издержки определяются формулой:

$$MTVC(x) = \frac{dTVC(x)}{dx} = 3x^2 - 12x + 14 .$$

На рис. 1.12 представлены графики суммарных $TVC(x)$ (ряд 1), средних $ATVC(x)$ (ряд 2), предельных $MTVC(x)$ (ряд 3) издержек.

Рассчитаем, при каких объемах производства выполняется закон наиболее экономического производства, при котором средние издержки производства минимальны. Уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек. Докажем это. Действительно, минимальное значение функции средних издержек достигается в точке, где производная функции $ATVC(x)$ равна нулю:

$$\frac{dATVC(x)}{dx} = 0 .$$

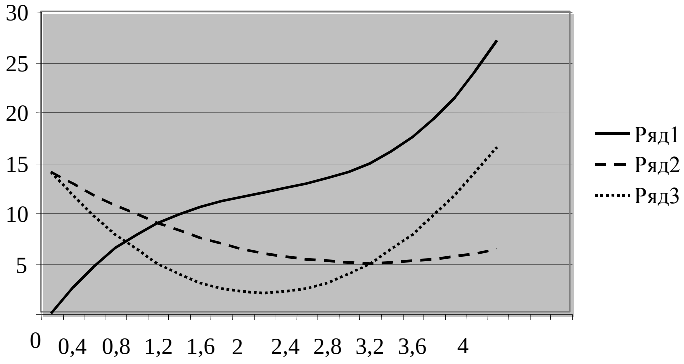


Рис. 1.12. Графики суммарных издержек

Найдем производную функции и приравняем её нулю:

$$\frac{dATVC(x)}{dx} = \left(\frac{TVC(x)}{x}\right) = \frac{TVC'(x)\cdot x - TVC(x)}{x^2} = 0$$

тогда $TVC'(x)\cdot x - TVC(x) = 0$,

отсюда

$$TVC'(x) = \frac{dTVC(x)}{x} = \frac{TVC(x)}{x} = ATVC(x),$$

т.е. получили равенство предельных и средних издержек:

$$MTVC(x) = ATVC(x).$$

В нашем случае средние издержки задаются формулой:

$$ATVC(x)) = x^2 - 6x + 14,$$

а предельные издержки –

$$MTVC(x) = 3x^2 - 12x + 14.$$

Тогда равенство $3x^2 - 12x + 14 = x^2 - 6x + 14$ выполняется при $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

Таким образом, при объеме производства $x = 3$ достигается наиболее экономичное производство.

Суммарные предельные издержки (первая производная функции полных издержек) показывают, на сколько единиц изменяются полные издержки, если объем выпуска продукции изменится на единицу. Вторая производная полных издержек

$$\frac{d^2TVC(x)}{dx^2} = \frac{dMTVC(x)}{dx} = \left(MTVC(x)\right)'$$

позволяет показать влияние каждой дополнительной единицы выпускаемой продукции на полные издержки $TVC(x)$.

По смыслу задачи функция $TVC(x)$ определена для $x \geq 0$. При увеличении объемов производства полные издержки непрерывно возрастают, так как

$$\frac{dTVC}{dx} = MTVC(x) = 3x^2 - 12x + 14 > 0$$

для любых x, поскольку $D < 0$. Вторая производная функции $TVC(x)$ позволяет определить, при каких объемах производства издержки растут быстрее, а при каких медленнее.

Найдем

$$\frac{d^2TVC}{dx^2} = \frac{dMTVC(x)}{dx} = \left(MTVC(x)\right)' = 6x - 12,$$

тогда при $x_{\min MC} = 2$ функция предельных издержек $MTVC(x)$ достигает своего минимального значения: $MTVC_{\min} = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 14 = 2$.

Найдем минимальное значение функции средних издержек:

$$\frac{dATVC(x)}{dx} = \left(ATVC(x)\right)' = 2x - 6,$$

тогда при $x_{\min AC} = 3$ функция средних издержек достигает своего минимального значения: $ATVC_{\min} = 9 - 6 \cdot 3 + 14 = 5$.

Суммарные издержки растут быстро от $x = 0$ до $x = 2$ и на этом промежутке, что видно из графика (Рисунок 15), убывают предельные издержки $MTVC(x)$, достигая в точке $x = 2$ своего минимального значения. Это значит, что на этом участке каждая дополнительная эффективно, что и приводит к увеличению суммарных издержек $TVC(x)$. При x изменяющегося от 2 до 3 рост суммарных издержек $TVC(x)$ замедляется, достигая своего наилучшего значения в точке $x = 3$, в которой средние издержки минимальны и выполняется условие наиболее экономичного производства $ATVC(x) = MTVC(x)$. На этом участке от $x = 2$ до $x = 3$, что видно из графика (рис. 1.12), предельные издержки увеличиваются. Это значит, что каждая дополнительная единица выпускаемой продукции используется все более эффективно, что и приводит к снижению роста суммарных издержек.

Рассчитаем эластичность полных издержек в точках, где функции средних и предельных издержек достигают своего минимального значений: $x_{\min MC} = 2$ и $x_{\min AC} = 3$.

Эластичность полных издержек показывает, на сколько процентов изменятся полные издержки, если объем производства увеличится на один процент. Эластичность вычисляется по формуле

$$E_x(TVC) = \frac{MTVC(x)}{ATVC(x)}.$$

В нашем случае

$$E_x(TVC) = \frac{MTVC(x)}{ATVC(x)} = \frac{3x^2 - 12x + 14}{x^2 - 6x + 14}.$$

Найдем эластичность полных издержек при $x_{\min MC} = 2$:

$$E_2(TVC) = \frac{12 - 24 + 14}{4 - 12 + 14} \approx 0{,}33.$$

Найдем эластичность полных издержек при $x_{\min AC} = 3$:

$$E_3(TVC) = \frac{27 - 36 + 14}{9 - 18 + 14} = 1.$$

Это значит, что при увеличении объема производства с двух единиц на один процент, полные издержки увеличатся приблизительно на 0,33 процента, то есть менее чем на один процент, и следовательно, функция полных издержек при $x = 2$ неэластична $(|E_x(TVC)| < 1)$. При увеличении объема производства с трех единиц на один процент полные издержки увеличатся также на один процент, и функция полных издержек при $x = 3$ будет нейтральна $(|E_x(TVC)| = 1)$.

Дальнейшее увеличение объема производства приведет к увеличению полных издержек более чем на один процент и функция полных издержек будет эластична $(|E_x(TVC)| > 1)$. Например, при $x = 4$ $E_4(TVC) = 2{,}33$, то есть увеличение объема производства с четырех единиц на один процент приведет к увеличению полных издержек на 2,33 процента.

2. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СОДЕРЖАЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Модель естественного роста в условиях конкуренции

На практике модель естественного роста при постоянном темпе целесообразно применять на начальных этапах развития экономической системы в течение ограниченного промежутка времени, поскольку (как это следует из уравнения $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$) с течением времени $y(t)$ принимает какие угодно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены. Кривая спроса, то есть график зависимости цены от объема реализованной продукции y, становится убывающей. Пусть зависимость цены от объема задается функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка).

На практике модель естественного роста с постоянными темпами целесообразно применять на начальных этапах развития экономической системы. Но с течением времени объем продукции может меняться, что сказывается на цене, по которой ее сбывают. Таким образом, цена становится убывающей функцией спроса.

Поэтому модель роста объема производства в условиях конкурентного рынка (логистический рост) примет вид:

$$y' = k \cdot p(y) \cdot y, \tag{2.1}$$

где $p = p(y)$ – убывающая функция $\left(\dfrac{dp}{dy} < 0\right)$;

$$k = ml.$$

Если спрос описывается линейным уравнением $p(y) = b - ay$ $(a, b > 0)$, тогда уравнение $y' = k \cdot p(y) \cdot y$ примет вид:

$$y' = k(b - ay)y. \tag{2.2}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$y(t) = \frac{b}{a + ce^{-bkt}}. \tag{2.3}$$

Графики полученного общего решения называются логистическими кривыми. Из графика логистической кривой можно видеть, что при малых t логический рост схож с естественным ростом (при постоянных темпах), однако при больших t характер роста меняется, темпы роста замедляются и кривая асимптотически приближается к прямой $y = \frac{b}{a}$. Эта прямая является стационарным решением уравнения $y' = k(b - ay)y$ и соответствует случаю $p(y) = 0$.

Цель работы – исследование модели естественного роста в условиях конкуренции.

Объектом исследования будет являться продажа телефона «Siemens I 35», выпускаемого предприятием «Евросеть» на продажу в г. Владивостоке.

Выбранный объект исследования с четкими параметрами поможет лучше определить, что такое функция спроса, каким образом она себя ведет, что характерно для товаров с такой необычной функцией спроса.

Функция естественного роста в условиях конкуренции поможет определить, каким способом лучше стоит построить сбыт товара, на каком этапе он приносит доход, а на каком перестает приносить прибыль, и на каком этапе появляется тенденция к упадку производства.

Рассмотрим данные по спросу на сотовый телефон за период с мая 2005 года по апрель 2006 года и занесем данные в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Данные по спросу на сотовые «Siemens I 35»

Месяц	Объем продаж	Цена (Р)	Общая выручка (У)
май	12	10 000	120 000
июнь	15	10 100	151 500
июль	15	10 500	157 500
август	18	10 300	185 400
сентябрь	20	9500	190 000
октябрь	23	9000	207 000
ноябрь	23	9000	207 000
декабрь	25	8800	220 000
январь	25	8500	212 500
февраль	33	8450	278 850
март	36	8300	298 800
апрель	40	8250	330 000

Построим графики, определяющие динамику деятельности компании – объем продаж телефонов и выручку от их продажи за 12 месяцев.

Для этого используем пакет программ Microsoft Office, а именно Microsoft Excel (рис. 2.1).

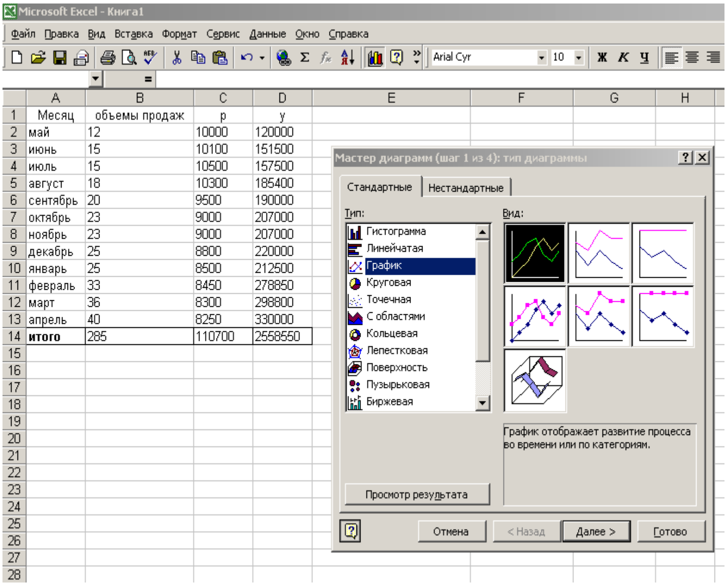


Рис. 2.1. Пакет используемых программ

Запишем наши данные в таблицу Microsoft Excel, затем нажимаем пункт меню «Вставка»→«Диаграмма», в появившемся окне «Мастер диаграмм» выбираем нужный нам вид графика.

В диапазоне данных выделяем столбец y – выручка. Затем подписываем ряды данных, название диаграммы и даем обозначения осям. В результате получим график, описывающий динамику выручки (рис. 2.2).

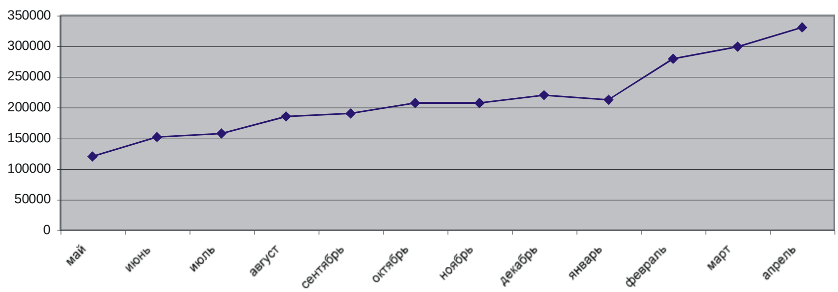


Рис. 2.2. Динамика выручки от продажи телефона

Аналогично строим график, описывающий динамику спроса (рис. 2.3).

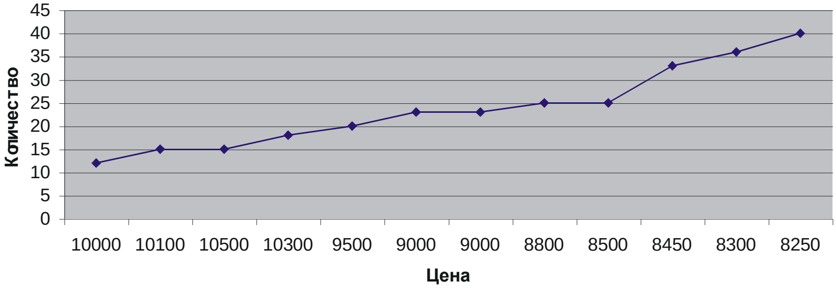


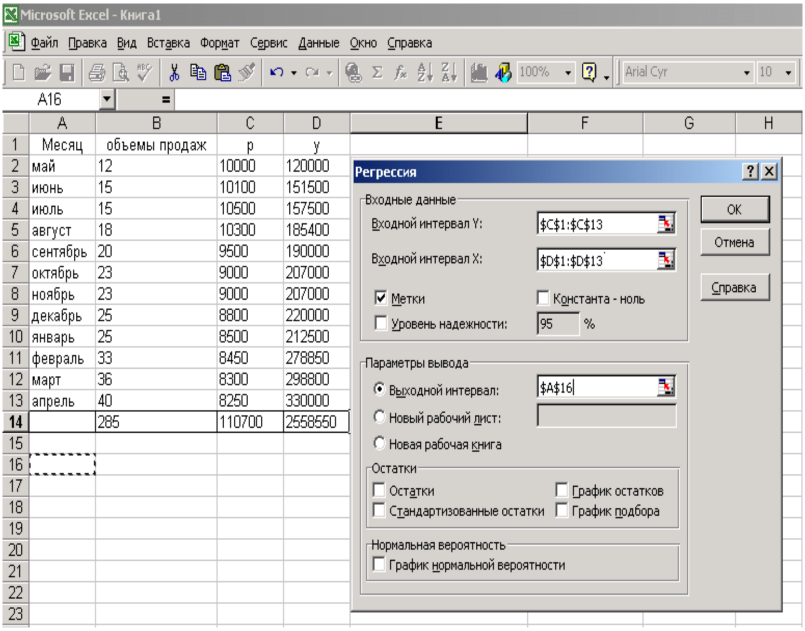
Рис. 2.3. Динамика спроса продаж телефона

Такая функция спроса объясняется тем, что развитие на рынке телекоммуникационных технологий зависит от потребителя. Чем ниже цена, тем больше спрос. Но не надо забывать о факторе новизны, когда люди, независимо от цены, готовы купить новинку.

Исследуем спрос на телефон с помощью модели естественного роста в условиях конкуренции (с учетом изменения цены). Для этого воспользуемся моделью:

$$y(t) = \frac{b}{ce^{-kbt} + a}.$$

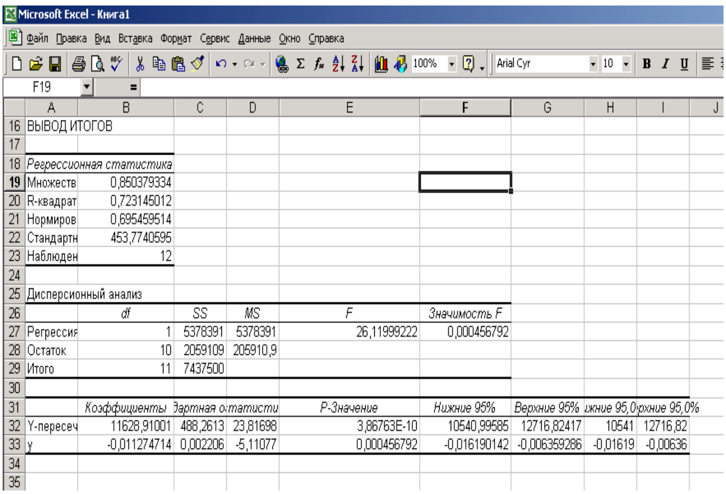
Найдем коэффициенты a и b. Для этого также воспользуемся Microsoft Excel. Нажимаем пункт меню «Сервис»→«Анализ данных». Если подпункт «Анализ данных» отсутствует, тогда в том же пункте меню «Сервис» нажимаем подпункт «Надстройки» и ставим галочку в строке «Пакет анализа». Затем снова заходим в «Сервис», нажимаем «Анализ данных». В появившемся окне выбираем пункт «Регрессия», затем устанавливаем входной интервал y (столбец цена) и входной интервал x (столбец цена общая выручка), выбираем выходной интервал (рис. 2.4).



	A	B	C	D
1	Месяц	объемы продаж	p	y
2	май	12	10000	120000
3	июнь	15	10100	151500
4	июль	15	10500	157500
5	август	18	10300	185400
6	сентябрь	20	9500	190000
7	октябрь	23	9000	207000
8	ноябрь	23	9000	207000
9	декабрь	25	8800	220000
10	январь	25	8500	212500
11	февраль	33	8450	278850
12	март	36	8300	298800
13	апрель	40	8250	330000
14		285	110700	2558550

Рис. 2.4. Выходной интервал

В результате получаем таблицу (рис. 2.5).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
16	ВЫВОД ИТОГОВ								
18	*Регрессионная статистика*								
19	Множеств	0,850379334							
20	R-квадрат	0,723145012							
21	Нормиров	0,695459514							
22	Стандартн	453,7740595							
23	Наблюден	12							
25	Дисперсионный анализ								
26		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
27	Регрессия	1	5378391	5378391	26,11999222	0,000456792			
28	Остаток	10	2059109	205910,9					
29	Итого	11	7437500						
31		*Коэффициенты*	*дартная о*	*статисти*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*жние 95,0*	*рхние 95,0%*
32	Y-пересеч	11628,91001	488,2613	23,81698	3,86763E-10	10540,99585	12716,82417	10541	12716,82
33	y	-0,011274714	0,002206	-5,11077	0,000456792	-0,016190142	-0,006359286	-0,01619	-0,00636

Рис. 2.5. Таблица итогов

Коэффициенты a и b находим в столбце «Коэффициенты»:

$$a = \text{-}0{,}011274714,\ b = 11628{,}91001.$$

Таким образом, линейная модель спроса принимает вид:

$$p(y) = 11628{,}91001 - 0{,}011274714 \cdot y\ .$$

Используя начальные параметры: $y = 2, k = 1, t = 0$ найдем значение коэффициента c для нашей модели:

$$2 = \frac{11628{,}91001}{ce^{-11628{,}91001 \cdot 0} + 0{,}011274714}.$$

В результате получим $c = 5814{,}44373$ и тогда

$$y(t) = \frac{11628{,}91001}{5814{,}44373 \cdot e^{-11628{,}91001 \cdot t} + 0{,}011274714}\ .$$

Для того, чтобы построить логистическую кривую, снова воспользуемся Microsoft Excel (рис. 2.6). Для начала рассчитаем значение функции $y(t)$ при t, изменяющимся от 0 до 12, затем по полученным данным строим кривую, аналогично строившимся ранее графикам.

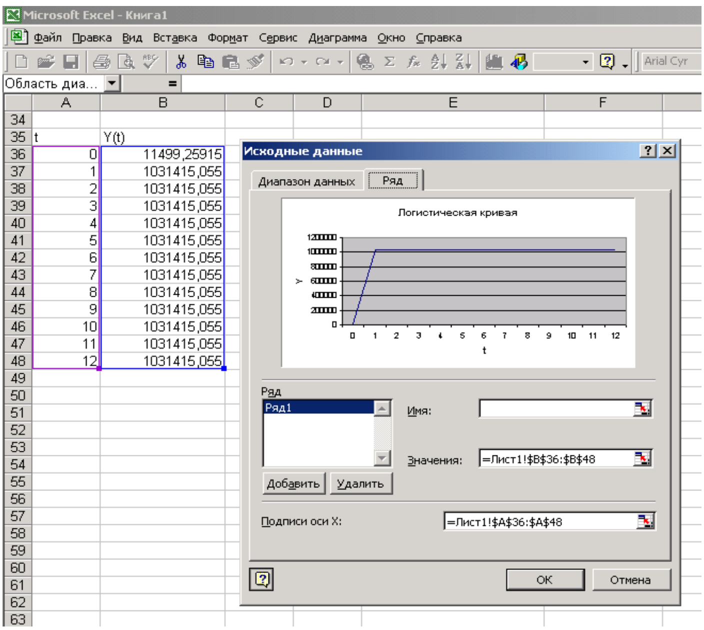


Рис. 2.6. Построение логистической кривой

В результате получаем кривую (рис. 2.7).

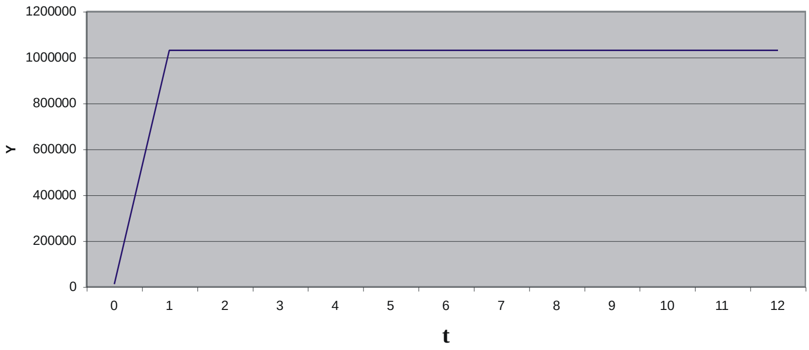


Рис. 2.7. Логистическая кривая

Данное исследование показывает потребительское поведение в отношении данного объекта продажи. Еще раз оно подтверждает, что, как в теории, так и на практике, после трех месяцев наблюдается довольно резкая стабилизация роста продаж. Это показывает и функция спроса, и функция естественного роста.

Модель естественного роста помогает убедиться в тенденциях, которые уже начинают открываться многим предпринимателем: редко какую модель стоит активно продвигать более трех месяцев.

2.2. Модель естественного роста в условиях конкуренции с учетом издержек

Более реалистической является модель, в которой скорость выпуска продукции зависит не от дохода, а от прибыли. Пусть

$$C(y) = m \cdot y + n,$$

где $C(y)$ – издержки, при этом $m > 0$ и $n > 0$;

$$p(y) = b - ay,$$

где $p(y)$ – доход, при этом $a > 0$, $b > 0$.

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее модель роста с учетом издержек, примет вид:

$$y' = k((b - ay)y - my - n),$$

$$y' = k(by - ay^2 - my - n),$$

$$y' = k(-ay^2 + (b - m)y - n). \qquad (2.4)$$

Таким образом, правая часть уравнения (2.4) представляет собой квадратный многочлен относительно y с отрицательным коэффициентом перед y^2. В этом случае возможны три варианта решения при $D < 0; D = 0; D > 0$:

а) рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение (2.4) не имеет стационарного решения ($D < 0$). Пусть, для примера, $a = 1$, $b = 2$, $m = 6$, $n = 8$, $k = 1$, подставив исходные данные в уравнение (2.4), получим $y' = -y^2 - 4y - 8$, $D = -16$.

Так как $D < 0$, следовательно, $y' < 0$. Издержки настолько велики, что это приводит к постоянному падению уровня производства и, в конце концов к банкротству. Покажем это. Подставим исходные данные в дифференциальное уравнение (2.4) и решим его:

$$y' = -y^2 - 4y - 8, \quad y' = -(y+2)^2 - 4, \quad y' = -(y+2)^2 - (2)^2,$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 + 4} = -\int dt,$$

$$\frac{1}{2} arctg\left(\frac{y+2}{2}\right) = -t + c,$$

$$arctg\left(\frac{y+2}{2}\right) = -2t + c,$$

$$\frac{y+2}{2} = tg(-2t + c),$$

$$y(t) = 2tg(-2t + c) - 2.$$

Задавая начальные условия, то есть доход в начальный момент времени, можно увидеть, что чем больше в начальный момент времени доход y, тем больше по времени происходит падение уровня производства (дольше проедается первоначальный доход). Но во всех случаях имеет место банкротство. Это демонстрируют построенные графики:

– если $y(0) = 1{,}091$, тогда $c = 40$ и $y(t) = 2tg(40 - 2t) - 2$ (на рис. 2.8 ряд 1);

– если $y(0) = 1{,}101$, то $c = 50$ и $y(t) = 2tg(50 - 2t) - 2$ (на рис. 2.8 ряд 2).

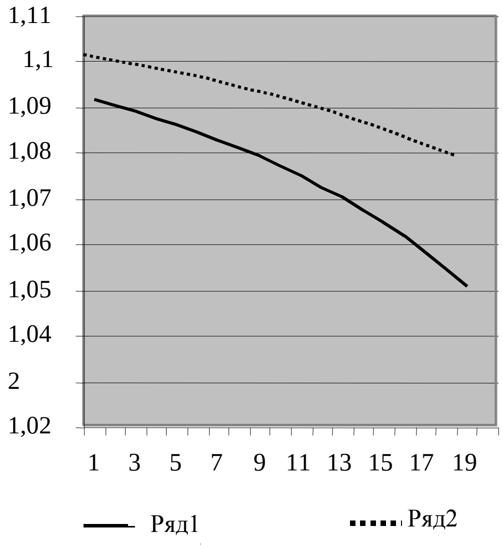


Рис. 2.8. Интегральные кривые для случая $D < 0$

б) рассмотрим случай, когда уравнения (2.4) имеет единственное стационарное решение (D=0). Пусть, для примера, $a = 1$, $b = 6$, $m = 2$, $n = 4$, $k = -1$. Подставив эти данные в уравнение $y' = k(-ay^2 + (b-m)y - n)$, получим уравнение

$$y' = y^2 - 4y + 4. \qquad (2.5)$$

В этом случае D=0, и при $y' = 0$ уравнение (2.5) имеет единственное стационарное решение $y^* = 2$.

Решим дифференциальное уравнение (2.5):

$$\frac{dy}{dt} = (y-2)^2, \quad \int \frac{dy}{(y-2)^2} = -\int dt, \quad -\frac{1}{y-2} = -t - c$$

или $\dfrac{1}{y-2} = t + c$, тогда $y(t) = \dfrac{1}{t+c} + 2$.

Зададим начальные условия: пусть в начальный момент времени $y(0) = 7$, то есть больше, чем стационарное значение $y^* = 2$, тогда $c = 0{,}2$, а $y(t) = \dfrac{1}{t+0{,}2} + 2$ (рис. 2.9 ряд 2). Интегральные кривые асимптотически приближаются к единственному стационарному решению $y^* = 2$. В этом случае выпуск падает, приближаясь к равновесному решению.

Пусть $y(0) = 1{,}5$, то есть меньше, чем стационарное значение $y^* = 2$, тогда $c = \text{-}2$ и $y(t) = \dfrac{1}{t-2} + 2$ (рис. 2.9 ряд 1). Интегральные кривые, удовлетворяющие условию $y(0) < y^*$, асимптотически приближаются к равновесному решению при $t \to 0$.

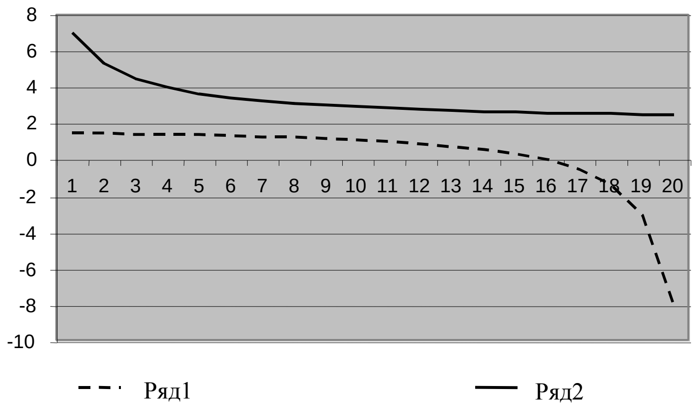


Рис. 2.9.

в) рассмотрим случай, когда уравнение (2.4) имеет два стационарных решения y_1^* и y_2^* $(0 < y_1^* < y_2^*)$, при этом $D > 0$, $k < 0$. Общее решение дифференциального уравнения $y' = k(-ay^2 + (b-m)y - n)$ имеет вид:

$$y(t) = y_1^* + \frac{y_2^* - y_1^*}{1 - ce^{-2kt}},\ c = \frac{y_0 - y_2^*}{(y_0 - y_1^*)e^{-2kt}},\ y_0 = y(0).$$

Если начальное значение объема производства $y(0)$ окажется меньше первого равновесного значения y_1^*, то есть $y(0) < y_1^*$, то с течением времени объем производства будет монотонно убывать.

Если $y(0) > y_1^*$, то с течением времени объем производства увеличивается, приближаясь к равновесному значению y_2^*. Если $y(0) < y_2^*$, то есть начальный объем производства оказывается больше первого равновесного значения, но меньше второго равновесного значения, тогда объем производства будет расти, приближаясь к равновесному значению y_2^*.

Пусть $p(y)=5-y, c(y)=3+y$, то есть $a=1, b=5, m=1, n=3$. Подставим эти значения в уравнение $y' = k(-ay^2+(b-m)y-n)$, полагая, что $k=-1$. В результате получим дифференциальное уравнение

$$y' = y^2 - 4y + 3. \qquad (2.6)$$

В этом случае $D = 4 > 0$, и существуют два ненулевых стационарных (равновесных) решения $y_1^* = 1$ и $y_2^* = 3$. На рис. 2.10 ряд 1 задает равновесную прямую $y_2^* = 3$, а ряд 5 задает равновесную прямую $y_1^* = 1$.

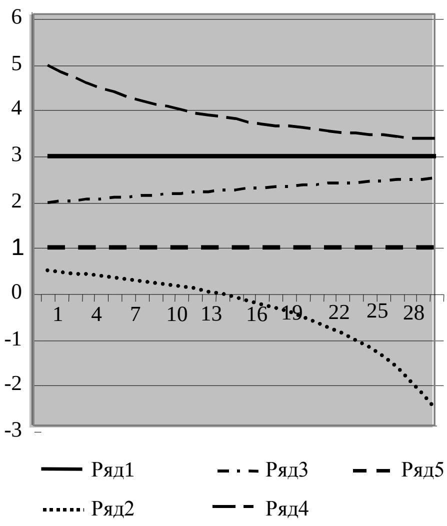


Рис. 2.10

Общее решение дифференциального уравнение $y' = y^2 - 4y + 3$ имеет вид:

$$y(t) = 1 + \frac{2}{1 - ce^{-2kt}}, \quad c = \frac{y_0 - 3}{(y_0 - 1)e^{-2kt}},$$

где $y_0 = y(0)$.

Рассмотрим пример, когда начальное значение объема производства $y(0)$ окажется меньше первого равновесного решения y_1^*, то есть $y(0) = 0{,}5$. В этом случае $c = 5$ и решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = 1 + \frac{2}{1 - 5e^{-2kt}}.$$

Данная интегральная кривая на рисунке 24 представлена рядом 2. С течением времени объем производства будет монотонно убывать.

Рассмотрим пример, при $y(0) = 2$ ($y_1^* < y(0) < y_2^*$).

При этом $c = -1$, и решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = 1 + \frac{2}{1 + e^{-2kt}}.$$

Данная интегральная кривая на рис. 2.10 представлена рядом 3. С течением времени объем производства увеличивается, приближаясь к равновесному решению $y_2^* = 3$.

Если в начальный момент времени объем производства превышает второе равновесное значение, то есть, например, при $y(0) = 5$, ($y(0) > y_2^*$) $c = 0{,}5$, то решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = 1 + \frac{2}{1 - 0{,}5e^{-2kt}}.$$

Данная интегральная кривая на рис. 2.10 представлена рядом 4. С течением времени объем производства уменьшается, приближаясь к равновесному решению $y_2^* = 3$.

Итак, $y_2^* = 3$ – устойчивое равновесие, $y_1^* = 1$- неустойчивое равновесие. Это означает, что существует критический порог объема производства, равный y_1^*. Если начальное значение объема производства $y(0)$ окажется больше y_1^*, то с течением времени этот уровень приблизится к равновесному значению y_2^*. Если же $y(0)$ меньше значения y_1^*, то объем производства будет монотонно убывать до нуля. Таким образом, любое снижение производства ниже критического уровня чревато банкротством предприятия.

2.3. Модифицированная модель естественного роста

Качественная оценка роста дохода часто дается через оценку величины непроизводственного потребления.

Рассмотрим модель, описывающую динамику дохода $y(t)$, который равен сумме непроизводственного потребления $S(t)$ и инвестиций (производственного потребления) $I(t)$:

$$y(t) = S(t) + I(t). \tag{2.7}$$

Как и в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость роста дохода пропорциональна величине инвестиций:

$$by'(t) = I(t)$$

или $y'(t) = \dfrac{1}{b} I(t)$,

где b – коэффициент капиталоемкости прироста дохода;

$\dfrac{1}{b}$ – предельная производительность капитала (приростная капиталоотдача).

Тогда динамику дохода можно описать дифференциальным уравнением

$$y(t) = S(t) + b \cdot y'(t). \tag{2.8}$$

В рассматриваемой модели потребление $S(t)$ может считаться постоянной величиной во времени, расти с заданным постоянным темпом или иметь какую либо другую динамику. Простейший вариант модели, когда $S(t)$=0, позволяет определить максимально технологически возможный темп прироста дохода $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{1}{b}$. Если в модели потребление $S(t)$ растет с постоянным темпом $S(t) = S_0 e^{rt}$, где S_0 – потребление в начальный момент времени, r – темп прироста потребления, то величина r не должна быть больше максимально возможного темпа прироста дохода $\dfrac{1}{b}$.

Рассмотрим пример, когда $S(t)$ является величиной, постоянной во времени.

Требуется найти динамику функции дохода $y = y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $S(t) = 2$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = \frac{1}{2}$, величина дохода $y(0) = 6$.

Решение. Пусть $S(t) = S_0 = 2$ – постоянна во времени, тогда получим

$$y(t) = by'(t) + S_0 = \frac{1}{2}y'(t) + 2$$

или $y'(t) = \frac{1}{b}(y(t) - S_0) = 2(y(t) - 2).$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{b}t} + S_0 = c \cdot e^{2t} + 2$. Используя начальные условия, получим $c = 4$ и интегральную кривую $y(t) = 4e^{2t} + 2$. График полученной интегральной кривой, описывающей динамику дохода $y(t)$, представлен на рис. 2.11.

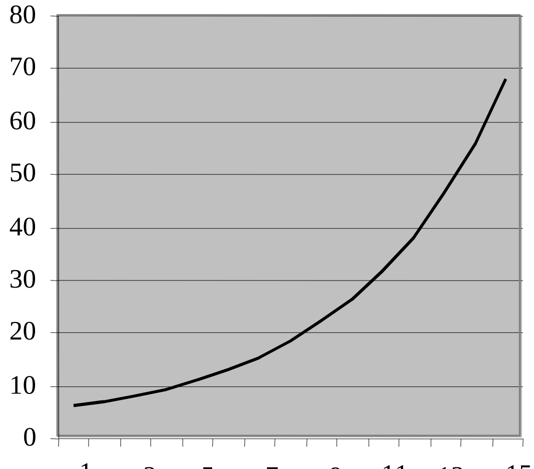


Рис. 2.11. График интегральной кривой $y(t) = 4e^{2t} + 2$

Рассмотрим зависимость изменения величины дохода от таких параметров как непроизводственное потребление S_0, коэффициент капиталоемкости прироста дохода b (или предельная производительность капитала $\frac{1}{b}$), начальная величина дохода $y(0)$.

На рис. 2.12 представлены графики динамики дохода с различными постоянными значениями функции непроизводственного потребления $S(t)$. Если S_0 =2, то динамика дохода представлена интегральной кривой $y(t) = 4e^{2t} + 2$ (ряд 1). Если S_0 =5, то динамика дохода представлена интегральной кривой $y(t) = e^{2t} + 5$ (ряд 2). Если S_0 =7, то динамика дохода представлена интегральной кривой $y(t) = -e^{2t} + 7$ (ряд 3). Непроизводственное потребление $S(t)$ оказывает влияние на величину дохода. Предлагается студентам самостоятельно сделать выводы.

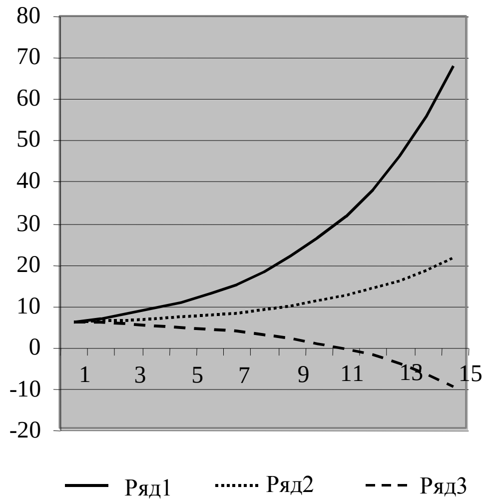


Рис. 2.12. Динамика дохода с различными постоянными значениями функции потребления

На рис. 2.13 представлены графики динамики дохода с различными значениями капиталоемкости прироста дохода b. График функции $y(t) = 4e^{2t} + 2$ представлен рядом 1, график функции $y(t) = 4e^{3t} + 2$ изображен рядом 2, а график функции $y(t) = 4e^{0,9t} + 2$ – рядом 3. Динамика дохода зависит от величины капиталоемкости прироста дохода. Предлагается студентам самостоятельно сделать выводы.

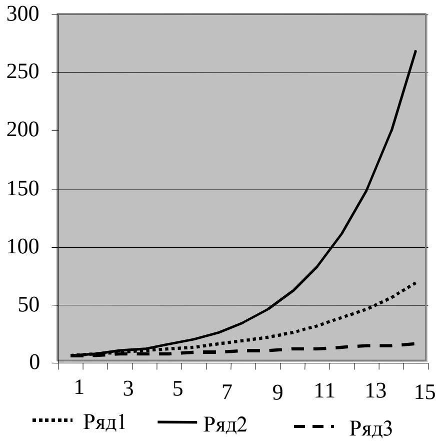


Рис. 2.13. Динамика дохода с различными значениями капиталоемкости прироста дохода b

На рис. 2.14 представлены графики динамики дохода в зависимости от его начального значения. Если $y(0)$ =6, то график функции имеет вид $y(t) = 4e^{2t} + 2$ (ряд 1), если $y(0)$ =12, то $y(t) = 10e^{2t} + 2$ (ряд 2) и, если $y(0)$ =22, то $y(t) = 20e^{2t} + 2$. Динамика дохода зависит от величины дохода. Предлагается студентам самостоятельно сделать выводы.

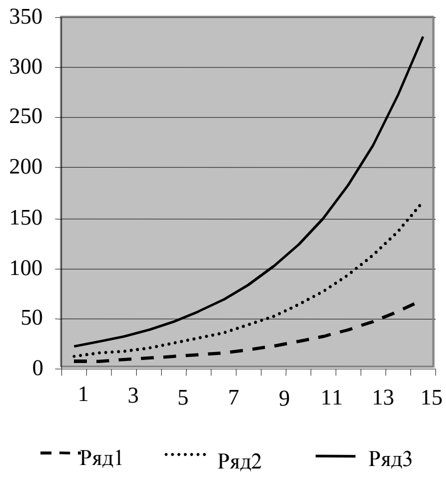


Рис. 2.14. Динамика дохода в зависимости от его начального значения $y(0)$

Рассмотрим пример, когда $S(t)$ имеет какую либо другую динамику.

Требуется найти динамику дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $S(t) = 3t - 1$. Величина дохода $y(0) = 6,\ b = \frac{1}{2}$.

Решение. Подставим в дифференциальное уравнение (2.8) выражение функции потребления $S(t) = 3t - 1$, получим

$$y(t) = \frac{1}{2} y'(t) + 3t - 1.$$

Найдем решение данного дифференциального уравнения, то есть функцию дохода, удовлетворяющую неоднородному линейному уравнению первого порядка. Перепишем его в виде

$$\frac{1}{2} y' - y = 1 - 3t \text{ или в виде } y' - 2y = 2 - 6t.$$

Подстановка $y = uv$ дает общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y(t) = e^{2t}(3te^{-2t} + 0.5e^{-2t} + c).$$

По условию задачи $y(0) = 6$, тогда c=5,5 и частное решение дифференциального уравнения будет иметь вид: $y(t) = e^{2t}(3te^{-2t} + 0{,}5e^{-2t} + 5{,}5) = 3t + 0{,}5 + 5{,}5e^{2t}$. Динамика дохода представлена интегральной кривой на рис. 2.15.

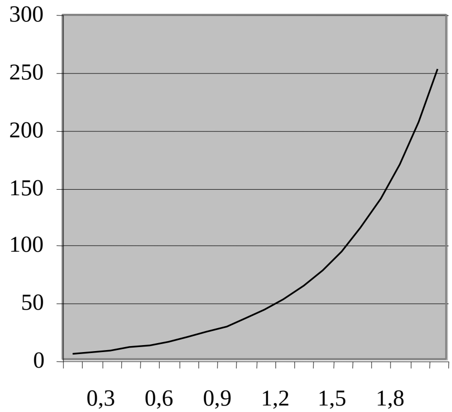


Рис. 2.15

Самостоятельно рассмотреть зависимость изменения величины дохода от таких параметров как непроизводственное потребление S_0; коэффициент капиталоемкости прироста дохода b (или предельная производительность капитала $\frac{1}{b}$); начальная величина дохода $y(0)$.

Пример. Пусть $S(t)$ растет с заданным постоянным темпом. Требуется найти динамику дохода $y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $S(t) = e^{rt}$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = \frac{1}{3}$, величина дохода $y(0) = 4$, норма прироста потребления $r = 4$.

Решение**.** Подставим в дифференциальное уравнение (2.8) выражение функции потребления $S(t) = e^{4t}$, получим $y = \frac{1}{3}y' + e^{4t}$,то есть функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Перепишем его в виде

$$\frac{1}{3}y' - y = -e^{4t} \text{ или } y' - 3y = -3e^{4t}.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = e^{3t}(-3e^{t} + c).$$

Поскольку $y(0) = 4$, то c=7, тогда $y(t) = 7e^{3t} - 3e^{4t}$. График интегральной кривой, описывающей динамику дохода, представлен на рис. 2.16.

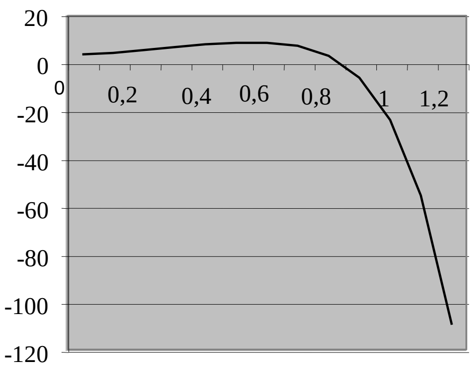


Рис. 2.16. График интегральной кривой $y(t) = 7e^{3t} - 3e^{4t}$

Самостоятельно объяснить причину убывания дохода $y(t)$. Выяснить, как должны быть связаны между собой величины r и $\frac{1}{b}$.

Пример. Пусть предельная производительность капитала $\frac{1}{b}$ больше нормы прироста потребления r $\left(\frac{1}{b} > r\right)$. Требуется найти динамику функции дохода $y = y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $S(t) = e^{rt}$, коэффициент капиталоемкости дохода $b = \frac{1}{3}$, величина дохода $y(0) = 4$, норма прироста потребления $r = 2$.

Решение. Подставим в дифференциальное уравнение (2.8) выражение функции потребления $S(t) = e^{2t}$, получим $y = \frac{1}{3}y' + e^{2t}$,то есть функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Перепишем его в виде:

$$\frac{1}{3}y' - y = -e^{2t} \text{ или } y' - 3y = -3e^{2t}.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(0) = e^{3t}(3e^{-t} + c).$$

Поскольку $y(0) = 4$, то $c = 1$, тогда $y(t) = 3e^{2t} + e^{3t}$. График данной интегральной кривой, описывающей динамику дохода представлен на рис. 2.17.

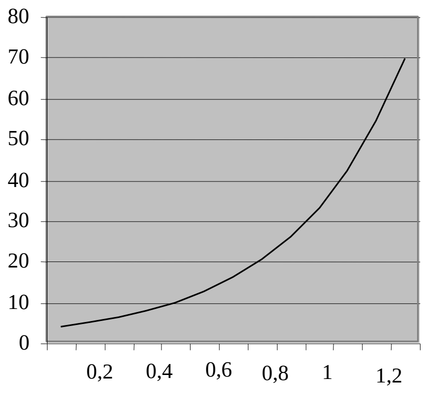


Рис. 2.17. График интегральной кривой $y(t) = 3e^{2t} + e^{3t}$

Самостоятельно рассмотреть динамику дохода $y(t)$ при различных значениях таких параметров как норма прироста потребления r, коэффициент капиталоемкости прироста дохода b (или предельная производительность капитала $\frac{1}{b}$), начальная величина дохода $y(0)$.

2.4. Динамическая модель Кейнса

В модели Кейнса рассматриваются основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики: $Y(t)$ – национальный доход, $E(t)$ – государственные расходы, $S(t)$ – не производственное потребление, $I(t)$ – инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени t и связаны соотношениями:

$$Y(t) = S(t) + I(t) + E(t),$$
$$S(t) = a(t)\ Y(t) + b(t), \tag{2.9}$$
$$I(t))= l(t)\ Y'(t),$$

где $0 < a(t) < 1$ – коэффициент склонности к потреблению (предельная склонность потребления);

$b(t)$ – конечное потребление (базовый уровень потребительских расходов, фиксированная часть фонда потребления);

$l(t)$ – норма акселерации (коэффициент акселерации – показывает на сколько возрастут инвестиции, если национальный доход возрастет на единицу).

Требуется найти динамику национального дохода $Y(t)$, которая описывается дифференциальным уравнением вида:

$$Y'(t) = \frac{1-a(t)}{l(t)} Y(t) - \frac{b(t)+E(t)}{l(t)}. \tag{2.10}$$

Если основные параметры a, b, l, E являются постоянными числами, тогда получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y'(t) = \frac{1-a}{l} Y(t) - \frac{b+E}{l}, \tag{2.11}$$

общее решение которого имеет вид:

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + ce^{\frac{1-a}{l} \cdot t}. \tag{2.12}$$

Равновесное решение при $Y'=0$ задается формулой:

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}. \tag{2.13}$$

Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $c = Y_0 - Y_p < 0$ и интегральные кривые при $t \to \infty$ уходят вниз от стационарного решения $Y_p = \frac{b+E}{1-a}$, то есть национальный доход со временем падает при заданных параметрах a, b, l и E. Если же $Y_0 > Y_p$, то $c > 0$ и национальный доход растет во времени и интегральные кривые при $t \to \infty$ уходят вверх от равновесной прямой.

Пример. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 300 ед. Базовая величина потребления $b=120$ ед., предельная склонность к потреблению равна $a=0{,}6$, а норма акселерации $l=2$. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 40ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

Решение. В дифференциальное уравнение (2.11) подставим исходные данные и получим динамику национального дохода в виде:

$$Y'(t) = 0{,}2 \cdot Y(t) - 80. \tag{2.14}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.14) имеет вид:

$$Y(t) = 400 + ce^{0{,}2t}.$$

Равновесное решение (2.14) определяется уравнением $Y_p = \frac{b+E}{1-a} = \frac{160}{0{,}4} = 400$. На рис.2.18 график равновесного решения представлен рядом 1.

Если базовая величина потребителя будет меньше равновесного значения, например, $Y_0 = Y(0) = 200$, то получим частное решение дифференциального уравнения в виде:

$$Y(t) = 400 - 200e^{0{,}2t}.$$

Таким образом, получаем, что если в начальный момент времени $Y(0) = 200$, то интегральная кривая уходит вниз от равновесного решения, и национальный доход падает. На рисунке 32 эта интегральная кривая представлена рядом 2.

Если базовая величина потребителя будет больше равновесного значения, например $Y(0) = 600$, то $Y(t) = 400 + 200e^{0{,}2t}$.

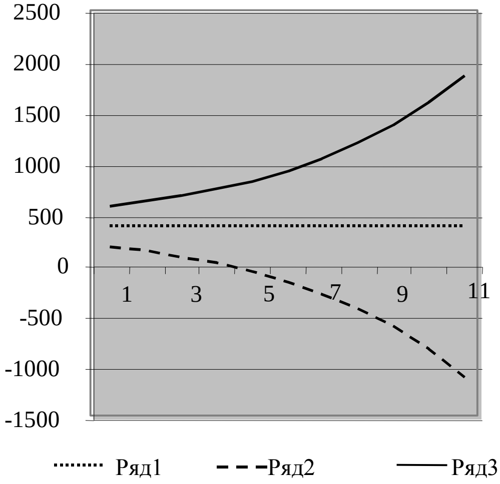


Рис. 2.18. Динамика национального дохода $Y(t)$

В этом случае, национальный доход растет во времени и интегральные кривые уходят вверх от графика равновесного решения. Равновесное решение национального дохода Y_p является неустойчивым.

Используя формулу (2.12) динамики национального дохода $Y(t)$ по модели Кейнса, самостоятельно проанализировать роль каждого параметра в увеличении равновесного решения Y_p согласно формуле (2.13), выяснить, что ведет к падению $Y(t)$. Дать рекомендации по изменению параметров, описывающих основные экономические показатели.

2.5. Неоклассическая модель роста

Целью задачи, рассматриваемой в этом разделе, является описание динамики капиталовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$ или представление ее как функции времени t:

$$k'(t) = mf(k) - (a+b)k,$$

где $f(k) = \dfrac{F(K,L)}{L} = F(k,1)$, $Y = F(K,L)$ – национальный доход;

K – объем капиталовложений (производственных фондов);

L – объем затрат труда.

Уравнение

$$k'(t) = mf(k) - (a+b)k \tag{2.15}$$

называется уравнением неоклассического роста и представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое является автономным. У автономного дифференциального уравнения существует стационарное решение k^*, если $k' = 0$, т.е. $mf(k) - (a+b)k = 0$.

Пример. Для производственной функции (ПФ) $F(K,L) = \sqrt{KL}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t) = mf(k) - (a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m = 0{,}5$, норма амортизации $b = 0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет один процент ($a = 0{,}01$).

Решение. Найдем $f(k) = \dfrac{F(K,L)}{L} = \sqrt{k}$, тогда дифференциальное уравнение неоклассического роста примет вид:

$$k'(t) = m\sqrt{k} - (a+b)k, \qquad \text{k}' = 0{,}5 \cdot \sqrt{k} - 0{,}21k\,. \tag{2.16}$$

Стационарное решение k^* этого уравнения получим из равенства

$$0{,}5\sqrt{k} - (0{,}01 + 0{,}2)k = 0,$$

$$k^* = \frac{m^2}{(a+b)^2} = 5{,}67\,.$$

Общее решение дифференциального уравнения неоклассического роста (2.16)

$$k(t) = \left[\frac{m}{(a+b)} + ce^{\frac{-(a+b)}{2}t}\right]^2,$$

тогда решение (2.16) будет иметь вид:

$$k(t) = \left[2{,}38 + ce^{-0{,}105t}\right]^2. \tag{2.17}$$

Выясним, как ведет себя интегральная кривая (2.17), если в начальный момент времени значение капиталовооруженности меньше равновесного значения $k^* = 5{,}67$. Пусть $k(0) = 1$, тогда $c = -1{,}38$ и $k(t) = \left[2{,}38 - 1{,}38e^{-0{,}105\,t}\right]^2$. Полученная интегральная кривая, описывающая динамику капиталовооруженности представлена на рис. 2.19 рядом 2.

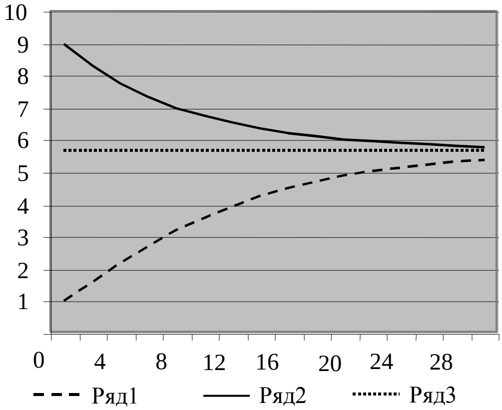


Рис. 2.19. Семейство интегральных кривых, сходящихся к стационарному решению

Если в начальный момент времени значение капиталовооруженности больше равновесного решения $k^* = 5{,}67$, например, $k(0) = 9$, тогда $c = 0{,}62$ и $k(t) = \left[2{,}38 + 0{,}62e^{-0{,}105t}\right]^2$. Полученная интегральная кривая, описывающая динамику капиталовооруженности представлена на рисунке 33 рядом 1. Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению. На рис. 2.19 стационарное решение представлено прямой $k^* = 5{,}67$ (ряд 3). Следовательно при неизменных входных параметрах m, a, b функция капиталовооруженности стремится к стационарному значению не зависимо от начальных условий. Такое стационарное решение k^* является устойчивым.

Самостоятельно проверить, как влияют параметры задачи m, a, b на величину капиталовооруженности и показать это графически.

2.6. Модель Солоу

Модель Солоу в абсолютных показателях записывается в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} Y = F(K, L), \\ C = (1-\rho)Y, \\ \dfrac{dK}{dt} = \rho Y - bK, K(0) = K_0, \\ \dfrac{dL}{dt} = aL, L(0) = L_0 \text{ } или \text{ } L = L_0 e^{at}. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Если вести относительные показатели:

ρ – норма инвестиции;

b – норма амортизации;

a – годовой прирост трудовых ресурсов;

$k = \dfrac{K}{L}$ – капиталовооруженность (фондовооруженность);

$y = \dfrac{Y}{L} = \dfrac{F(K,L)}{L} = F\left(\dfrac{K}{L},1\right) = F(k,1) = f(k)$ – производительность труда;

$i = \dfrac{I}{L}$ – удельные инвестиции;

$c = \dfrac{C}{L}$ – удельное потребление, то поведение макропоказателей модели (2.18) целиком определяется дифференциальным уравнением (2.20) и динамикой трудовых ресурсов.

$$k' = \rho \cdot f(k) - (b+a)k\ ,\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}\ . \qquad (2.20)$$

Каждый абсолютный или относительный показатель модели Солоу изменяется во времени, то есть можно говорить о траектории системы в абсолютных или относительных показателях. Траектория называется стационарной, если показатели на ней не изменяются во времени.

На стационарной траектории капиталовооруженность постоянна и равна k^*. Такое значение капиталовооруженности называется стационарным. На стационарной траектории $k' = 0$ или $\rho \cdot f(k) - (b+a)k = 0$ и k^* является решением данного уравнения. Стационарная точка k^* – точка равновесия, в которой инвестиции равны выбытию капитала. Если экономика достигает точки k^*, то уровень k перестает изменяться. Это состояние называется устойчивой капиталовооруженностью. Уровень k^* – устойчивое равновесие, то есть отклонение от него в итоге приводит к возврату в первоначальное состояние. При $k < k^*$ ($k' > 0$) инвестиции превышают выбытие, наблюдается рост k до состояния k^*. Если $k > k^*$ ($k' < 0$), то выбытие превышают инвестиции и уровень k снижается до k^*.

На стационарной траектории все основные макроэкономические показатели растут экспоненциально, пропорционально трудовым ресурсам:

$$\begin{cases} L(t) = L_0 e^{at}, \\ Y(t) = f(k^*) L_0 e^{at}, \\ K(t) = k^* L_0 e^{at}, \\ C(t) = (1-\rho) f(k^*) L_0 e^{at}, \\ I(t) = \rho \cdot f(k^*) L_0 e^{at}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Пример. Дана функция национального дохода $F(K,L) = 3K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$. Найти динамику капиталовооруженности и стационарное значение капиталовооруженности. Построить интегральные кривые, если норма инвестиций равна 0,5, норма амортизации равна 0,1, а годовой прирост трудовых ресурсов два процента. Рассмотрим случаи при $k^* > k(0)$ и $k^* < k(0)$.

Решение: Найдем производительность труда

$$f(k) = \frac{3K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}}{L} = \frac{3K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{k}\ .$$

Подставим в уравнение (2.9) значения $m = 0{,}5,\ b = 0{,}1,\ a = 0{,}02$ и $f(k) = 3 \cdot \sqrt[3]{k}$. Окончательно получим

$$k'(t) = 1{,}5 \cdot \sqrt[3]{k} - 0{,}12k$$

или

$$\frac{dk}{dt} = 1{,}5 \cdot \sqrt[3]{k} - 0{,}12k\ . \tag{2.22}$$

Решим дифференциальное уравнение $\frac{dk}{dt} = 1{,}5 \cdot \sqrt[3]{k} - 0{,}12k$. Обозначим $\sqrt[3]{k} = z$, $k = z^3$, $dk = 3z^2 dz$, тогда получим:

$$\frac{3z^2 dz}{dt} = 1{,}5z - 0{,}12z^3,\ \frac{z^2 dz}{1{,}5z - 0{,}12z^2} = \frac{dt}{3},$$

$$\int \frac{zdz}{1{,}5 - 0{,}12z^2} = \frac{1}{3}\int dt,\ \frac{1}{-0{,}24}\int \frac{-0{,}24zdz}{1{,}5 - 0{,}12z^2} = \frac{1}{3}\int dt,$$

$$\ln\left|1{,}5-0{,}12z^2\right| = -0{,}08t+\ln c\,,\ \ 1{,}5-0{,}12z^2 = ce^{-0{,}08t}\,,$$

$$z^2 = 12{,}5-ce^{-0{,}08t},$$

$$k^{\frac{2}{3}}(t) = 12{,}5-ce^{-0{,}08t}.$$

Общее решение дифференциального уравнения $k'(t) = 1{,}5\cdot\sqrt[3]{k}-0{,}12k$, описывающее динамику капиталовооруженности, имеет вид:

$$k(t) = (12{,}5-ce^{-0{,}08t})^{\frac{3}{2}}\,. \qquad (2.23)$$

Найдем стационарное значение капиталовооруженности (устойчивое равновесие):

$$1{,}5\cdot\sqrt[3]{k}-0{,}12k = 0$$

или $\sqrt[3]{k}(1{,}5-0{,}12\sqrt[3]{k^2} = 0$,

тогда $k^* = (12{,}5)^{\frac{3}{2}} = 44{,}2$. График стационарной траектории представлен на рис. 2.20 рядом 3.

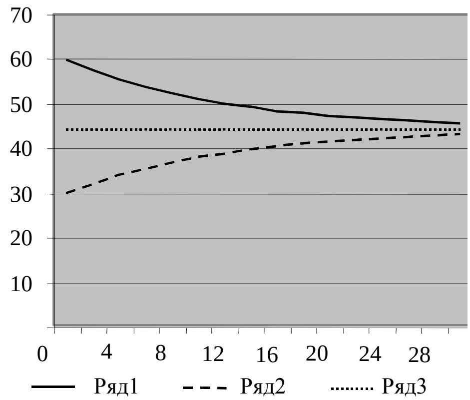


Рис. 2.20. Динамика капиталовооруженности

Покажем, что интегральные кривые (2.12) стремятся к графику стационарного решения $k^* = 44{,}2$.

Если в начальный момент времени $k(0) = 60$, $k^* = 44{,}2$, то $c = -2{,}82$ и

$$k(t) = (12{,}5+2{,}82e^{-0{,}08t})^{\frac{3}{2}}\,.$$

В этом случае уровень капиталовооруженности (рисунок 34 ряд 1) уменьшается, приближаясь к графику стационарного решения.

Если в начальный момент времени $k(0)=30$, $k^*=44{,}2$, то $c=2{,}85$ и

$$k(t)=(12{,}5-2{,}85e^{-0{,}08t})^{\frac{3}{2}}.$$

В этом случае уровень капиталовооруженности (рис. 2.20 ряд 2) увеличивается, приближаясь к графику стационарного решения. Стационарное решение $k^*=44{,}2$ является устойчивым, и отклонение от него в итоге приводит к возврату в первоначальное состояние.

Если $k(0)=k^*$, то экономика находится на стационарной траектории и может сойти с нее только при изменении внешних условий (установление другого значения нормы накопления либо переход к новым технологиям с изменением функции $F(K,L)$). При $k(0)\neq k^*$ в экономике будет происходить переходный процесс, который заканчивается установлением стационарного режима.

Самостоятельно рассмотреть и изобразить графически случаи ускоренного темпа роста капиталовооруженности и замедленного роста капиталовооруженности.

2.7. Динамическая модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара

Основное предположение модели состоит в том, что цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением. Спрос и предложение будем считать линейными функциями цены, то есть $D(p)=a-b\cdot p$, $S(p)=\alpha+\beta\cdot p$, где $a,b,\alpha,\beta>0$. Изменение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности этого превышения:

$$p'(t)=\gamma(D-S),$$

где $\gamma>0$ – коэффициент пропорциональности.

Если спрос и предложение являются линейными функциями цены, то есть $D(p)=a-b\cdot p$, $S(p)=\alpha+\beta\cdot p$, где $a,b,\alpha,\beta>0$, то неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$p'(t)=-\gamma((b+\beta)\cdot p-a+\alpha). \qquad (2.24)$$

Это уравнение имеет при $p'=0$ стационарное решение

$$p^*=\frac{a-\alpha}{b+\beta}>0. \qquad (2.25)$$

При $p_0 < p^*$ цена p стремится к p^* возрастая, а при $p_0 > p^*$ цена p стремится к p^* убывая. Стационарная точка p^* является точкой устойчивого равновесия. Цена p^* есть устойчивая равновесная цена, при которой равны спрос и предложение. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (34) имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + c \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t}.$$

Пример. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены: $D = 28 - 2p, S = 19 + p$, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности γ=1. Рассмотрим случаи, когда $p^* > p(0)$ и $p^* < p(0)$. Построить графики и сделать выводы.

Решение. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение (2.24) для примера будет иметь вид:

$$p'(t) = 9 - 3p$$

или $\dfrac{dp}{dt} = 3(3 - p)$. (2.26)

Общее решение уравнения (36), описывающего динамику равновесной цены, имеет вид:

$$p(t) = 3 - ce^{-3t}. \qquad (2.27)$$

Найдем точку устойчивого равновесия $p^* = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$=3.

График прямой $p^* = 3$ представлен на рис. 2.21 рядом 3. Покажем на графике, что интегральные кривые (2.27) стремятся к равновесному решению $p^* = 3$.

Если в начальный момент времени $p(0) = 9,\quad p(0) > p^*$, то $c = -6$ и $p(t) = 3 + 6e^{-3t}$. В этом случае цена на товар уменьшается, приближаясь к равновесной цене $p^* = 3$ (рис. 2.21 ряд 1).

Если в начальный момент времени $p(0) = 1,\ p(0) < p^*$, то $c = 2$ и $p(t) = 3 - 2e^{-3t}$. В этом случае цена на товар увеличивается, приближаясь к равновесной цене (рис. 2.21 ряд 2). Стационарное решение $p^* = 3$

является устойчивым, и отклонение от него в итоге приводит к возврату в первоначальное состояние.

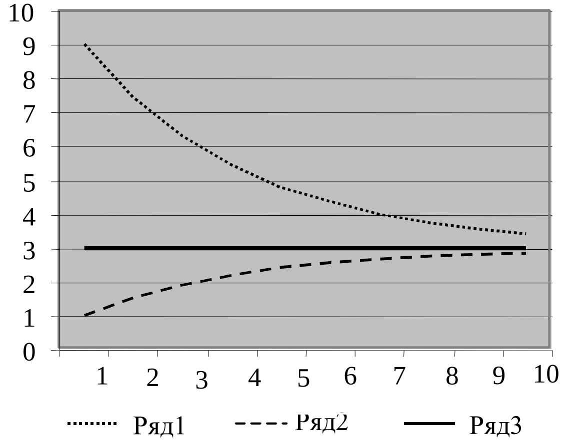


Рис. 2.21. Установление равновесной цены в модели Эванса

Итак, показали, что цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением. Увеличение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности этого превышения.

Самостоятельно рассмотреть и изобразить графически случаи превышения спроса над предложением и равенство спроса предложению. Сделать выводы при $\beta > b, \beta = b, \beta < b$.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Функция полезности имеет вид: $u(x_1, x_2)$, бюджет потребителя равен I, известны цены первого блага p_1 и второго блага p_2.

Требуется:

– составить уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия.

– определить перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя.

– определить перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия, связанного с повышением цены на второе благо до двух единиц.

–- определить разность между компенсирующим и эквивалентным изменениями дохода.

1.1. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 3)(x_2 + 4)$, доход $I = 45$, цены благ $p_1 = 1,\ \ p_2 = 1{,}5$.

1.2. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (2x_1 + 1)(x_2 + 4)$, доход $I = 10$, цены благ $p_1 = 2,\ \ p_2 = 1$.

1.3. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 5)(x_2 + 6)$, доход $I = 27$, цены благ $p_1 = 3,\ \ p_2 = 1$.

1.4. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (3x_1 + 1)(3x_2 + 2)$, доход $I = 45$, цены благ $p_1 = 1,\ p_2 = 1{,}5$.

1.5. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 4)(x_2 + 5)$, доход $I = 64$, цены благ $p_1 = 1,\ p_2 = 1{,}5$.

1.6. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (2x_1 + 1)(2x_2 + 3)$, доход $I = 50$, цены благ $p_1 = 3,\ \ p_2 = 1$.

1.7. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 3)$, доход $I = 60$, цены благ $p_1 = 2,\ \ p_2 = 1{,}5$.

1.8. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (4x_1 + 3)(4x_2 + 4)$, доход $I = 80$, цены благ $p_1 = 2,\ p_2 = 1$.

1.9. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 8)(x_2 + 9)$, доход $I = 90$, цены благ $p_1 = 1, \quad p_2 = 1$.

1.10. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (2x_1 + 1)(4x_2 + 1)$, доход $I = 80$, цены благ $p_1 = 2, \quad p_2 = 1{,}5$.

1.11. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 4)$, доход $I = 40$, цены благ $p_1 = 1, \quad p_2 = 1{,}4$.

1.12. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 8)(x_2 + 6)$, доход $I = 56$, цены благ $p_1 = 2, \quad p_2 = 1{,}5$.

1.13. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 9)(x_2 + 5)$, доход $I = 65$, цены благ $p_1 = 1{,}5, \quad p_2 = 1$.

1.14. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (2x_1 + 4)(2x_2 + 5)$, доход $I = 84$, цены благ $p_1 = 2, \quad p_2 = 1$.

1.15. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 7)(2x_2 + 3)$, доход $I = 120$, цены благ $p_1 = 1{,}5, \quad p_2 = 1{,}5$

1.16. Функция полезности $u(x_1, x_2) = (5x_1 + 1)(5x_2 + 3)$, доход $I = 150$, цены благ $p_1 = 3, \quad p_2 = 1{,}5$.

Задание 2. При разработке плана заказа путевок для оздоровительных мероприятий коллектива фирмы проведены исследования потребностей сотрудников фирмы в путевках по туристическим маршрутам (x_1) и в путевках на санаторно-курортное лечение (x_2). В результате регрессионного анализа получена зависимость $u(x_1, x_2)$ денежных средств, вносимых сотрудниками за путевки, от числа путевок указанных видов.

Требуется:

– построить карту линий безразличия;

– выполнить расчеты вариантов потребления путевок при условиях:

а) предложение остается на прежнем уровне;

б) предложение возрастает на 10 единиц;

– построить общую функцию спроса на путевки и функции спроса по их видам, используя средние цены путевок p_1 и p_2 и заданные значения общей функции спроса I по вариантам

1) $I = 10000$ и 2) $I = 100000$;

– провести анализ функций спроса, используя показатели эластичности по доходу, цене и замещению.

2.1. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 50x_1 - x_1^2 + 20x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 50, p_2 = 120$.

2.2. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 70x_1 - x_1^2 + 50x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 50, p_2 = 150$.

2.3. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 2x_1^{0,2} \cdot x_2^{0,8}$, цены $p_1 = 35, p_2 = 80$.

2.4. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 50x_1 - x_1^2 - 90x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 40, p_2 = 140$.

2.5. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 3x_1^{0,25} \cdot x_2^{0,75}$, цены $p_1 = 80, p_2 = 120$.

2.6. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 2x_1^{0,1} \cdot x_1^{0,9}$, цены $p_1 = 60, p_2 = 140$.

2.7. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 20x_1 - x_1^2 + 20x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 50, p_2 = 170$.

2.8. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 30x_1 - x_1^2 + 40x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 70, p_2 = 300$.

2.9. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 0,7x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7}$, цены $p_1 = 80, p_2 = 450$.

2.10. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 80x_1 - x_1^2 + 40x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 90, p_2 = 130$.

2.11. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 30x_2$, цены $p_1 = 40, p_2 = 200$.

2.12. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 60x_1 - x_1^2 + 50x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 40, p_2 = 100$.

2.13. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 0{,}6x_1^{0,4} \cdot x_2^{0,6}$, цены $p_1 = 100, p_2 = 110$.

2.14. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 20x_1 - x_1^2 + 40x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 50, p_2 = 150$.

2.15. Функция потребления $u(x_1, x_2) = 70x_1 - x_1^2 + 30x_2 - x_2^2$, цены $p_1 = 40, p_2 = 100$.

Задание 3. Построить линейное уравнение регрессии производственной функции и провести экономический анализ. При построении линейной формы регрессионной зависимости использовать вариант функции Exsel «ЛИНЕЙН» со свободным членом, равным нулю.

3.1

y	*L*	*K*
2,27	112,5	48
1,94	116,4	42,1
2,31	116	42,3
2,49	108,9	43,7
2,57	116,5	42,8
2,01	104,5	41,8
1,87	102	30
2,39	102,7	44,4
2,18	110,2	51,2
2,17	104,7	54,6
1,8	101,1	57,4
2,36	102,6	53,2
2,5	128,5	57,6
2,27	122,5	58,3
2,33	105,2	55,7

3.2

y	*L*	*K*
2,27	48	2,12
1,94	42,1	2,2
2,32	42,3	2,3
2,49	43,7	2,3
2,57	42,8	2,21
2,01	41,8	1,88
1,87	30	1,91
2,39	44,4	2
2,18	51,2	1,9
2,17	54,6	1,99
1,8	57,4	1,54
2,36	53,2	1,74
2,5	57,6	2,23
2,27	58,3	2,14
2,33	55,7	1,87

3.3

y	*L*	*K*
15,16	32,1	24,56
16,7	31	23,7
15,44	32,4	23,78
15,65	33,2	24,1
13,13	31,2	24
14,22	34,8	32,75
16,73	35,4	26,24
17,8	33	25,37
16,88	34,8	24,34
15,67	33,3	22,1
15,99	36,1	25,66
14,33	38,3	24,9
15,77	30,6	20,57
15,28	32,1	24,61
17,04	37,6	25,7

3.4

y	*L*	*K*
48	2,27	112,5
42,1	1,94	116,4
42,3	2,32	111,6
43,7	2,43	108,9
42,8	2,57	116,5
41,8	2,01	104,5
30	1,87	102,7
44,4	2,39	110,2
51,2	2,18	104,7
54,6	2,17	109,4
57,4	1,8	101,1
53,2	2,36	102,6
57,6	2,5	128,5
58,3	2,27	122,5
55,7	2,33	105,2

3.5

y	*L*	*K*
3,45	2,27	48
3,48	1,94	42,1
3,06	2,32	42,3
3,66	2,49	43,7
3,79	2,57	42,8
3,85	2,01	41,8
3,44	1,87	30
4,08	2,39	44,4
4,5	2,18	51,2
4,31	2,17	54,6
3,57	1,8	57,4
3,55	2,36	53,2
4,61	2,5	57,6
3,99	2,27	58,3
4,78	2,33	55,7

3.6

y	*L*	*K*
3,45	2,12	32,1
3,48	2,2	313
3,06	2,11	32,4
3,66	2,03	33,2
3,79	2,21	31,2
3,85	1,88	34,8
3,44	1,91	35,4
4,08	2	33
4,5	1,9	34,8
4,31	1,99	33,3
3,57	1,54	36,1
3,55	1,74	38,3
4,61	2.23	30,6
3,99	2,14	32,1
4,78	1,87	37,6

3.7

y	L	K
15,16	48	2,12
1,94	42,1	2,2
2,32	42,3	2,3
2,49	43,7	2,3
2,57	42,8	2,21
2,01	41,8	1,88
1,87	30	1,91
2,39	44,4	2
2,18	51,2	1,9
2,17	54,6	1,99
1,8	57,4	1,54
2,36	53,2	1,74
2,5	57,6	2,23
2,27	58,3	2,14
2,33	55,3	1,87

3.8

y	L	K
3,45	112,5	48
1,94	116,4	42,1
2,31	116	42,3
2,49	108,9	43,7
2,57	116,5	42,8
2,01	104,5	41,8
1,87	102	30
2,39	102,7	44,4
2,18	110,2	51,2
2,17	104,7	54,6
1,8	101,1	57,4
2,36	102,6	53,2
2,5	128,5	57,6
2,27	122,5	58,3
2,33	105,2	55,7

3.9

y	L	K
3,45	112,5	2,12
3,48	116,4	2,2
3,06	116	2,11
3,66	108,9	2,03
3,79	116,5	2,21
3,85	104,5	1,88
3,44	102,7	1,91
4,08	110,2	2
4,5	104,7	1,9
4,31	109,4	1,99
3,57	101,1	1,54
3,55	102,6	1,74
4,61	128,5	2,23
3,99	122,5	2,14
4,78	105,2	1,87

3.10

y	L	K
201,6	3,45	10,11
202	3,48	13,65
202,6	3,06	13,75
201,8	3,66	11,64
203,3	3,79	12,87
203,4	3,85	12,43
204,7	3,44	14,33
204,3	4,08	15,26
204,5	4,5	15,9
203,9	4,31	18,21
202,7	3,57	13,22
205,8	3,55	13,45
206,5	4,61	12
204,3	3,99	13,07
202,8	4,78	12.01

3.11

y	L	K
32,1	0,43	3,45
31	0,77	3,48
32,4	1,35	3,06
33,2	1,99	3,66
31,2	0,88	3,79
34,8	0,98	3,85
35,4	1,56	3,44
33	2,09	4,08
34,8	1,44	4,5
33,3	2,13	4,31
36,1	1,17	3.57
38,3	1,44	3,55
30,6	1,87	4,61
32,1	2,66	3,99
37,6	2,05	4,78

3.12

y	L	K
112,5	2,27	3,45
116,4	1,94	3,48
111,6	2,32	3,06
108,9	2,49	3,66
116,5	2,57	3,79
104,5	2,01	3,85
102,7	1,87	3,44
110,2	2,39	2
104,7	2,18	1,9
109,4	2,17	1,99
101,1	1,8	1,54
102,6	2,36	1,74
128,5	2,5	2,23
122,5	2,27	2,14
105.2	2,33	1,87

3.13

y	L	K
201,6	10,11	0,43
202	13,65	0,77
202,6	13,75	1,35
201,8	11,64	1,99
203,3	12,87	0,88
203,4	12,43	0,98
204,7	14,33	1,56
204,3	15,26	2,09
204,5	15,9	1,44
203,9	18,21	2,13
202,7	13,22	1,17
205,8	13,45	1,44
209,5	12,22	1,87
204,3	12	2,66
202,8	13,07	2,05

3.14

y	L	K
10,11	6,17	3,45
13,65	7,55	3,48
13,75	6,93	3,06
11,64	6,55	3,66
12,87	6,71	3,79
12,43	7,73	3,85
14,33	7,43	3,44
15,26	7,55	4,08
15,9	7,6	4,5
18,21	6,88	4,31
13,22	6,54	3,57
13,45	4,37	3,55
12,22	6,82	4,61
12	7,33	3,99
13,07	6,01	4,78

Задание 4. Для заданной производственной функции $y(x_1, x_2)$ построить в Excel изокванты и изоклинали. Используя в Excel окно «Таблица подстановки» рассчитать матрицу для производственной функции и по данным рассчитанной таблицы построить график поверхности производственной функции.

4.1. $y(x_1, x_2) = x_1^{0,2} \cdot x_2^{0,8}$ 4.2. $y(x_1, x_2) = x_1^{0,3} x_2^{0,7}$

4.3. $y(x_1, x_2) = 2x_1^{0,6} x_2^{0,4}$ 4.4. $y(x_1, x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$

4.5. $y(x_1, x_2) = 3x_1^{0,7} x_2^{0,3}$ 4.6. $y(x_1, x_2) = 4x_1^{0,6} x_2^{0,4}$

4.7. $y(x_1, x_2) = 2x_1^{0,35} x_2^{0,65}$ 4.8. $y(x_1, x_2) = 5x_1^{0,75} x_2^{0,25}$

4.9. $y(x_1, x_2) = 4x_1^{0,8} x_2^{0,2}$ 4.10. $y(x_1, x_2) = 2x_1^{0,15} x_2^{0,85}$

4.11. $y(x_1, x_2) = x_1^{0,65} x_2^{0,35}$ 4.12. $y(x_1, x_2) = 4x_1^{0,55} x_2^{0,45}$

4.13. $y(x_1, x_2) = 2x_1^{0,5} x_2^{0,5}$ 4.14. $y(x_1, x_2) = 6x_1^{0,3} x_2^{0,7}$

4.15. $y(x_1, x_2) = 5x_1^{0,25} x_2^{0,75}$ 4.16. $y(x_1, x_2) = 7x_1^{0,85} x_2^{0,15}$

Задание 5. Функция полных переменных издержек производства имеет вид $TVC(x)$. Найти предельные $MTVC(x)$ и средние $ATVC(x)$ издержки. Построить графики функций $TVC(x)$, $MTVC(x)$ и исследовать характер их изменения. Выяснить, при каких объемах производства выполняется закон наиболее экономичного производства. Рассчитать эластичность полных издержек в точках экстремума функции $MTVC(x)$ и $ATVC(x)$.

5.1. $TVC(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x$ 5.2. $TVC(x) = x^3 - 2x^2 + 6x$

5.3. $TVC(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ 5.4. $TVC(x) = 2x^3 - x^2 + 2x$

5.5. $TVC(x) = 2x^3 - x^2 + 5x$ 5.6. $TVC(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$

5.7. $TVC(x) = 2x^3 - 9x^2 + 16x$ 5.8. 5.8. $TVC(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

5.9. $TVC(x) = x^3 - x^2 + 7x$ 5.10. 5.10. $TVC(x) = 3x^3 - x^2 + 4x$

5.11. 5.11. $TVC(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$

5.12. 5.12. $TVC(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$

5.13. 5.13.
$TVC(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4x$

5.14. $TVC(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$

5.15. 5.15. $TVC(x) = x^3 - x^2 + 4x$

Задание 6. Требуется найти динамику функции дохода $y = y(t)$, если величина потребления $S(t)$ принимает постоянное значение S_0, изменяется с постоянным темпом $S(t) = e^{rt}$ или имеет другую динамику. Коэффициент капиталоемкости прироста дохода равен b, доход в начальный момент времени равен $y(0) = y_0$, а норма прироста потребления равна r. Рассмотреть, как меняется величина дохода при изменении таких параметров как непроизводственное потребление S_0, коэффициент капиталоемкости прироста дохода b, начальная величина дохода $y(0)$ и норма прироста потребления r. Различные значения S_0, b, r задать самостоятельно и сделать выводы.

6.1. $S(t) = S_0$; $S(t) = t^2 + 3t + 2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.2. $S(t) = S_0$; $S(t) = 2t + 1$; $S(t) = e^{rt}$.

6.3. $S(t) = S_0$; $S(t) = t^2 + 3t + 2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.4. $S(t) = S_0$; $S(t) = 3t + 2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.5. $S(t) = S_0$; $S(t) = \sqrt{t} + 1$; $S(t) = e^{rt}$.

6.6. $S(t) = S_0$; $S(t) = 2t^2 + t - 1$; $S(t) = e^{rt}$.

6.7. $S(t) = S_0$; $S(t) = 0{,}5t^2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.8. $S(t) = S_0$; $S(t) = (t+1)^2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.9. $S(t) = S_0$; $S(t) = 4t + 3$; $S(t) = e^{rt}$.

6.10. $S(t) = S_0$; $S(t) = (0{,}2t + 2)^2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.11. $S(t) = S_0$; $S(t) = \sqrt[3]{t}$; $S(t) = e^{rt}$.

6.12. $S(t) = S_0$; $S(t) = 3t^2 + 2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.13. $S(t) = S_0$; $S(t) = 3\sqrt{t} + 2$; $S(t) = e^{rt}$.

6.14. $S(t) = S_0$; $S(t) = 5t + 1$; $S(t) = e^{rt}$.

6.15. $S(t) = S_0$; $S(t) = t^2 + 3t$; $S(t) = e^{rt}$.

Задание 7

7.1. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 600 ед. Базовая величина потребления b =220 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,6, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 50 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.2. Функция потребления определяется уравнением $C = 140 - 0{,}5Y$. Доход в начальный момент времени составил 2500 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 500 д. е. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.3. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 600 ед. Базовая величина потребления b =200 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,4, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 60 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.4. Функция потребления определяется уравнением $C = 80 - 0{,}6Y$. Доход в начальный момент времени составил 2000 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 400 д. е. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.5. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 700 ед. Базовая величина потребления b =300 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,5, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 70 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.6.Функция потребления определяется уравнением $C = 120 - 0{,}4Y$. Доход в начальный момент времени составил 2200 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 450 д. е. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.7. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 500 ед. Базовая величина потребления b =150 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,5, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 70 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.8. Функция потребления определяется уравнением $C = 150 - 0,8Y$. Доход в начальный момент времени составил 1500 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 300 д. е. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.9. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 800 ед. Базовая величина потребления b =250 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,6, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 90 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.10.Функция потребления определяется уравнением $C = 90 - 0,7Y$. Доход в начальный момент времени составил 200 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы постоянны и равны 600 д. е. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.11. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 850 ед. Базовая величина потребления b =200 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,5, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 100 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.12. Функция потребления определяется уравнением $C = 70 - 0,6Y$. Доход в начальный момент времени составил 850 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы изменяются с постоянным темпом $E = e^{0,02t}$. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.13. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 600 ед. Базовая величина потребления b =180 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,55, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 70 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.14. Функция потребления определяется уравнением $C = 140 - 0,5Y$. Доход в начальный момент времени составил 500 д.е. Норма акселерации $l = 1$, государственные расходы изменяются с постоянным темпом $E = e^{0,025t}$. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

7.15. В макроэкономике государства доход в начале года составлял 900 ед. Базовая величина потребления b =160 ед, предельная склонность к потреблению равна a =0,7, норму акселерации l задать самостоятельно. Величина государственных расходов E фиксирована и равна 50 ед. Найти динамику национального дохода и равновесный доход.

Задание 8

8.1. Для ПФ $F(K,L)=2K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}4$, норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.2. Для ПФ $F(K,L)=\dfrac{L^2}{K}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}6$, норма амортизации $b=0{,}1$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 2% ($a=0{,}02$) .

8.3. Для ПФ $F(K,L)=4K-L$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}5$,норма амортизации $b=0{,}1$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.4. Для ПФ $F(K,L)=K-\dfrac{L}{3}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}4$,норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.5. Для ПФ $F(K,L)=K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}45$,норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1,5 % ($a=0{,}015$) .

8.6. Для ПФ $F(K,L)=2\sqrt{KL}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}5$,норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.7. Для ПФ $F(K,L)=\dfrac{4K-L}{L}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}6$, норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.8. Для ПФ $F(K,L)=2K-3L$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}4$, норма амортизации $b=0{,}15$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 2% ($a=0{,}02$).

8.9. Для ПФ $F(K,L)=\dfrac{3K-2L}{L}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}3$, норма амортизации $b=0{,}25$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.10. Для ПФ $F(K,L)=K-5L$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}4$, норма амортизации $b=0{,}24$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.11. Для ПФ $F(K,L)=2K^{0{,}4}L^{0{,}6}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}5$, норма амортизации $b=0{,}1$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 3% ($a=0{,}03$).

8.12. Для ПФ $F(K,L)=3K^{0{,}8}L^{0{,}2}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}6$, норма амортизации $b=0{,}2$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 4% ($a=0{,}04$) .

8.13. Для ПФ $F(K,L)=K-\dfrac{L}{2}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}45$, норма амортизации $b=0{,}1$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$) .

8.14. Для ПФ $F(K,L)=K^{\frac{5}{7}}L^{\frac{2}{7}}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}4$, норма амортизации $b=0{,}3$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 1% ($a=0{,}01$).

8.15. Для ПФ $F(K,L)=\dfrac{2K-L}{L}$ найти интегральные кривые уравнения $k'(t)=mf(k)-(a+b)k$ и стационарное решение, если норма инвестиций $m=0{,}3$, норма амортизации $b=0{,}1$ и годовой прирост трудовых ресурсов составляет 3% ($a=0{,}03$).

Задание 9. Дана функция национального дохода $F(K,L)$. Найти динамику капиталовооруженности и стационарное значение капиталовооруженности. Построить интегральные кривые, если даны норма сбережения ρ, коэффициент выбытия капитала $0<b<1$ и годовой прирост трудовых ресурсов a. Начальные условия задать самостоятельно таким образом, чтобы $k^*>k(0)$, $k^*<k(0)$.

9.1. $F(K,L)=K^{0,3}L^{0,7}$; ρ =0,5; a =0,02; b =0,1

9.2. $F(K,L)=K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}e^{0,02t}$; ρ =0,25; a =0,03; b =0,2

9.3. $F(K,L)=K^{0,4}L^{0,6}$; ρ =0,3; a =0,02; b =0,1

9.4. $F(K,L)=K^{0,5}L^{0,5}e^{0,01t}$; ρ =0,35; a =0,02; b =0,2

9.5. $F(K,L)=2K^{0,25}L^{0,75}$; ρ =0,4; a =0,01; b =0,15

9.6. $F(K,L)=3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$; ρ =0,25; a =0,03; b =0,1

9.7. $F(K,L)=2K^{0,45}L^{0,55}$; ρ =0,3; a =0,01; b =0,2

9.8. $F(K,L)=K^{0,3}L^{0,7}$; ρ =0,5; a =0,02; b =0,1

9.9. $F(K,L)=K^{0,35}L^{0,65}$; ρ =0,35; a =0,03; b =0,15

9.10. $F(K,L)=4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}e^{0,04t}$; ρ =0,25; a =0,01; b =0,1

9.11. $F(K,L)=K^{0,6}L^{0,4}e^{0,01t}$; ρ =0,3; a =0,02; b =0,2

9.12. $F(K,L)=4K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}$; ρ =0,25; a =0,02; b =0,1

9.13. $F(K,L)=3K^{\frac{2}{7}}L^{\frac{5}{7}}$; ρ =0,45; a =0,01; b =0,15

9.14. $F(K,L)=K^{0,75}L^{0,25}$; ρ =0,4; a =0,01; b =0,1

9.15. $F(K,L)=5K^{0,4}L^{0,6}e^{0,03t}$; ρ =0,25; a =0,03; b =0,1

Задание 10. Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос D и предложение S линейно зависят от цены, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности γ. Начальные условия задать самостоятельно таким образом, чтобы $p^* > p(0)$ и $p^* < p(0)$. Построить график и сделать выводы. Величину γ задать или рассчитать самостоятельно.

10.1.
$D=25-3p$
$S=15+p$

10.2.
$D=30-2p$
$S=10+2p$

10.3.
$D=40-5p$
$S=20+4p$

10.4.
$D=25-5p$
$S=10+2p$

10.5.
$D=50-3p$
$S=20+p$

10.6.
$D=60-4p$
$S=30+4p$

10.7.
$D=3025-3p$
$S=10+5p$

10.8.
$D=50-p$
$S=40+2p$

10.9.
$D=120-3p$
$S=100+4p$

10.10.
$D=45-p$
$S=30+p$

10.11.
$D=40-3p$
$S=10+2p$

10.12.
$D=150-p$
$S=100+p$

10.13.
$D=110-7p$
$S=70+p$

10.14.
$D=90-p$
$S=60+4p$

10.15.
$D=180-3p$
$S=70+p$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: АНХ при правительстве РФ, 2001.

2. Колемаев, В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2005.

3. Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998.

4. Федосеев, В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов / В.А. Федосеев, А.Н. Гармаш, И.В. Орлова; под ред. В.В. Федосеева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

5. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006.

6. Багриновский, К.А., Матюшок, В.М. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: Изд-во РУДН, 1999.

7. Замков, Щ.Щ. Математические методы в экономике: учебник / Щ.Щ. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова; Изд-во «ДИС», 1997.

8. Кундышева, Е.С. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие / Е.С. Кундышева; под науч. ред. проф. Б.А. Суслакова. – М.: Издательство – торговая корпорация «Дашков и К°», 2004.

9. Просветов, Г.И. Математические модели в экономике: Учебно-методическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Издательство РДЛ, 2005.

10. Орехов, Н.А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие для вузов / Н.А. Орехов, А.Г. Левин, Е.А. Горбунов; под ред. проф. Н.А. Орехова. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

11. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002.

12. Монахов, А.В. Математические методы анализа экономики / А.В. Монахов. – СПб: Питербург, 2002.

13. Солодовников, А.С. Математика в экономике: учебник в 2 ч. Ч. 2 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 1999.

14. Шишов, А.Л. Макроэкономика: учебник / А.Л. Шишов. – М.: Ассоциация авторов и издателей «ТАНДЕМ», Изд-во ЭКМОС, 1997.

15. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.Ф. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под

ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.

16. Малыхин, В.И. Математика в экономике: учеб. пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2001.

17. Вечканов, Г.С., Вечканова, Г.Р. Макроэкономика: учеб. пособие / Г.С. Вечканов, Г.Р. Вечканова. – СПб.: Питер, 2007.

18, Салманов, О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / О.Н. Салманов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

19. Демиденко, Е.З. Оптимизация и регрессия / Е.З. Демиденко. – М.: Наука, 1989.

20. Макарова, Н.В., Трофимец, М.П. Статистика в Excel / Н.В. Макарова, М.П. Трофимец. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Составители:
Волгина Ольга Алексеевна
Голодная Наталья Юрьевна
Одияко Наталья Николаевна
Шуман Галина Ивановна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Практикум

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 17.09.08. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,2.
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57