

## УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, если шифр студента 911-ТКШ-1074, то он должен из всех контрольных заданий решить задачи с номерами 4, 14, 24, ..., то есть задачи 4-го варианта.

2. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента и несколько чистых страниц в конце работы для возможных исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

3. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы и адрес студента.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

5. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Работа над ошибками выполняется в той же тетради.

7. Допущенная к защите контрольная работа должна быть защищена устно. Если работа к защите не допущена, ее после исправления ошибок присылают на повторную проверку.

Контрольные работы, выполненные с нарушением изложенных правил, возвращаются без проверки. Студенты, не выполнившие в срок контрольные работы, не допускаются к сдаче экзамена.

## Контрольная работа № 1

1-10. Даны вершины  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$  треугольника. Найти: 1) длину стороны  $BC$ ; 2) площадь треугольника; 3) уравнение стороны  $BC$ ; 4) уравнение высоты, проведенной из вершины  $A$ ; 5) длину высоты, проведенной из вершины  $A$ ; 6) уравнение биссектрисы внутреннего угла  $B$ ; 7) угол  $B$  в радианах с точностью до  $0,01$ ; 8) систему неравенств, определяющую множество внутренних точек треугольника.

Сделать чертеж.

1.  $A(4;1)$ ,  $B(0;-2)$ ,  $C(-5;10)$ .
2.  $A(-7;3)$ ,  $B(5;-2)$ ,  $C(8;2)$ .
3.  $A(5;-1)$ ,  $B(1;-4)$ ,  $C(-4;8)$ .
4.  $A(-14;6)$ ,  $B(-2;1)$ ,  $C(4;3)$ .
5.  $A(6;0)$ ,  $B(2;-3)$ ,  $C(-3;9)$ .
6.  $A(-9;2)$ ,  $B(3;-3)$ ,  $C(6;1)$ .
7.  $A(7;-4)$ ,  $B(3;-7)$ ,  $C(-2;5)$ .
8.  $A(-8;4)$ ,  $B(4;-1)$ ,  $C(7;3)$ .
9.  $A(3;-3)$ ,  $B(-1;-6)$ ,  $C(-6;6)$ .
10.  $A(-6;5)$ ,  $B(6;0)$ ,  $C(9;4)$ .

11. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки  $C(0;-4)$  и от прямой  $y+2=0$ . Сделать чертеж.

12. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма ее расстояний от точек  $F_1(-1;3)$  и  $F_2(7;3)$  есть величина постоянная и которой принадлежит точка  $P(6;27/5)$ . Сделать чертеж.

13. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки  $F(8;0)$  вдвое больше, чем от прямой  $x-2=0$ . Сделать чертеж

14. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма квадратов ее расстояний от начала координат и от точки  $A(0;4)$  равна 16. Сделать чертеж.

15. Составить уравнение линии, каждая точка которой является центром окружности, касающейся оси  $OX$  и проходящей через точку  $P(3;4)$ . Сделать чертеж.

16. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек  $A(-4;3)$  и  $B(1;-2)$ . Сделать чертеж..

17. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки  $A(0;2)$  вдвое ближе, чем от точки  $B(0;6)$ . Сделать чертеж.

18. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой  $x+6=0$  и от начала координат. Сделать чертеж.

19. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки  $F(0;4)$  втрое меньше, чем от прямой  $y-36=0$ . Сделать чертеж.

20. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки  $F(0;-1)$  втрое больше, чем от прямой  $y+9=0$ . Сделать чертеж..

21-30. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления;

3) по правилу Крамера.

$$21. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} \quad 22. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} \quad 28. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

31-40. Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$31. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9. \end{cases} \quad 32. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2. \end{cases} \quad 34. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 = 4. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей  $A$ .

$$41. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$42. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$43. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$44. A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$45. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$46. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$47. A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$48. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$49. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$50. A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

51-60. Задана функция  $y=f(x)$ . Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$51. f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } x \leq 1. \end{cases} \quad 52. f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$53. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 54. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$55. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases} \quad 56. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

$$57. f(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{если } x \leq -1, \\ (x+1)^2, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad 58. f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$59. f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 60. f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x < 4, \\ 1, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

## Контрольная работа № 2

61-70. Найти производные  $\frac{dy}{dx}$  данных функций.

$$61. a) y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}; \quad б) y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x};$$

$$в) y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}; \quad г) x \sin y - y \sin x = 0.$$

$$62. a) y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}; \quad б) y = \sin^3 2x;$$

$$в) y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \quad г) e^{xy} + x^2 - y^2 = 0.$$

63. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$	б) $y = e^{1+\ln^2 x};$
в) $y = \arccos \frac{1}{x};$	г) $y \sin x + \cos(x-y) = \cos y.$
64. а) $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}};$	б) $y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x};$
в) $y = 3^{\cos^2 x};$	г) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0.$
65. а) $y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}};$	б) $y = \sin \sqrt{1+x^2};$
в) $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{3x};$	г) $xe^y + ye^x = xy.$
66. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}};$	б) $y = \cos \ln^2 x;$
в) $y = (e^{\sin x} - 1)^2;$	г) $\cos(xy) = \frac{y}{x}.$
67. а) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{1+x}};$	б) $y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x};$
в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}};$	г) $xy + \ln y - 2 \ln x = 0.$
68. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}};$	б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x};$
в) $y = e^{\frac{1}{x^2}};$	г) $e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}.$
69. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}};$	б) $y = x \arcsin \frac{2x+1}{3};$
в) $y = e^{-\sin^4 5x};$	г) $(x+y)^2 = (x-2y)^3.$
70. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2};$	б) $y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3);$
в) $y = x \operatorname{arctg}^3 5x + \ln \operatorname{tg} x;$	г) $y \ln x - x \ln y = x + y.$

71. Требуется изготовить из жести ведро без крышки данного объема  $V$  цилиндрической формы. Каковы должны быть высота цилиндра и радиус его основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материалов?

72. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом  $R$ , вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

73. Прямоугольник вписан в эллипс с осями  $2a$  и  $2b$ . Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.

74. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом  $R$ .

75. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего, объема описанного около шара радиусом  $R$ .

76. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости  $V$  будет иметь наименьшую полную поверхность?

77. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен  $a$ . При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

78. Площадь прямоугольника равна 9 кв.ед. Найти стороны прямоугольника, при которых его периметр является наименьшим.

79. Прямой круговой конус описан около прямого кругового цилиндра так, что плоскости и центры их оснований совпадают. Радиус основания цилиндра равен 4, а высота равна 6. Найти радиус основания и высоту конуса, при котором его объем является наименьшим.

80. Прямой круговой конус описан около полушара так, что центр основания конуса совпадает с центром шара. Радиус шара равен 5. Найти радиус основания и высоту конуса, при которых его объем является наименьшим.

81-90. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график, используя результаты исследования.

$$81. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}. \quad 82. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$83. y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2. \quad 84. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$85. y = \frac{x^2}{x^2-1}. \quad 86. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$87. y = \frac{2}{x^2+2x}. \quad 88. y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2.$$

$$89. y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}. \quad 90. y = \frac{2x^3+1}{x^2}.$$

91-100. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$$91. a) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}; \quad a) \int \frac{x-7 dx}{x^2+4x+13}; \quad e) \int x \ln(x^2+1) dx.$$

$$92. a) \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos 2x}}; \quad б) \int \frac{x-8 dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}; \quad e) \int x \sin 3x dx.$$

$$93. a) \int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}; \quad б) \int \frac{x-1 dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}; \quad e) \int x \arcsin x dx.$$

$$94. a) \int \frac{\cos 5x dx}{3+2\sin 5x}; \quad б) \int \frac{x-2 dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}; \quad e) \int (x+2)e^{5x} dx.$$

$$95. a) \int \frac{x+3 \ln x dx}{x}; \quad б) \int \frac{x+3 dx}{x^2+10x+29}; \quad e) \int x \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

$$96. a) \int \frac{e^{3x} dx}{16+e^{6x}}; \quad б) \int \frac{x+1 dx}{5x^2+2x+1}; \quad e) \int x \operatorname{arctg} 3x dx.$$

$$97. a) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2+3\cos x}}; \quad б) \int \frac{(x-5) dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}; \quad e) \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$98. a) \int x^2 e^{2x^3} dx; \quad б) \int \frac{x+3 dx}{\sqrt{15+4x-4x^2}}; \quad e) \int x^3 \arccos x dx.$$

$$99. a) \int \frac{x dx}{x^4+1}; \quad б) \int \frac{x+1 dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}; \quad e) \int x^3 \ln(1+x^2) dx.$$

$$100. a) \int \frac{x^3 dx}{1+x^8}; \quad б) \int \frac{2x-5}{x^2-6x+13} dx; \quad e) \int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

101. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=6-x$ ,  $y=0$ .

102. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2=9x$ ,  $y=x+2$ .

103. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,

$$y = \frac{1}{2} x^2.$$

104. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и линиями  $x = \sqrt{1-y^2}$ ,  $y = \sqrt{\frac{3}{2}} x$ .

105. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x} e^x$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ .



106. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигу-

$$y = \frac{1}{4}x^2, y = \frac{1}{8}x^3.$$

ры, ограниченной линиями

107. Найти длину дуги линии  $y = \ln \sin x \left( \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ .

108. Найти длину дуги линии  $y = \sqrt{x+1} \quad (1 \leq x \leq 3)$ .

109. Найти длину дуги линии  $y = 1 - \ln \cos x \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$ .

110. Найти длину дуги линии  $y = \ln(1-x^2) \left( 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$ .

### Контрольная работа № 3

111. Дана функция  $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$ . Показать, что  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

112. Дана функция  $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin y$ . Показать, что

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

113. Дана функция  $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ . Показать,

что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

114. Дана функция  $z = e^{xy}$ . Показать,

что  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$ .

115. Дана функция  $z = \ln(x + e^{-y})$ . Показать,

что  $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ .

116. Дана функция  $z = x/y$ . Показать, что  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

117. Дана функция  $z = x^y$ . Показать, что  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y \ln x \frac{\partial z}{\partial x}$ .

118. Дана функция  $z = xe^{y/x}$ . Показать,

$$\text{что } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

119. Дана функция  $z = \sin(x + ay)$ . Показать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

120. Дана функция  $z = \cos y + (y - x) \sin y$ . Показать,

$$\text{что } -y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

121-130. Дана функция  $z = z(x, y)$ , точка  $A(x_0, y_0)$  и вектор  $\bar{a}$ .

Найти: 1)  $\text{grad } z$  в точке  $A$ ; 2) производную в точке  $A$  по направлению вектора  $\bar{a}$ .

$$121. z = x^2 + xy + y^2; \quad A(1;1), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$$

$$122. z = 2x^2 + 3xy + y^2; \quad A(2;1), \quad \bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}.$$

$$123. z = \ln(x^2 + 3y^2); \quad A(1;1), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}.$$

$$124. z = \ln(5x^2 + 4y^2); \quad A(1;1), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$$

$$125. z = 5x^2 + 6xy; \quad A(2;1), \quad \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}.$$

$$126. z = \arctg(xy^2); \quad A(2;3), \quad \bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}.$$

$$127. z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right); \quad A(1;2), \quad \bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}.$$

$$128. z = \ln(3x^2 + 4y^2); \quad A(1;3), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$$

$$129. z = 3x^4 + 2x^2y^3; \quad A(-1;2), \quad \bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}.$$

$$130. z = 3x^2y^2 + 5y^2x; \quad A(1;1), \quad \bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}.$$

131-140. Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области  $D$ , заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$$131. z = x^2 + y^2 - 9xy + 27; \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3.$$

$$132. z = x^2 + 2y^2 + 1; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3.$$

$$133. z = 3 - 2x^2 - xy - y^2; \quad x \leq 1, \quad y \geq 0, \quad y \leq x.$$

$$134. z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad x \geq 1, \quad y \geq -1, \quad x + y \leq 1$$

135.  $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ ;  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
136.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ ;  $x \geq -1$ ,  $y \geq -1$ ,  $x + y \leq 1$ .
137.  $z = 10 + 2xy - x^2$ ;  $0 \leq y \leq 4 - x^2$ .
138.  $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ ;  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ ,  $x + y + 2 \geq 0$ .
139.  $z = x^2 + xy - 2$ ;  $4x^2 - 4 \leq y \leq 0$ .
140.  $z = x^2 + xy$ ;  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 3$ .
- 141-150. Исследовать функцию на экстремум.
141.  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .      142.  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ .
143.  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .      144.  $z = (x-1)^2 - 2y^2$ .
145.  $z = 2xy - 2x - 4y$ .      146.  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ .
147.  $z = x^3 + xy^2 + 6xy$ .      148.  $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ .
149.  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .      150.  $z = 2y + 4x - 2xy$ .
- 151-160. Найти общее решение дифференциального уравнения.
151.  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ .      152.  $xy' - y = x^2 \cos x$ .
153.  $xyy' = y^2 + 2x^2$ .      154.  $xy' + y = x^3$ .
155.  $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ .      156.  $y' \cos x + y \sin x = 1$ .
157.  $2xyy' = x^2 + y^2$ .      158.  $y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0$ .
159.  $(1+x^2)y' - 2xy - (1+x^2)^2 = 0$ .      160.  $(5xy - x^2)y' - 5y^2 = 0$ .
- 161-170. Найти частное решение дифференциального уравнения  $y'' + py' + qy = f(x)$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ .
161.  $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .
162.  $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$ ;  $y(0) = 4/3$ ,  $y'(0) = 1/27$ .
163.  $y'' + 4y = e^{-2x}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .
164.  $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .
165.  $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ .
166.  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

$$167. y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$168. y'' - 4y' = 6x^2 + 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

$$169. y'' - 2y' + y = 16e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$170. y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; \quad y(0) = 3, \quad y''(0) = 2.$$

171-180. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  и исследовать его на концах области сходимости.

$$171. u_n = \frac{x^n}{n^3}. \quad 172. u_n = \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$173. u_n = \frac{x^{2n}}{2^n(n+1)}. \quad 174. u_n = \frac{nx^{2n}}{n+1}.$$

$$175. u_n = \frac{x^{2n-1}}{3^n(n+1)}. \quad 176. u_n = \frac{x^{4n}}{5^n(n+2)}.$$

$$177. u_n = \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}. \quad 178. u_n = \frac{3^n x^{n+1}}{n}.$$

$$179. u_n = \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}. \quad 180. u_n = \frac{nx^n}{2n+3}.$$

181-190. Функция полных издержек производства имеет вид  $K(x)$ . Исследовать характер изменения этой функции, а также характер изменения функции средних издержек  $\bar{K}(x) = K(x)/x$ . Рассчитать эластичность при заданном  $x$  полных и средних издержек  $E_x(K)$ ,  $E_x(\bar{K})$  и убедиться, что  $E_x(\bar{K}) = E_x(K) - 1$ .

$$181. K(x) = x^3 - 6x^2 + 20x, \quad x = 2.$$

$$182. K(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, \quad x = 1.$$

$$183. K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x, \quad x = 2.$$

$$184. K(x) = x^3 - x^2, \quad x = 2.$$

$$185. K(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, \quad x = 4.$$

$$186. K(x) = x^3 - 3x^2 + 12x, \quad x = 1.$$

$$187. K(x) = 2x^3 + x^2 + 2x, \quad x = 3.$$

$$188. K(x) = 3x^3 - 2x^2 + 8x, \quad x = 1.$$

$$189. K(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2, \quad x = 1.$$

$$190. K(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2, \quad x = 1.$$

191-200. В рыночных условиях цена товара является функцией времени  $p(t)$ . Спрос на товар определяется уравнением:

$$q = a - bp + c(dp/dt),$$

а предложение уравнением:

$$s = lp - m + n(dp/dt).$$

Определить кривую равновесия цен, если в начальный момент времени цена товара была равна  $p_0$ . После решения задачи придать конкретное значение  $p_0$ , построить кривую равновесия и сделать вывод.

Номер задачи	a	b	c	l	m	n
161	60	1	3	2	15	25
162	120	2	5	3	30	50
163	70	3	5	4	25	60
164	50	2	4	7	35	40
165	80	4	6	5	40	60
166	40	5	7	8	10	70
197	100	2	5	4	40	50
198	75	3	6	5	35	60
199	110	4	7	8	50	70
200	90	3	8	5	40	80

## ЛИТЕРАТУРА

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 4-е изд. – М.: Наука, 1980.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.:Наука, 1980.

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч.1, 2.

## СОДЕРЖАНИЕ

### **УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ .....3**

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 .....4

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 .....7

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 .....11

### **ЛИТЕРАТУРА.....16**