Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 2

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2008

ББК 22.143
В 67

Рецензенты: К.С. Солодухина, канд. экон. наук, доцент каф. ММ ВГУЭС;
Л.Я. Дубинина, ст. преп. каф. ММ ВГУЭС

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: практикум. Ч. 2 / сост.
В 67 Г.И. Шуман, О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная, Н.Н. Одияко. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 84 с.

Практикум предназначен для студентов I курса экономических специальностей. По каждой теме приводится необходимая теоретическая часть, в которой рассматриваются основные понятия и их свойства, а также формулы, необходимые для решения задач, описано подробное решение достаточно большого количества задач. В пособии содержится большой список задач для самостоятельной работы студентов, контрольные работы и индивидуальные домашние задания.

Для студентов экономических специальностей всех форм обучения.

ББК 22.143

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Высшей математики» является основной экономического образования. Знания, приобретаемые студентами в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в институте. Они необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами экономических специальностей.

В практикуме предлагаемого объема невозможно полностью осветить весь изучаемый теоретический материал, поэтому в каждом разделе приведены лишь необходимые теоретические сведения и формулы, отражающие количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов, которые сопровождаются подробными решениями типовых задач, без чего невозможно успешное изучение математики.

Достоинство практикума состоит в том, что при наличии такого количества задач оно может быть использовано как задачник, как раздаточный материал для выполнения контрольных работ по соответствующему разделу курса «Высшая математика», а так же содержит 25 различных вариантов индивидуального домашнего задания по двум разделам.

1. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

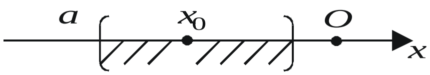
1.1. Основные определения

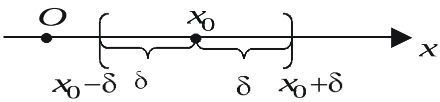
Действительными или вещественными числами называются рациональные и иррациональные числа.

Определение. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа a называется само число a, если $a \geq 0$ и $-a$, если $a < 0$, то есть:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, где $\delta > 0$, называется δ – окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число δ – радиусом.





Определение. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = f(x)$, $y \in Y$, где X и Y – данные числовые множества, то y называется функцией от *x*, определённой на множестве *X*.

Переменная x называется в этом случае аргументом, или независимой переменной, множество *X* – областью определения функции и обозначается $D(f)$, множество *Y* – областью значений функции и обозначается $E(f)$.

Запись $y = f(x)$ означает, что y является функцией *x*. Значение функции $f(x)$ при $x = a$ обозначают через $f(a)$.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задаётся в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 1 \ \textit{при} \ x < 2, \\ x - 4 \ \textit{при} \ x \geq 2; \end{cases}$ 2) $y = 2^{3x}$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задаётся график функции. Значения функции y, соответствующие тем или иным значением аргумента x, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

Табличный способ: функция задаётся таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путём или в результате наблюдений.

Определение. Функция $f(x)$ называется чётной, если

$$f(-x) = f(x). \tag{1.1}$$

Пример 1. Проверить, является ли данная функция $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+1}$ чётной.

Решение. Найдём $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2+1}, \quad f(-x) = \frac{5x^2}{x^2+1}.$$

Получили, что $f(-x) = f(x)$, значит данная функция чётная.

График четной функции расположен симметрично относительно оси ординат (Oy).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечётной если

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.2}$$

Пример 2. Проверить, является ли данная функция $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ нечётной.

Решение. Найдём $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + 2(-x),$$

$$f(-x) = -x^5 + 3x^3 - 2x,$$

$$f(-x) = -(x^5 - 3x^3 + 2x).$$

Получили, что $f(-x) = -f(x)$, поэтому данная функция является нечётной.

График нечётной функции расположен симметрично относительно начала координат.

Функции, не обладающие свойствами чётности и нечётности, называются функциями общего вида.

Пример 3. Проверить является ли данная функция $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ чётной или нечётной.

Решение. Найдём $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)+1}{(-x)^2}, \quad f(-x) = \frac{-x+1}{x^2}.$$

Таким образом $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, поэтому данная функция – функция общего вида.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T, называемое периодом функции, что для любого значения x выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x). \tag{1.3}$$

Наименьшим периодом функции называется наименьшее положительное число t, для которого $f(x+t) = f(x)$ при любом x. Следует помнить, что $f(x+kt) = f(x)$, где k – любое целое число.

Определение. Если функция $y = f(x)$ такова, что для любых значений $x_1, x_2 \in D$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется возрастающей на множестве D;

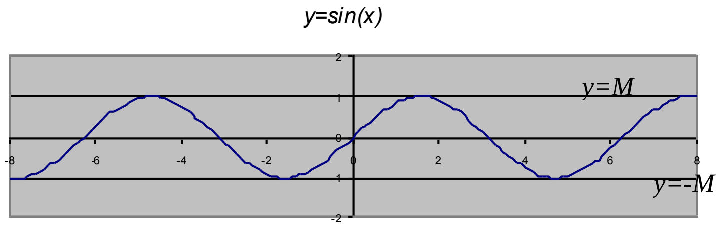
2) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется неубывающей на множестве D;

3) $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей на множестве D;

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется невозрастающей на множестве D.

Определение. Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве *D* называются монотонными на этом множестве, а возрастающие и убывающие – строго монотонными. Интервалы, в которых функция монотонна, называются интервалами монотонности.

Определение. Функцию $y = f(x)$, определённую на множестве *D*, называют ограниченной на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$ (короткая запись: $y = f(x)$, $x \in D$ называется ограниченной на *D*, если $\exists$ $M > 0$: $\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$). Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$.



Определение. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения *D* и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений *D*. Такая функция $\varphi(y)$ называется обратной к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

Любая строго монотонная функция имеет обратную. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.2. Предел функции. Односторонние пределы

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Определение. Число А называется пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдётся такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \quad (1.4)$$

Сформулируем некоторые свойства пределов.

Теорема. Если функция $f(x) = c$ постоянна в некоторой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c. \quad (1.5)$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел единствен.

Лемма. Если функция $f(x)$ имеет предел A при $x \to x_0$,то она ограничена в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно: ограниченная функция может не иметь предела.

Теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и пусть $A < f(x) < N$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Тогда $M \leq A \leq N$.

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

В определении предела функции считается, что х стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Любой интервал $(a; x_0)$, правым концом которого является точка x_0, называется левой окрестностью точки x_0.

Любой интервал $(x_0; b)$, левым концом которого является точка x_0, называется правой окрестностью точки x_0.

Символическая запись $x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева, оставаясь меньшим x_0, т.е. при $x < x_0$; $x \to x_0 + 0$ означает, что x стремится к x_0 справа, оставаясь большим x_0, т.е. при $x > x_0$.

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ будем называть левосторонним пределом функции при $x \to x_0$ слева; $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ - это правосторонний предел функции при $x \to x_0$ справа.

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ в том и только в том случае, когда существуют и равны друг другу ее односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.ф.) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \qquad (1.6)$$

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т.д.

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

Следствие 1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема. Частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел есть б.м.ф.

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая $(\alpha \neq 0)$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный *A*, то ее можно представить как сумму числа *A* и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то есть если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема (*обратная)*. Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа *A* и б.м.ф. $\alpha(x)$, то число *A* является пределом функции $f(x)$, т.е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

1.4. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если в точке x_0 существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x) \pm g(x)$, причем $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Теорема 2. Если в точке x_0 существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует и предел произведения $f(x) \cdot g(x)$, причем $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^n$. В частности $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in N$.

Теорема 3. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+4)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-3x+4)=\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}3x+\lim_{x\to 3}4=(\lim_{x\to 3}x)^2-3\lim_{x\to 3}x+4=$$
$$=3^2-3\cdot 3+4=9-9+4=4.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

Решение. Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, так как предел знаменателя, при $x\to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x-2\neq 0(x\to 2$, но $x\neq 2$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

Решение. В данном случае имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Для её раскрытия числитель и знаменатель дроби умножим на $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, тогда в числителе дроби можно будет воспользоваться тождеством сокращённого умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, а затем числитель и знаменатель сократим на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}==\lim_{x\to 0}\frac{2}{3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\frac{2}{3(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2+x-5}{x^2-4x+3}$.

Решение. Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя вычислить непосредственной подстановкой, так как при указанном стремлении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых (неопределённость $\dfrac{0}{0}$).

Вообще, если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x = x_0$, то согласно теореме Безу оба многочлена разделятся без остатка на $x - x_0$, то есть такую дробь всегда можно сократить на $x - x_0$.

Разделим оба данных многочлена на $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+3x^2+x-5 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2+4x+5,} \\
-\,4x^2+x-5 & \\
\underline{4x^2-4x\quad} & \\
-\,5x-5 & \\
\underline{5x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

тогда $x^3+3x^2+x-5=(x-1)(x^2+4x+5)$;

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^2-4x+3 & x-1 \\
\underline{x^2-x\qquad} & \overline{x-3,} \\
-\,-3x+3 & \\
\underline{-3x+3} & \\
0 &
\end{array}
$$

тогда $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

$$
\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+x-5}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x-1)(x-3)}=
$$

$$
=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x+5}{x-3}=\frac{1+4+5}{1-3}=\frac{10}{-2}=-5.
$$

Таким образом, чтобы раскрыть неопределённость $\dfrac{0}{0}$, требуется выполнить над данной функцией преобразования, не меняющие значение функции, в результате которых неопределённость исчезнет.

Пример 8.Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+7}{5x^2+2x+1}$.

Решение. В данном случае присутствует неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+7}{5x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2})}=\frac{3}{5}.$$

Функция $3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}$ есть сумма 3 и двух б.м.ф., а функция $5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма 5 и двух б.м.ф., поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2})=$ 3; $\lim\limits_{x\to\infty}(5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2})$ =5.

Пример 9. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x^3+3x^2+7}.$$

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в данную функцию получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на старшую степень переменной, входящей в изображение данной функции, то есть на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x^3+3x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^3}}=0.$$

Здесь функция $\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}$ есть бесконечно малая, а функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^3}$ есть сумма 2 и бесконечно малой, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2})=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^3})=2$.

Пример 10. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-4}{3x+1}.$$

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, разделим числитель и знаменатель данной функции на x^2 (наивысшая здесь степень x), получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-4}{3x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\infty$.

Функция $5+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}$ есть сумма 5 и двух бесконечно малых, а функция $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$ есть бесконечно малая, поэтому $\frac{1}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$ - бесконечно большая функция, $\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2})=5$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})=\infty$.

Таким образом, для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель данной функции разделить на старшую степень переменной, входящей в изображение данной функции. Если степени многочленов числителя и знаменателя одинаковы, то предел данной функции равен отношению коэффициентов при старших степенях этих многочленов (пример 8). Если степень многочлена, стоящего в знаменателе, больше степени многочлена, стоящего в числителе данной функции, то предел данной функции равен 0 (пример 9). Если степень многочлена, стоящего в знаменателе, меньше степени многочлена, стоящего в числителе данной дроби, то предел такой функции равен бесконечности (пример 10).

Кроме рассмотренных видов неопределённостей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении предела функции встречается неопределённость вида $\infty-\infty$ при $x\to x_0$ или $x\to\infty$. Этот случай нахождения предела функции приводится путём преобразования функции к одному из двух рассмотренных случаев, то есть к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

Решение. Установив, что при указанном изменении аргумента функция представляет разность двух бесконечно больших величин(случай $\infty-\infty$), преобразуем её к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Для этого приведём данные дроби к общему знаменателю и сократим на х-1;

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

Решение. Рассматривая данную функцию как дробь, со знаменателем, равным единице, умножим числитель и знаменатель дроби на $x+\sqrt{x^2+5x}$, после чего избавимся от иррациональности в числителе дроби, затем полученную дробь сократим на *x*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=$$

$$=-\frac{5}{2}=-2{,}5.$$

1.5. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y=\cos x$ при $x\to\infty$ предела не имеет.

Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема (*о пределе промежуточной функции*). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она тоже стремится к этому пределу, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Теорему иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Теорема (*о пределе монотонной функции*). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x<x_0$ (или при $x>x_0$), то существуют соответственно её левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ (или её правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$).

1.6. Первый и второй замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто пользуются следующей теоремой.

Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.7}$$

Этот предел называется первым замечательным пределом, с помощью которого раскрывается неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, так как предел знаменателя при $x\to 0$ равен 0.

Предел числителя при данном стремлении $x\to 0$ тоже равен нулю. Здесь присутствует неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на 5, множитель числителя 5 вынесем за знак предела, пользуясь свойством предела функции, а затем воспользуемся I замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Решение. Данная функция представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сначала применим тригонометрическую формулу $1-\cos 6x = 2\cdot\sin^2 3x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 3x}{x^2} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\right).$$

Воспользуемся теоремой о пределе произведения, затем выполняя действия, аналогичные действиям примера 13, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} =$$

$$= 2\cdot 3\cdot 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 18\cdot 1\cdot 1 = 18\,.$$

Пример 15. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$,

Решение. Функцию $\frac{x}{\sin x}$, которая представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, преобразуем так, чтобы можно было воспользоваться I замечательным пределом:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}},$$

воспользуемся теоремой о пределе функции и тогда получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Значит $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$.

Пример 16. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрическим тождеством $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, теоремой о пределе произведения функций и I замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$$

$$=\frac{1}{\cos 0}\cdot 1=1\cdot 1=1.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$.

Пример 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}$.

Решение. Воспользуемся рассуждениями и решениями примеров 15 и 16:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=$$

$$=\cos 0\cdot 1=1\cdot 1=1.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1$.

Таким образом, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1; \tag{1.8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1; \tag{1.9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1. \tag{1.10}$$

Пример 18. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}}$.

Решение. Данная функция представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сначала избавимся от иррациональности в знаменателе. Для этого числитель и знаменатель функции умножим на $1+\sqrt{1+tgx}$ и полученный знаменатель свернем по формуле $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, затем сокращаем дробь на tgx ,тогда получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot(1+\sqrt{1+tgx})}{(1-\sqrt{1+tgx})(1+\sqrt{1+tgx})}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot(1+\sqrt{1+tgx})}{1-(1+tgx)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot(1+\sqrt{1+tgx})}{1-1-tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot(1+\sqrt{1+tgx})}{-tgx}=-\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+tgx})=$$

$$=-1\cdot(1+\sqrt{1+tg0})=-(1+\sqrt{1+0})=-(1+1)=-2$$

Пример 19. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}.$$

Решение. В данном примере, чтобы использовать I замечательный предел, сделаем замену переменной: $1-x=y$. Тогда при $x\to 1$ получаем $y\to 0$ и $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(1-y))}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{y\pi}{2})}{y}$.

По формулам приведения имеем $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$, значит:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{y\pi}{2})}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 20. Найти

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{arctg(x+2)}.$$

Решение. Сделаем замену переменной: $arctg(x+2)=y$, $x+2=tgy$, $x=tgy-2$. При $x\to -2$, $y\to 0$, так как $arctg(-2+2)=arctg0=0$. Тогда получаем

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{arctg(x+2)}=\lim_{y\to 0}\frac{(tgy-2)^2-4}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{tg^2y-4tgy+4-4}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{tg^2y-4tgy}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{tgy(tgy-4)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{tgy}{y}\cdot(tgy-4)\right)=$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{tgy}{y} \cdot \lim_{y \to 0} (tgy - 4) = 1 \cdot (tg0 - 4) = 1 \cdot (-4) = -4 .$$

Пример 21. Найти $\lim_{x \to 1} (1 - x) \cdot tg \frac{\pi}{2} x$.

Решение. Установим, что при $x \to 1$ функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую, то есть неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух рассмотренных ранее случаев, то есть к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем данную функцию. Для этого введем новую переменную, полагая $1 - x = y$, $x = 1 - y$, $tg \frac{\pi}{2} x = tg(\frac{\pi}{2}(1 - y)) = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} y) = ctg \frac{\pi}{2} y = \frac{1}{tg \frac{\pi}{2} y}$.

При $x \to 1$, $y \to 0$. Получим: $\lim_{x \to 1} (1 - x) \cdot tg \frac{\pi}{2} x = \lim_{y \to 0} \frac{y}{tg \frac{\pi}{2} y} =$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} y}{\frac{\pi}{2} tg \frac{\pi}{2} y} = \lim_{y \to 0} (\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} y}{tg \frac{\pi}{2} y}) = \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} y}{tg \frac{\pi}{2} y} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi} .$$

При вычислении пределов функций вида $\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)}$,где $\lim_{x \to x_0} u(x) = 1$, $\lim_{x \to x_0} v(x) = \infty$, то есть имеем неопределенность вида 1^{∞}, используется второй (II) замечательный предел:

а) $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, или б) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$,

или (1.11)

в) $\lim_{\alpha(x) \to 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, где $e = 2{,}71828...$

Пример 22. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{1 + 2x} .$$

Решение. Убедимся сначала, что при заданном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель степени – к бесконечности.

$$\sqrt[x]{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{x}} \text{; при } x \to 1 \text{ получим } (1+2\cdot 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}.$$

Воспользуемся II замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = e^2.$$

Пример 23. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{x-1}$.

Решение. Убедимся в том, что данная функция представляет собой неопределенность вида 1^{∞} при данном стремлении переменной. Действительно, в основании степени дробь $\dfrac{2x+5}{2x-1}$, числитель и знаменатель которой многочлены первой степени, поэтому при $x\to\infty$ предел дроби равен отношению коэффициентов при старших степенях x, то есть $\dfrac{2}{2}=1$, показатель степени $x-1\to\infty$ при $x\to\infty$. Для того, чтобы воспользоваться II замечательным перелом, преобразуем данную функцию к виду (1.11) а):

$$\frac{2x+5}{2x-1} = 1+\frac{2x+5}{2x-1}-1 = 1+\frac{2x+5-2x+1}{2x-1} = 1+\frac{6}{2x-1},$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{(x-1)\cdot\frac{2x-1}{6}\cdot\frac{6}{2x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{6}}\right]^{\frac{6(x-1)}{2x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{6(x-1)}{2x-1}}.$$

После преобразований в показателе степени получили дробь, числитель и знаменатель которой есть бесконечно большие при $x\to\infty$.

Рассуждая аналогично, получаем, что при $x \to \infty$ $\dfrac{6x-6}{2x-1} \to \dfrac{6}{2} = 3$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{6(x-1)}{2x-1}} = e^3$.

Значит $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{x-1} = e^3$.

Пример 24. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-4}\right)^{x}$.

Решение. По условию основание степени $\dfrac{2x+1}{3x-4} \to \dfrac{2}{3}$ при $x \to \infty$, поэтому получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)^{x} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}\right] = 0.$$

Функция $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$ является убывающей показательной функцией с основанием степени $\dfrac{2}{3} \in (0;1)$

Пример 25. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)^{x}$.

Решение. При данном стремлении переменной $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right) = 3,$ $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty,$ тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)^{x} = \left[3^{\infty}\right] = \infty$.

Функция 3^x является возрастающей показательной функцией с основанием степени $3 > 1$.

Пример 26. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$.

Решение. При заданном стремлении переменной имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx) = tg\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tg2x) = \left[tg\dfrac{\pi}{2}\right] = \infty$, значит данная функция представляет неопределённость вида 1^{∞}. Введём новую переменную $tgx = 1+t,$ $t \to 0$ при $x \to \dfrac{\pi}{4}$,

$$tg\,2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}=\frac{2(t+1)}{1-(1+t)^2}=\frac{2(t+1)}{-2t-t^2}=-\frac{2(t+1)}{t(t+2)},$$ тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-2(t+1)}{t(t+2)}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{-2(t+1)}{(t+2)}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-2(t+1)}{(t+2)}}=e^{-1},$$ так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2(t+1)}{(t+2)}=-1$.

Замечание. Показательная функция e^x с основанием e играет большую роль в математике и её приложениях. Логарифмы с основанием e называют натуральными логарифмами и обозначают символом $\ln x$.

Пример 27. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, где $a>0, a\neq 1$.

Решение. Используя свойства логарифмов, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Значит

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \qquad (1.12)$$

Пример 28. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. Воспользуемся свойствами логарифмов для преобразования данной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

так как $=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Таким образом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (1.13)$$

Пример 29. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, где $a>0, a\neq 1$.

Решение. Введём новую переменную $a^x-1=y$, $a^x=1+y$, $x=\log_a(1+y)$, при $x\to 0$ $y\to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}=\frac{1}{\ln a}$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{1.14}$$

Пример 30. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Решение. При нахождении предела данной функции воспользуемся равенством (1.14). Если положить что $a=e$, тогда получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$ (1.15)

1.7. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Отношение двух бесконечно малых может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две бесконечно малые функции сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha=\alpha(x), \beta=\beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x\to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0, (A\in R)$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α называется бесконечно малой более низкого порядка, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются несравнимыми бесконечно малыми.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми (при $x\to x_0$); это обозначается так $\alpha\sim\beta$.

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1; tgx\sim x$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Пусть $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$ при $x\to x_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Теорема. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Для раскрытия неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ часто бывает полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется главной частью этой суммы.

Замена суммы бесконечно малых функций её главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

Пример 31. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x+4x^2}.$$

Решение. Так как $5x+4x^2 \sim 5x$ при $x\to 0$,

то есть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+4x^2}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x}{5x}+\dfrac{4x^2}{5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{4}{5}x\right)=1+0=1$; $tg3x\sim 3x$

при $x\to 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{5x+4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$.

Пример 32. Показать, что $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$.

Решение. Пусть $\arcsin x = y$, тогда $x=\sin y$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$, согласно равенству (1.8). Отсюда следует, что $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$.

Полезно помнить некоторые важнейшие эквивалентности, которые используются при вычислении пределов:

1) $\sin x\sim x$ при $x\to 0$;
2) $tgx\sim x$ при $x\to 0$;
3) $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$;
4) $arctgx\sim x$ при $x\to 0$;
5) $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$;
6) $a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$;
7) $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$;
8) $\log_a(1+x)\sim x\log_a e$ при $x\to 0$.

Пример 33. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{arctg(x+1)}{x^2-x-2}$.

Решение. Так как $arctg(x+1)\sim(x+1)$ при $x\to -1$, а $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, тогда:

$$\lim_{x\to -1}\frac{arctg(x+1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 34. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{arctg3x}$.

Решение. Поскольку $\arcsin x\sim x, arctg3x\sim 3x$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{arctg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

Пример 35. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x^2+4x}.$$

Решение. Так как $e^{5x}-1\sim 5x$ при $x\to 0$, $x^2+4x=x(x+4)$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x^2+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{(x+4)}=\frac{5}{4}.$$

Пример 36. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формулой: $1-\cos 5x=2\sin^2\dfrac{5x}{2}$, $1-\cos 3x=2\sin^2\dfrac{3x}{2}$.

Так как $\sin\dfrac{5x}{2}\sim\dfrac{5x}{2}$, $\sin\dfrac{3x}{2}\sim\dfrac{3x}{2}$ при $x\to 0$, тогда $\sin^2\dfrac{5x}{2}\sim\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2=\dfrac{25x^2}{4}$, $\sin^2\dfrac{3x}{2}\sim\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2=\dfrac{9x^2}{4}$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin^2\frac{3x}{2}}==\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x}{4}}{\frac{9x}{4}}=\frac{25}{9}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти следующие пределы

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{3+7x-x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^3+6x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{1+\sqrt{x^2+2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4-6x+2}}{\sqrt[3]{8x^6+5x+1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{1-x^2}+5^{\frac{1}{x}}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3+x^2-x+2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+1}-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; 16) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{10}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 10x}$; 19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg5x}$;

20) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$; 21) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$; 22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x\sin x}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$; 25) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

26) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+5x)}$; 27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^x$; 28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right)^x$;

29) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x}$; 30) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{6x}$; 31) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2 5x}{\ln^2(1+3x)}$;

32) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln(1+x^2)}$.

Ответы: 1)0; 2) ∞; 3)-3; 4)0; 5)5; 6) $\frac{3}{2}$; 7)-1;8) $\frac{4}{5}$; 9) $\frac{5}{3}$; 10)- $\frac{20}{7}$; 11)24; 12)12; 13)3; 14)2; 15) $\frac{1}{4}$; 16)- $\frac{1}{10}$; 17) $\frac{7}{3}$; 18) $\frac{1}{25}$; 19) $\frac{2}{5}$; 20) $-\frac{1}{2}$; 21)1; 22)18; 23) e^4; 24) e^6; 25) e^2; 26) $\frac{1}{5}$; 27)0; 28) ∞; 29)5; 30) $\frac{1}{2}$; 31) $\frac{25}{9}$; 32) -2.

1.8. Непрерывность функции

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1.16}$$

Равенство (1.16) означает выполнение трёх условий:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в её окрестности;

2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть выполняется равенство (1.16).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (1.16) можно записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \tag{1.17}$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} 5^{\frac{x}{tgx}} = 5^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{tgx}} = 5$. В первом равенстве функция и предел поменялись местами в силу непрерывности показательной функции 5^x.

Замечание. Существование $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равносильно тому, что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \to x_0$ и равные значению функции в точке x_0, то есть:

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \tag{1.18}$$

Можно дать ещё одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$ и назовём его приращением аргумента в точке x_0, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$ будем называть приращением функции в точке x_0.

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{1.19}$$

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (1.16)), либо второе (равенство (1.19) определения.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в интервале (a,b) и в точке $x = a$ непрерывна справа (то есть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$), а в точке $x = b$ непрерывна слева (то есть $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$).

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), то есть $\lim\limits_{x\to \text{ч}_0-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to \text{ч}_0+0} f(x) = B$. При этом:

a) если $A = B$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва;

b) если $A \neq B$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва. Величину $|A - B|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого – либо интервала.
2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.
3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена, в частности, если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется её аналитическое выражение.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Пример 37. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{x^2-4}$, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва.

Решение. Найдём область определения данной функции: $x^2-4\neq 0, x\neq \pm 2$, то есть функция определена при всех значениях x, кроме $x=\pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty<x<-2$, $-2<x<2$, $2<x<+\infty$, а в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$ имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных её точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left[\frac{1}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{1}{-4(-б.м.)}=\frac{1}{(б.м.)}\right]=+\infty,$$

так как при $x\to -2-0$, величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой.

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left[\frac{1}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{1}{-4\cdot(+б.м.)}=\frac{1}{-б.м.}\right]=-\infty,$$

так как при $x\to -2+0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x^2-4}$ является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left[\frac{1}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{1}{4\cdot(-б.м.)}=-\frac{1}{б.м.}\right]=-\infty,$$

так как при $x \to 2-0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x^2-4}$ является отрицательной бесконечно большой.

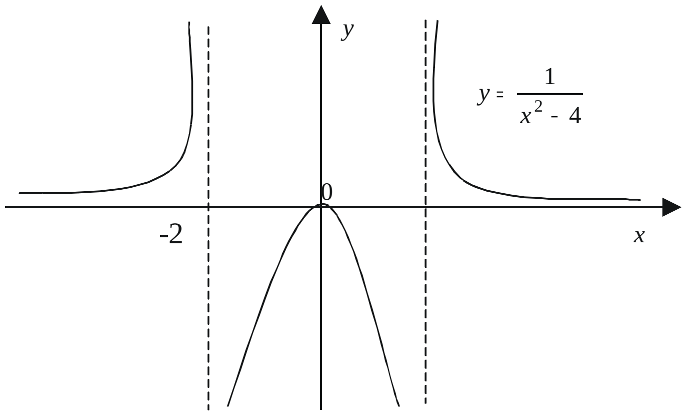
$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left[\frac{1}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{1}{4\cdot(+б.м.)}=\frac{1}{+б.м.}\right]=+\infty,$$

так как при $x\to 2+0$ величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой.

Следовательно, и в точке $x=2$ функция имеет разрыв второго рода.

Так как обе точки разрыва $x=-2$ и $x=2$ – точки разрыва второго рода, скачок функции в каждой точке не является конечным числом.



Пример 38. Дана функция $y=\dfrac{3x-5}{x^2+2x+10}$.

Найти ее точки разрыва, если они существуют.

Решение. Найдем область определения функции. Так как дана дробно-рациональная функция, то знаменатель не должен обращаться в нуль, то есть $x^2+2x+10\neq 0$, $D=4-40=-36\prec 0$, поэтому квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Значит данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то есть $D(y): x\in R$, следовательно функция не имеет точек разрыва.

Пример 39. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{|x-2|}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=2$. Отсюда следует, что в точке $x=2$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:

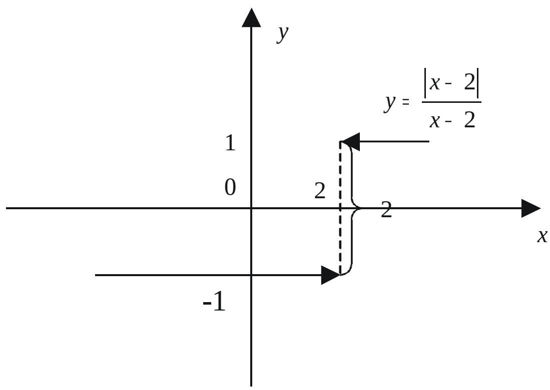
при $x<2$ $|x-2|=-(x-2)$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-0}(-1)=-1$;

при $x>2$ $|x-2|=x-2$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+0}1=1$;

$$y=\begin{cases}-1, если\_x<2\\ 1, если\_x>2\end{cases}.$$

Поэтому в точке $x=2$ функция имеет разрыв первого рода (конечный разрыв); ее скачок в точке разрыва

$\lim\limits_{x\to 2+0}y-\lim\limits_{x\to 2-0}y=1-(-1)=2$.



Пример 40. Исследовать на непрерывность функцию $y=arcctg\,\frac{1}{x}$.

Решение. Данная функция определена, а следовательно и непрерывна на всей числовой оси , кроме точки $x=0$.

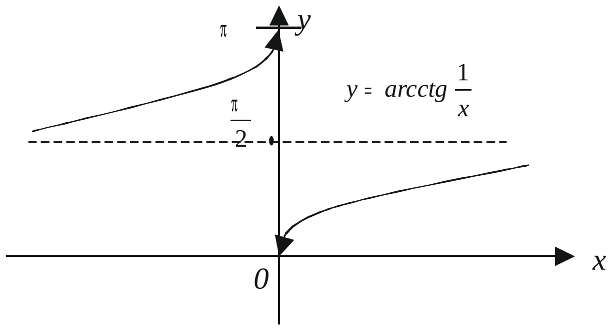
В точке $x=0$ функция имеет разрыв.

Найдем односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to -0}arcctg\,\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{-б.м.}=-\infty\right]=arcctg(-\infty)=\pi;$$

$$\lim_{x\to +0}arcctg\,\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{+б.м.}=+\infty\right]=arcctg(+\infty)=0.$$

Так как односторонние пределы конечны, в точке $x = 0$ функция имеет разрыв первого рода (конечный разрыв). Найдем скачок функции:
$\lim\limits_{x \to +0} y - \lim\limits_{x \to -0} y = o - \pi = -\pi$.



Пример 41. Найдите точки разрыва функции $y = \lg(x^2 + 3x)$, если они существуют.

Решение. Логарифмическая функция $y = \lg u$ определена только для положительных значений своего аргумента u . Поэтому данная функция $y = \lg(x^2 + 3x)$ будет определена и непрерывна для значений x , удовлетворяющих неравенству $x^2 + 3x > 0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции:

$$x^2 + 3x > 0 <=> \begin{cases} x > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases}, \text{ и } \begin{cases} x < 0, \\ x + 3 < 0. \end{cases}.$$

Из первой системы неравенств получаем: $\begin{cases} x > 0, \\ x > -3; \end{cases} => x > 0$ или $0 < x < +\infty$;

из второй системы неравенств получаем: $\begin{cases} x < 0, \\ x < -3; \end{cases} => x < -3$ или $-\infty < x < -3$.

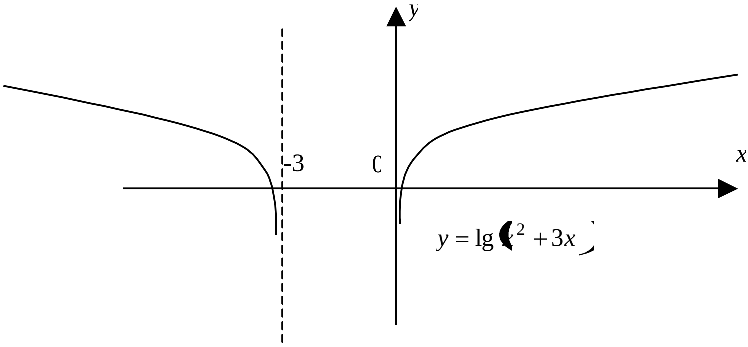
Таким образом, область определения функции состоит из двух интервалов числовой оси:

$$-\infty < x < -3 \text{ и } 0 < x < +\infty .$$

Во всех точках отрезка $-3 \le x \le 0$ данная функция не определена. Найдем левосторонний предел функции при $x \to -3 - 0$ и правосторонний при $x \to +0$.

$$\lim_{x\to -3-0} \lg(x^2+3x) = [\lg 0] = -\infty\,; \quad \lim_{x\to +0} \lg(x^2+3x) = [\lg 0] = -\infty\,.$$

Отсюда следует, что в точках $x=-3$ и $x=0$ функция имеет разрывы второго рода.



Пример 42. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y = \begin{cases} x \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ x+1 \quad \text{при} \quad x > 2. \end{cases}.$$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, но из этого не следует, что она непрерывна на всей числовой оси, так как она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x=2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Найдем односторонние пределы при стремлении аргумента к точке $x=2$ слева и справа:

$$\lim_{x\to 2-0} x = 2\,,$$

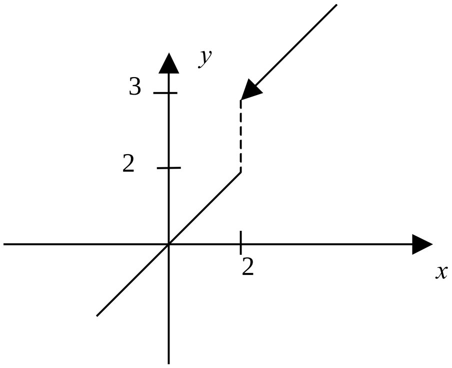
так как слева от точки $x=2$ функция $y=x$;

$$\lim_{x\to 2+0} (x+1) = 3\,,$$

так как справа от точки $x=2$ функция $y=x+1$.

Односторонние пределы конечны, но не равны между собой. Поэтому в точке $x=2$ функция имеет разрыв первого рода. В этой точке разрыва функция имеет скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} y - \lim_{x\to 2-0} y = 3-2=1.$$



Пример 43. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & при \quad 0 \le x \le 1, \\ 4 - 2x & при \quad 1 < x < 2{,}5, \\ 2x - 7 & при \quad 2{,}5 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Функция определена для всех значений $x \ge 0$. Она может иметь разрыв в точках $x = 1$ и $x = 2{,}5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем точки $x = 1$ и $x = 2{,}5$:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2\sqrt{x} = 2\,; \quad \lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} (4 - 2x) = 2\,; \quad y(1) = 2\sqrt{1} = 2\,.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x = 1$ конечны, равны между собой и равны частному значению функции в этой точке, тогда точка $x = 1$ не является точкой разрыва, то есть данная функции в точке $x = 1$ непрерывна.

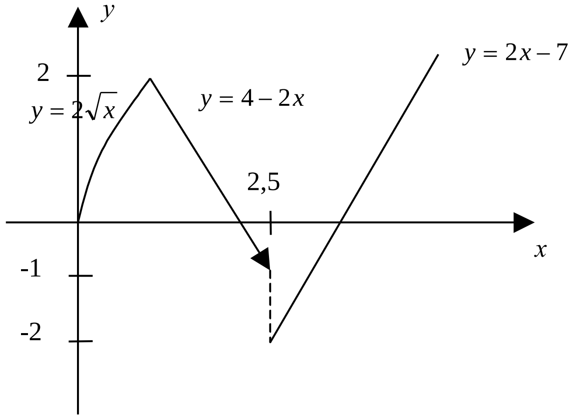
$$\lim_{x \to 2{,}5-0} y = \lim_{x \to 2{,}5-0} (4 - 2x) = 4 - 2 \cdot 2{,}5 = 4 - 5 = -1;$$

$$\lim_{x \to 2{,}5+0} y = \lim_{x \to 2{,}5+0} (2x - 7) = 2 \cdot 2{,}5 - 7 = 5 - 7 = -2\,.$$

Здесь односторонние пределы функции в точке $x = 2{,}5$ конечны, но не равны. Поэтому в точке $x = 2{,}5$ функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции в точке разрыва:

$$\lim_{x\to 2,5+0} y - \lim_{x\to 2,5-0} y = -2-(-1) = -2+1 = -1.$$



Пример 44. Найти точки разрыва функции

$$y = \begin{cases} x \ \textit{при} \quad x < 0, \\ \sin x \ \textit{при} \ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, , \\ 1 \ \textit{при} \ \ x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

если они существуют.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях аргумента x. Она может иметь разрыв в точках $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция непрерывна, так как каждая из формул, которыми она задана, представляет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем точки $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} x = 0; \qquad \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \sin x = \sin 0 = 0;$$

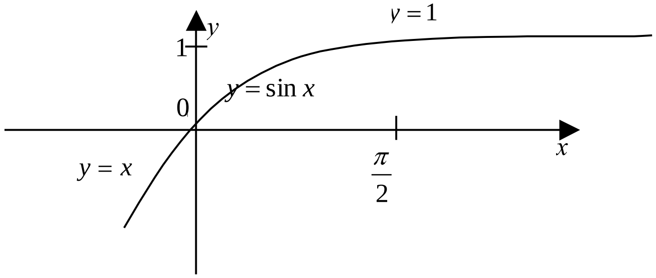
$$y(0) = \sin 0, \ y(0) = 0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=1$ равны между собой и равны частному значению функции в этой точке, поэтому данная функция в точке $x=0$ непрерывна.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}1=1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

И в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ данная функция непрерывна, так как односторонние пределы равны между собой и равны частному значению функции в этой точке. Следовательно, функция непрерывна для всех $x\in R$.



Пример 45. Исследовать на непрерывность функцию $y=4^{\frac{1}{x}}$ в точках $x=0$ и $x=2$.

Решение. Показательная функция $y=a^u$, где $a>0$, $a\neq 1$, определена для всех действительных значений своего аргумента u. Найдем область определения данной функции:

$x\neq 0$, то есть функция определена для всех значений x, кроме $x=0$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to -0}4^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{1}{-б.м.}=-\infty;\ \ 4^{-\infty}=0\right]=0;$$

$$\lim_{x\to +0}4^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{1}{+б.м.}=+\infty;\ \ 4^{+\infty}=+\infty\right]=+\infty.$$

Так как правосторонний предел функции не является конечным, тогда данная функция в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода.

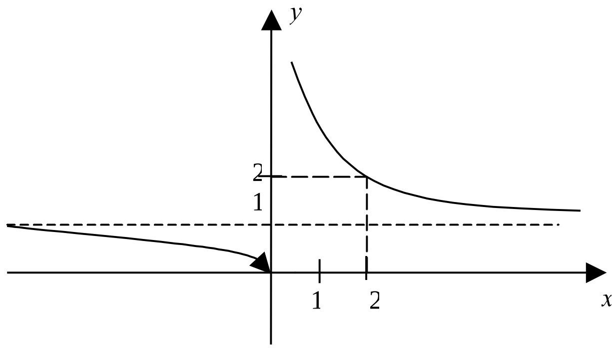
Исследуем точку $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} y = \lim_{x \to 2-0} 4^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\lim_{x \to 2+0} y = \lim_{x \to 2+0} 4^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$y(2) = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 2$ конечны, равны между собой и равны частному значению функции в этой точке, поэтому данная функция в точке $x = 2$ непрерывна.



1.9. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1. Сумма, произведение, частное двух непрерывных функции есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

Теорема 2. Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси Ox, то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси Oy.

Теорема 4. (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5. (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Следствие 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$, где $c \in [a;b]$.

Задания для самостоятельного решения

Исследуйте непрерывность функций, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва, постройте графики функций в окрестностях точек разрыва.

1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$; 2. $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$; 3. $y = \dfrac{x^2 - x^3}{|x-1|}$;

4. $y = \lg(2x+1)$; 5. $y = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$; 6. $y = \sqrt[x]{2} - 1$;

7. $y = \begin{cases} -x & при \quad x \le -1, \\ \dfrac{2}{x-1} & при \quad x > -1; \end{cases}$; 8. $y = \begin{cases} 1 - x^2 & при \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & при \quad 0 \le x \le 2, \\ 4 - x & при \quad x > 2. \end{cases}$

Ответы: **1**.x=1, *x=5* – точки разрыва II рода; **2**. функция непрерывна для всех $x \in R$; **3**. *x=1* – точка разрыва I рода, скачок равен -*2*; **4**.функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = -\dfrac{1}{2}$; **5**. в точке *x=-2* разрыв I рода, скачок равен *2*; **6**. в точке *x=0* разрыв II рода; **7**. в точке x=-1 разрыв I рода, скачок равен -2, в точке x=1 разрыв II рода; **8**. в точке *x=2* разрыв I рода, скачок равен 1.

Индивидуальное домашнее задание по теме «Предел и непрерывность функции»

Задача 1. Найти пределы функций:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{10x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\arcsin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{5x^2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\, 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\,ctg\,4x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x+5}{x^6+3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(3x-1)-\ln(3x-2)\right)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+5}{3x^5+4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{ctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg(x+2)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x+1}\right)^{x-1}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos^3 3x}{4x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9}{7x^2+10x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(x+4)-\ln x\right)$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{6x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg\,3x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{5}{x}+2}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+1}{x^4+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+10x^3-3}{2x^5-x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+2}{1-3x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tg\,2x}-1}{7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{5+x}{x}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+1}{3x^5-2x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(1-3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+x^3}{2x^4-5x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xtg\,5x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{x+1}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{5x^4-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin^2 x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,2x)^{\frac{1}{3x}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+7x^2-1}}{3x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x-1}$.

Задача 2. Исследовать функции на непрерывность и сделать схематический чертёж.

1. а) $y=\begin{cases} x+4 & при\quad x<-1,\\ x^2+2 & при\quad -1\le x<1,\\ 2x & при\quad x\ge 1;\end{cases}$ б) $y=9^{\frac{1}{2-x}}$ в точках $x=0, x=2$.

2. а) $y=\begin{cases} x+2 & при\quad x\le -1,\\ x^2+1 & при\quad -1<x\le 1,\\ -x+3 & при\quad x>1.\end{cases}$ б) $y=4^{\frac{1}{3-x}}$ в точках $x=1, x=3$.

3. а) $y=\begin{cases} -x & при\quad x\le 0,\\ -(x-1)^2 & при\quad 0<x<2,\\ x-3 & при\quad x\ge 2.\end{cases}$ б) $y=12^{\frac{1}{x}}$ в точках $x=0, x=2$.

4. а) $y=\begin{cases} \cos x & при\quad x\le 0,\\ x^2+1 & при\quad 0<x<1,\\ x & при\quad x\ge 1,\end{cases}$ б) $y=3^{\frac{1}{4-x}}$ в точках $x=2, x=4$.

5. а) $y=\begin{cases} -x & при\quad x\le 0,\\ x^2 & при\quad 0<x\le 2,\\ x+1 & при\quad x>2.\end{cases}$ б) $y=8^{\frac{1}{5-x}}$ в точках $x=3, x=5$.

6. а) $y=\begin{cases} -x & при \quad x\le 0, \\ \sin x & при \quad 0\le x\le \pi, \\ x-2 & при \quad x>\pi. \end{cases}$ б) $y=10^{\frac{1}{7-x}}$ в точках $x=5, x=7$.

7.а) $y=\begin{cases} -(x+1) & при \quad x\le -1, \\ (x+1)^2 & при \quad -1<x\le 0, \\ x & при \quad x>0; \end{cases}$ б) $y=14^{\frac{1}{6-x}}$ в точках $x=4, x=6$.

8.а) $y=\begin{cases} -x^2 & при \quad x\le 0, \\ tgx & при \quad 0<x\le \frac{\pi}{4}, \\ 2 & при \quad x>\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $y=15^{\frac{1}{8-x}}$ в точках $x=6, x=8$.

9. а) $y=\begin{cases} -2x & при \quad x\le 0, \\ x^2+1 & при \quad 0<x\le 1, \\ 2 & при \quad x>1; \end{cases}$ б) $y=11^{\frac{1}{4+x}}$ в точках $x=-4, x=-2$.

10. а) $y=\begin{cases} -2x & при \quad x\le 0, \\ \sqrt{x} & при \quad 0<x<4, \\ 1 & при \quad x\ge 4; \end{cases}$ б) $y=13^{\frac{1}{5+x}}$ в точках $x=-5, x=-3$.

11. а) $y=\begin{cases} x & при \quad x<0, \\ x^2-1 & при \quad 0\le x\le 2, \\ 5-x & при \quad x>2; \end{cases}$ б) $y=2^{\frac{1}{x+1}}$ в точках $x=-1, x=0$.

12. а) $y=\begin{cases} x & при \quad x<0, \\ x^2 & при \quad 0\le x\le 1, \\ 2 & при \quad x>1; \end{cases}$ б) $y=5^{\frac{1}{x-2}}$ в точках $x=1, x=2$.

13. а) $y=\begin{cases} 1-x & при \quad x<0, \\ 4x^2 & при \quad 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 1 & при \quad x>\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $y=16^{\frac{1}{x+2}}$ в точках $x=-2, x=0$.

14. а) $y=\begin{cases} -x & при \quad x<0, \\ 2\sqrt{x} & при \quad 0\le x\le 4, \\ x & при \quad x>4; \end{cases}$ б) $y=6^{\frac{1}{x-3}}$ в точках $x=2, x=3$.

15. а) $y=\begin{cases} -2 & при \quad x<-1, \\ x+1 & при \quad -1\le x<1, \\ 2\sqrt{x} & при \quad x\ge 1; \end{cases}$ б) $y=7^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x=0, x=1$.

16. а) $y=\begin{cases} 2-x & при \quad x<0, \\ (x-2)^2 & при \quad 0\le x<1, \\ x & при \quad x\ge 1; \end{cases}$ б) $y=8^{\frac{1}{3-x}}$ в точках $x=0, x=3$.

17. а) $y=\begin{cases} 3x & при \quad x<0, \\ tgx & при \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1-x & при \quad x\ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y=10^{\frac{1}{x-2}}$ в точках $x=2, x=3$.

18. а) $y=\begin{cases} -x & при \quad x\le 0, \\ \cos x & при \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ x-\dfrac{\pi}{2} & при \quad x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y=12^{\frac{1}{2-x}}$ в точках $x=0, x=2$.

19. а) $y=\begin{cases} x+1 & при \quad x<0, \\ 2^x & при \quad 0\le x\le 2, \\ 3x & при \quad x>2; \end{cases}$ б) $y=3^{\frac{1}{x-3}}$ в точках $x=3, x=4$.

20. а) $y=\begin{cases} 0 & при \quad x<-1, \\ (x+1)^2 & при \quad -1\le x<1, \\ 2-x & при \quad x\ge 1; \end{cases}$ б) $y=15^{\frac{1}{2x-4}}$ в точках $x=2, x=3$.

21. а) $y=\begin{cases} 7x+5 & при \quad x\le -1, \\ 3-x^2 & при \quad -1<x\le 3, \\ x-3 & при \quad x>3; \end{cases}$ б) $y=4^{\frac{1}{2-x}}$ в точках $x=0, x=2$.

22. а) $y=\begin{cases} -x^2 & при \quad x\le -1, \\ x-3 & при \quad -1<x\le 4, \\ \dfrac{4}{x} & при \quad x>4; \end{cases}$ б) $y=11^{\frac{1}{x-5}}$ в точках $x=5, x=6$.

23. а) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x} & при \quad x\le 0, \\ x+1 & при \quad 0<x\le 2, \\ 1 & при \quad x>2; \end{cases}$ б) $y=9^{\frac{1}{3-x}}$ в точках $x=0, x=3$.

24. а) $y = \begin{cases} 1 - x^3 & при \quad x \le 1, \\ 3x - 1 & при \quad 1 < x < 2, \\ 5 & при \quad x \ge 2; \end{cases}$ б) $y = 2^{\frac{1}{x+3}}$ в точках $x = -3, x = -2$.

25. а) $y = \begin{cases} x^2 + 1 & при \quad x \le 0, \\ 1 - x & при \quad 0 < x < 2, \\ \sqrt{x} & при \quad x \ge 2; \end{cases}$ б) $y = 7^{\frac{1}{x+5}}$ в точках $x = -5, x = -4$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная

2.1.1. Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a;b)$. Рассмотрим два значения аргумента этого интервала: исходное x_0 и новое x. Разность $x - x_0 = \Delta x$ называется приращением аргумента, а разность соответствующих значений функции $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0 = \Delta y$ – приращением функции. В дальнейшем будем считать значение x_0 фиксированным, а x – переменным. При этом Δx и Δy являются переменными величинами.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции. Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется дифференцируемой в этом интервале.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается $f'(x_0)$, или $y'\big|_{x=x_0}$, или $y'(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, например, материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону $S = f(t)$, где t - время, S - путь, проходимый точкой за время t. Тогда скорость точки в момент времени t равна: $V = S'(t)$. В этом заключается физический смысл производной.

Геометрический смысл производной состоит в следующем: производная $f'(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Теорема. (о связи дифференцируемости и непрерывности).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема не верна.

2.1.2. Правила нахождения производной функции

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил.

1. Производная константы равна нулю:

$$c' = 0, \tag{2.1}$$

где c – константа.

2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{2.2}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \tag{2.3}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

4. Постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u', \tag{2.4}$$

где c – константа, $u = u(x)$.

5. Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведения знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат данного знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \; v \neq 0. \tag{2.5}$$

Следствие 1. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c} \cdot u'$, где c – константа, $u = u(x)$.

Следствие 2. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, где c – константа, $v = v(x)$.

2.1.3. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{2.6}$$

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(x)$ - взаимно обратные функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{2.7}$$

Таким образом, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

2.1.4. Производные основных элементарных функций, сложных функций

1. Степенная функция $y = x^n$, где $n \in R$:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Если $a = e$, где $e \approx 2{,}7$, тогда $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Если $a = e$, где $e \approx 2{,}7$, тогда

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому запишем таблицу производных сложных функций, заменив аргумент *x* на промежуточный аргумент *u:*

1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

2. $(a^{u})' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$;

3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

6. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 7. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 11. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать правила дифференцирования и таблицы производных основных элементарных и сложных функций.

Пример 1. Найти производную функции

$y = x^3 - 2\sqrt{x} + 3$.

Решение. Данная функция есть алгебраическая сумма трех слагаемых поэтому

$$y' = \left(x^3 - 2\sqrt{x} + 3\right)' = (x^3)' - (2\sqrt{x})' + (3)' = 3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x} - 5.$$

Решение. Преобразуем функцию

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^{-1} - 5 = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-1} - 5,$$

тогда

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-1} - 5\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(3x^{-1}\right)' - (5)' =$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} - \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} + 3 \cdot (-1) x^{-1-1} - 0 = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{x^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2.5) производной частного двух функций:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (2.3) производной произведения двух функций:

$$y' = (x^5)'\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)' = 5x^4\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(0-\frac{1}{3}+6x\right)=$$

$$=10x^4-\frac{5}{3}x^5+15x^6-\frac{1}{3}x^5+6x^6=10x^4-2x^5+21x^6.$$

Второй способ. Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем как сумму:

$$y' = 2x^5-\frac{1}{3}x^6+3x^7,\ y' = 2\cdot 5x^4-\frac{1}{3}\cdot 6x^5+3\cdot 7x^6=10x^4-2x^5+21x^6.$$

Этот способ быстрее приводит к цели.

Следует иметь в виду, что вообще не обязательно дифференцировать данную функцию сразу. Можно предварительно данную функцию тождественно преобразовать, что ведет к упрощению дифференцирования.

Пример 5. Найти производную функции $y = x^2\cdot\sin x$.

Решение. $y' = (x^2)'\cdot\sin x + x^2\cdot(\sin x)' = 2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x$.

Пример 6. Найти производную функции $y = (2+3x)^5$.

Решение. Пусть $u(x) = 2+3x$, тогда $y = u^5$. Применим правило (2.6) дифференцирования сложной функции $y_x' = (u^5)' = 5\cdot u_u^4\cdot u_x'$.

Найдем производную функции $u(x)$:

$$u_x' = (2+3x)' = (2)' + (3x)' = 0+3=3.$$

Тогда получим:

$$y_x' = 5(2+3x)^4\cdot 3 = 15(2+3x)^4.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = tg5x$.

Решение. Полагая, что $u(x) = 5x$ и пользуясь формулой (2.6), получаем:

$$y_x' = (tgu)_u' \cdot u_x' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u_x';$$

$$u_x' = (5x)' = 5,$$

тогда $y_x' = \dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \dfrac{5}{\cos^2 5x}$.

Пример 8. Найти производную функции

$$y = \arcsin^2 x.$$

Решение. Пусть $u(x) = \arcsin x$, тогда $y = u^2$.

$$y_x' = (u^2)_u' \cdot u_x' = 2 \cdot u \cdot u_x', \; u_x' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тогда получаем:

$$y_x' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 9. Найти производную функцию

$$y = \frac{1}{3} tg^3 x - ctg 2x + 1.$$

Решение. Воспользуемся формулами (2.2), (2.6), (2.4) и (2.1), получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{3} tg^3 x\right)' - (ctg 2x)' + (1)' = \frac{1}{3} \cdot 3tg^2 x \cdot (tgx)' - \left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\right) \cdot (2x)' + 0 =$$

$$= tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2 = \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Пример 10. Найти производную функции $y = \ln(\cos 3x)$.

Решение. Согласно формуле (2.6) и таблице производных сложных функций найдем

$$y' = (\ln(\cos 3x))' = \frac{1}{\cos 3x} \cdot (\cos 3x)' = \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = -\frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot 3 =$$
$$= -3tg 3x.$$

Пример 11. Дана функция $y = \ln \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$. Найти y'.

Решение. Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$y = \ln \frac{4 - x^2}{4 + x^2} = \ln\left(4 - x^2\right) - \ln\left(4 + x^2\right).$$

Согласно формулам (2.2) и (2.6), а также таблице производных сложных функций, получаем:

$$y' = \left(\ln\left(4 - x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(4 + x^2\right)\right)' = \frac{1}{4 - x^2} \cdot \left(4 - x^2\right)' - \frac{1}{4 + x^2} \cdot \left(4 + x^2\right)' =$$

$$= \frac{-2x}{4 - x^2} - \frac{2x}{4 + x^2} = \frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{2x}{4 + x^2} = \frac{2x\left(4 + x^2\right) - 2x\left(x^2 - 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4\right)} =$$

$$= \frac{8x + 2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^4 - 16} = \frac{16x}{x^4 - 16}.$$

Если под знаком логарифмической функции, производную которой требуется найти, содержится выражение, к которому можно применить свойства логарифмов (произведение, частное, степень, корень), то удобнее сначала выполнить логарифмирование, а затем дифференцировать преобразованную функцию.

Пример 12. Дана функция $y = \sqrt[x]{3} + \dfrac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}}$.

Найти y'.

Решение. Сначала преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{\sqrt{x}}.$$

Используя формулы (2.2), (2.6) и таблицу производных, получим:

$$y' = \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{\sqrt{x}}\right)' = \left(3^{\frac{1}{x}}\right)' + \left(2^{-5x}\right)' + \left(6^{\sqrt{x}}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+ 2^{-5x} \cdot \ln 2 \cdot \left(-5x\right)' + 6^{\sqrt{x}} \cdot \ln 6 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2^{-5x} \cdot \ln 2 \cdot \left(-5\right) +$$

$$+ 6^{\sqrt{x}} \cdot \ln 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{x^2} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 - 5 \cdot 2^{-5x} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 6^{\sqrt{x}} \cdot \ln 6.$$

Пример 13. Найти производную функции $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

Решение. По формулам (2.2), (2.6) и используя таблицу производных получаем

$$y' = \left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right)' = (x\cdot\arccos x)' - \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = (x)'\cdot\arccos x +$$

$$+ x\cdot(\arccos x)' - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \arccos x + x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

$$\cdot(-2x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arccos x .$$

Пример 14. Дана функция $y = \frac{1}{2}arctgx - \ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$. Найти y' .

Решение. Преобразуем второе слагаемое данной функции, пользуясь свойствами логарифмов:

$$\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1-x).$$

Тогда данная функция примет вид:

$$y = \frac{1}{2}arctgx - \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1-x).$$

Используя формулы (2.2), (2.4) и таблицу производных, получаем

$$y' = \left(\frac{1}{2}arctgx - \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1-x)\right)' = \left(\frac{1}{2}arctgx\right)' - \left(\frac{1}{4}\ln(1+x)\right)' +$$

$$+\left(\frac{1}{4}\ln(1-x)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)' + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)' = \frac{1}{2(1+x^2)} -$$

$$-\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)}\cdot(-1) = \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} = \frac{1}{2(1+x^2)} -$$

$$-\frac{1-x+1+x}{4(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{2}{4(1-x^2)} = \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2(1-x^2)} =$$

$$=\frac{1-x^2-1-x^2}{2(1+x^2)(1-x^2)}=\frac{-2}{2(1-x^4)}=-\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{x^4-1}.$$

2.1.5. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти y' из уравнения $y=f(x)$, то можно:

а) логарифмировать обе части уравнения (удобнее сделать по основанию *e*, то есть воспользоваться натуральным логарифмом)

$$\ln y=\ln f(x)=\varphi(x); \tag{2.8}$$

б) дифференцировать обе части равенства (2.8), где $\ln y$ есть сложная функция от *x*,

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x) \text{(согласно формуле (2.6));} \tag{2.9}$$

в) заменить *y* его выражением через *x* и определить y':

$$y'=y\cdot\varphi'(x)=f(x)\cdot\varphi'(x). \tag{2.10}$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Пример 15. Найти производную функции $y=\dfrac{(1+x)^3}{(2+x)^4\cdot(3+x)^5}$.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию *e* (равенство (2.8)): $\ln y=\ln\dfrac{(1+x)^3}{(2+x)^4\cdot(3+x)^5}$.

Преобразуем логарифм частного в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$\ln y=\ln(1+x)^3-\ln\left((2+x)^4\cdot(3+x)^5\right).$$

Логарифм произведения преобразуем в сумму логарифмов каждого множителя:

$$\ln y=\ln(1+x)^3-\ln(2+x)^4-\ln(3+x)^5.$$

Преобразуем логарифм степени в произведение показателя степени на логарифм основания степени (для каждого слагаемого правой части последнего равенства): $\ln y=3\ln(1+x)-4\ln(2+x)-5\ln(3+x)$.

Продифференцируем обе части полученного равенства по формуле (2.9):

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)' - 4\cdot\frac{1}{2+x}\cdot(2+x)' - 5\cdot\frac{1}{3+x}\cdot(3+x)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1+x} - \frac{4}{2+x} - \frac{5}{3+x}\ .$$

Используя равенство (2.10), находим y':

$$y' = y\cdot\left(\frac{3}{1+x} - \frac{4}{2+x} - \frac{5}{3+x}\right)$$

или

$$y' = \frac{(1+x)^3}{(2+x)^4\cdot(3+x)^5}\cdot\left(\frac{3}{1+x} - \frac{4}{2+x} - \frac{5}{3+x}\right).$$

Пример 16. Дана функция $y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$. Найти y'.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию *e* (равенство (2.8)):

$$\ln y = \ln\sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}} = \ln\left(\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}\right)^{1/3}.$$

Используя пояснения решения примера 15, получаем

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2} = \frac{1}{3}\left(\ln x + \ln(1+x^2) - \ln(1-x)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln x + \ln(1+x^2) - 2\ln(1-x)\right).$$

Тогда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\,(1+x^2)' - 2\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)'\right);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1-x}\cdot(-1)\right);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1-x}\right).$$

Найдем y':

$$y' = y \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1-x}\right) \text{ или}$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1-x}\right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = \ln u^v, \ \ln y = v \cdot \ln u .$$

Согласно формулам (2.9) и (2.3) получаем:

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v(\ln u)', \ \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

тогда

$$y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right),$$

$$y' = u^v\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) \qquad (2.11)$$

или

$$y' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (2.12)$$

Можно сформулировать правило запоминания формулы (2.12): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = const$, и производной степенной функции, при условии $v = const$.

При решении практических заданий можно оставлять ответ в виде формулы (2.11).

Пример 17. Найти производную функции $y = (tg5x)^{1-x}$.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию e:

$$\ln y = \ln(tg5x)^{1-x}, \ \ln y = (1-x)\ln(tg5x).$$

Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = (1-x)' \cdot \ln(tg5x) + (1-x)(\ln(tg5x))',$$

$$\frac{y'}{y} = -1 \cdot \ln(tg5x) + (1-x) \cdot \frac{1}{tg5x} \cdot (tg5x)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln(tg5x) + \frac{1-x}{tg5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln(tg5x) + \frac{5(1-x)}{tg5x \cdot \cos^2 5x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln(tg5x) + \frac{5 \cdot (1-x)}{\sin 5x \cdot \cos 5x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln(tg5x) + \frac{10 \cdot (1-x)}{2\sin 5x \cdot \cos 5x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln(tg5x) + \frac{10 \cdot (1-x)}{\sin 10x}.$$

Умножив обе части полученного равенства на *y*, находим y':

$$y' = y\left(-\ln(tg5x) + \frac{10(1-x)}{\sin 10x}\right) \text{ или } y' = (tg5x)^{1-x} \cdot \left(\frac{10(1-x)}{\sin 10x} - \ln(tg5x)\right).$$

Пример 18. Дана функция $y = (\cos x)^{\sin x}$. Найти y'.

Решение. Логарифмируем обе части данного уравнения:

$$\ln y = \ln\left((\cos x)^{\sin x}\right), \ \ln y = \sin x \cdot \ln\cos x.$$

Согласно формулам (2.9) и (2.3) получаем:

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln\cos x + \sin x (\ln\cos x)',$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)',$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln\cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (-\sin x),$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln\cos x - \sin x \cdot tgx.$$

Тогда

$y' = y(\cos x \cdot \ln\cos x - tgx \cdot \sin x)$ или

$y' = (\cos x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln\cos x - tgx \cdot \sin x).$

2.1.6. Дифференцирование функций, заданных неявно

Если y есть неявная функция от x, то есть задана уравнением $f(x; y) = 0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной y'_x нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y, то есть $y' = \varphi(x; y)$.

Пример 19. Найти производную неявной функции $x^2 + y^2 - 4x - 9y + 5 = 0$.

Решение. Дифференцируем по x обе части данного равенства, где y есть функция от x, получим:

$$(x^2)' + (y^2)' - (4x)' - (9y)' + 5' = 0,$$

$$2x + 2y \cdot y' - 4 - 9y' + 0 = 0,$$

$$2x + 2y \cdot y' - 4 - 9y' = 0.$$

Разрешим полученное равенство относительно y':

$$2y \cdot y' - 9y' = 4 - 2x, \quad y'(2y - 9) = 4 - 2x,$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2y - 9}.$$

Пример 20. Найти производную неявной функции $e^y \cdot \sin x = e^{-x} \cdot \cos y$.

Решение. Дифференцируем данное равенство по x, пользуясь формулами (2.3), (2.6) и таблицей производных:

$$(e^y \cdot \sin x)' = (e^{-x} \cdot \cos y)'$$

$$(e^y)' \cdot \sin x + e^y \cdot (\sin x)' = (e^{-x})' \cdot \cos y + e^{-x} \cdot (\cos y)',$$

$$e^y \cdot y' \cdot \sin x + e^y \cdot \cos x = -e^{-x} \cdot \cos y + e^{-x} \cdot (-\sin y)y'.$$

Из полученного равенства выразим y':

$$e^y \cdot y' \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \sin y \cdot y' = -e^{-x} \cdot \cos y - e^y \cdot \cos x,$$

$$y'(e^y \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \sin y) = -e^{-x} \cdot \cos y - e^y \cdot \cos x.$$

Отсюда получаем: $y=\dfrac{-\left(e^{-x}\cdot\cos y+e^{y}\cos x\right)}{e^{y}\sin x+e^{-x}\sin y}$.

Пример 21. Дана функция $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$, заданная неявно. Найти y'.

Решение. Обе части данного равенства представляют собой степенно-показательные функции. Воспользуемся логарифмическим дифференцированием:

$$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x},\ y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}};\ \ln y^{\frac{1}{x}}=\ln x^{\frac{1}{y}},\ \frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x.$$

Воспользуемся формулами (2.6), (2.3), получаем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\ln y+\frac{1}{x}\cdot\left(\ln y\right)'=\left(\frac{1}{y}\right)'\cdot\ln x+\frac{1}{y}\cdot\left(\ln x\right)',$$

$$-\frac{1}{x^{2}}\ln y+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=\left(-\frac{1}{y^{2}}\right)\cdot y'\cdot\ln x+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{xy}\cdot y'+\frac{1}{y^{2}}\ln x\cdot y'=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x^{2}}\ln y,$$

$$y'\left(\frac{1}{xy}+\frac{\ln x}{y^{2}}\right)=\frac{1}{xy}+\frac{\ln y}{x^{2}},\ y'\left(\frac{y+x\ln x}{xy^{2}}\right)=\frac{x+y\ln y}{x^{2}y}$$

Отсюда найдем y':

$$y'=\frac{x+y\ln y}{x^{2}y}:\frac{y+x\ln x}{xy^{2}},\ y'=\frac{\left(x+y\ln y\right)xy^{2}}{x^{2}y\left(y+x\ln x\right)}\ \text{или}\ y'=\frac{\left(x+y\ln y\right)y}{x\left(y+x\ln x\right)}.$$

Пример 22. Найти производную функции $x+y=e^{x-y}$, заданной неявно.

Решение. Продифференцируем обе части данного равенства по x:

$$x'+y'=\left(e^{x-y}\right)',\ 1+y'=e^{x-y}\cdot\left(x-y\right)',\ 1+y'=e^{x-y}\cdot\left(1-y'\right),$$

$$1+y'=e^{x-y}-y'\cdot e^{x-y}.$$

Из полученного равенства выразим y':

$$y'+y'\cdot e^{x-y}=e^{x-y}-1,\ y'\left(1+e^{x-y}\right)=e^{x-y}-1.$$

Тогда искомая производная принимает вид:

$$y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}.$$

2.1.7. Производные функций, заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (2.13)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y_x', считая, что функции (2.13) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции (2.7) получаем:

$$t_x' = \frac{1}{x_t'}. \qquad (2.14)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрически уравнениями (2.13), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу (2.6) дифференцирования сложной функции имеем: $y_x' = y_t' \cdot t_x'$.

С учетом равенства (2.14) получаем:

$$y_x' = y_t' \cdot \frac{1}{x_t'} \text{ или } y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}. \qquad (2.15)$$

Полученная формула позволяет находить производную y_x' от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x, которую иногда и невозможно найти.

Пример 23. Пусть $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

Найти y_x'.

Решение. Найдем производные от x и y по параметру t:

$$x_t' = (t^2)' = 2t, \; y_t' = (t^3)' = 3t^2.$$

Тогда согласно формуле (2.15) получаем:

$$y'_x=\frac{3t^2}{2t}\ \text{ или }\ y'_t=\frac{3}{2}t\ .$$

Пример 24. Дано $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$.Найтии y'_x .

Решение. Продифференцируем *x* и *y* по параметру *t*:

$$x'_t=\frac{(3t)'\cdot(1+t^3)-3t\cdot(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{3(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3+3t^3-9t^3}{(1+t^3)^2}=$$

$$=\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$y'_t=\frac{(3t^2)'\cdot(1+t^3)-3t^2\cdot(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{6t(1+t^3)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{6t+6t^4-9t^4}{(1+t^3)^2}=$$

$$=\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Используя формулу (2.15) получаем:

$$y'_x=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}:\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}=\frac{3t(2-t^3)}{3(1-2t^3)}\ \text{ или }\ y'_x=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Пример 25. Пусть $\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t, \\ y=a\cdot\sin^3 t. \end{cases}$

Найти y'_x .

Решение. Найдем производные от *x* и *y* по параметру t :

$$x'_t=(a\cdot\cos^3 t)'=a\cdot 3\cos^2 t\cdot(\cos t)'=3a\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t,$$

$$y'_t=(a\cdot\sin^3 t)'=a\cdot 3\sin^2 t\cdot(\sin t)'=3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\ .$$

По формуле (2.15) получаем:

$$y'_x=\frac{3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{\sin t}{\cos t}\ \text{ или }\ y'_x=-tgt\ .$$

2.1.8. Производные высших порядков

Если y' есть производная от функции $y = f(x)$, то производная от y' называется второй производной, или производной второго порядка от первоначальной функции *y*, и обозначается y'' или $f''(x)$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')' = y''' = f'''(x)$;

производная четвертого порядка $(y''')' = y^{IV} = f^{IV}(x)$;

производная n-го порядка $(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Пример 26. Найти y''', если $y = x^6 - 7x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x + 2$.

Решение. Согласно формулам (2.2), (2.4), (2.1) и таблице производных получаем:

$$y' = (x^6)' - (7x^4)' + (5x^3)' - (3x^2)' + (7x)' + (2)' = 6x^5 - 28x^3 + 15x^2 - 6x + 7;$$

$$y'' = (6x^5)' - (28x^3)' + (15x^2)' - (6x)' + (7)' = 30x^4 - 84x^2 + 30x - 6;$$

$$y''' = (30x^4)' - (84x^2)' + (30x)' - (6)' = 120x^3 - 168x + 30.$$

Пример 27. Показать, что функция $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Решение. Для того, чтобы выполнить данное задание, необходимо найти первую и вторую производные указанной функции, затем полученные правые части подставить в данное уравненгие, а вместо *y* – его правую часть.

Найдем y' и y'' пользуясь формулами (2.2), (2.3), (2.4) и таблицей производных:

$$y' = (c_1 e^{2x})' + (c_2 x e^{2x})' + (e^x)' = c_1 \cdot e^{2x} \cdot (2x)' + c_2\left(x' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})'\right) +$$

$$+ e^x = 2c_1 e^{2x} + c_2 (e^{2x} + 2xe^{2x}) + e^x = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + e^x.$$

$$y'' = (2c_1 e^{2x})' + (c_2 e^{2x})' + (2c_2 x e^{2x})' + (e^x)' = 2c_1 e^{2x} \cdot (2x)' + c_2 e^{2x} \cdot (2x)' +$$

$$+ 2c_2\left(x' e^{2x} + x (e^{2x})'\right) + e^x = 4c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + 2c_2 (e^{2x} + 2xe^{2x}) + e^x =$$

$$= 4c_1e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x} + e^x = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x} + e^x.$$

Подставим в данное уравнение вместо y, y' и y'' соответствующие правые части равенств

$$4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x} + e^x - 4\left(2c_1e^{2x} + c_2e^{2x} + 2c_2xe^{2x} + e^x\right) +$$
$$+ 4\left(c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^x\right) = e^x.$$

Упростим левую часть полученного равенства:

$$4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x} + e^x - 8c_1e^{2x} - 4c_2e^{2x} - 8c_2xe^{2x} - 4e^x +$$
$$+ 4c_1e^{2x} + 4c_2xe^{2x} + 4e^x = \left(4c_1e^{2x} - 8c_1e^{2x} + 4c_1e^{2x}\right) + \left(4c_2e^{2x} - 4c_2e^{2x}\right) +$$
$$+ \left(4c_2xe^{2x} - 8c_2xe^{2x} + 4c_2xe^{2x}\right) + \left(e^x - 4e^x + 4e^x\right) = 0 + 0 + 0 + e^x = e^x.$$

Сравнивая полученное выражение e^x с правой частью данного уравнения, получаем:

$$e^x = e^x,$$

поэтому указанная функция удовлетворяет данному уравнению.

Если функция задана неявно, то есть задана уравнением $f(x; y) = 0$, первая производная которой равна $y' = \varphi(x; y)$, то вторую производную получим, дифференцируя функцию $\varphi(x; y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x:

$$y'' = F(x; y; y').$$

Заменяя здесь y' через $\varphi(x; y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$y'' = F(x; y; \varphi(x; y)) = g(x; y).$$

Совершенно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить только через x и y:

каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная y', ее следует заменять через $\varphi(x; y)$.

Пример 28. Дана функция $x - y + arctgy = 2$. Найти y''.

Решение. Дифференцируем по х обе части данного равенства и находим y':

$$(x)' - (y)' + (arctgy)' = 2', \qquad 1 - y' + \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 0,$$

$$\frac{1}{1+y^2}\cdot y'-y'=-1, \qquad y'-\frac{1}{1+y^2}\cdot y'=1, \qquad y'\cdot\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)=1,$$

$$y'\cdot\frac{1+y^2-1}{1+y^2}=1, \qquad y'\cdot\frac{y^2}{1+y^2}=1, \qquad y'=\frac{1+y^2}{y^2},$$

$$y'=\frac{1}{y^2}+\frac{y^2}{y^2}, \quad y'=\frac{1}{y^2}+1.$$

Обе части равенства дифференцируем по *x:*

$$y''=\left(\frac{1}{y^2}\right)'+1', \; y''=\left(y^{-2}\right)', \; y''=-2y^{-3}\cdot y', \; y''=-\frac{2}{y^3}\cdot y'.$$

В полученное равенство вместо y' подставим равное ему выражение $\frac{1+y^2}{y^2}$:

$$y''=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{1+y^2}{y^2} \text{ или } y''=-\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}.$$

Пример 29. Найти y'', если $y=tg\left(x+y\right)$.

Решение. Дифференцируем по х обе части данного равенства и находим y':

$$y'=\left(tg\left(x+y\right)\right)', \qquad y'=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}\cdot\left(x+y\right)',$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}\cdot\left(1+y'\right), \qquad y'=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}+\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}\cdot y',$$

$$y'-\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}\cdot y'=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}, \; y'\left(1-\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)},$$

$$y'\left(\frac{\cos^2\left(x+y\right)-1}{\cos^2\left(x+y\right)}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}, \; y'\left(\frac{-\sin^2\left(x+y\right)}{\cos^2\left(x+y\right)}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)},$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2\left(x+y\right)}:\left(-\frac{\sin^2\left(x+y\right)}{\cos^2\left(x+y\right)}\right), \; y'=-\frac{1}{\sin^2\left(x+y\right)}.$$

Полученное равенство дифференцируем по x и находим y'':

$$y''=\left(-\frac{1}{\sin^2(x+y)}\right)',$$

$$y''=\left(-\sin^{-2}(x+y)\right)',\quad y''=-(-2)\sin^{-3}(x+y)\cdot(\sin(x+y))',$$

$$y''=\frac{2}{\sin^3(x+y)}\cos(x+y)\cdot(x+y)',\qquad y''=\frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}(1+y').$$

В полученное равенство вместо y' подставим $-\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}$:

$$y''=\frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}\left(1-\frac{1}{\sin^2(x+y)}\right),\quad y''=\frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}\cdot\frac{\sin^2(x+y)-1}{\sin^2(x+y)},$$

$$y''=\frac{2\cos(x+y)\cdot\left(-\cos^2(x+y)\right)}{\sin^5(x+y)}.$$

Тогда $y''=\dfrac{-2\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}$ или $y''=-\dfrac{2ctg^3(x+y)}{\sin^2(x+y)}$.

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$

Как известно (формула (2.15)), первая производная y'_x находится по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически. Из определения второй производной и равенства (2.15) следует, что $y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x$, так как согласно формуле (2.14):

$$t'_x=\frac{1}{x'_t},$$

тогда получаем

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (2.16)$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и так далее.} \qquad (2.17)$$

Пример 30. Дана функция $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ Найти y''_{xx}.

Решение. Согласно формуле (2.15) найдем y'_x, для чего продифференцируем x и y по аргументу t:

$$x'_t = a(\cos t)' = -a\sin t,$$

$$y'_t = a(\sin t)' = a\cos t,$$

тогда $y'_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t}$, $y'_x = -ctgt$.

Используя формулу (2.16) найдем вторую производную данной функции по переменной x:

$$(y'_x)'_t = (-ctgt)' = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad y''_{xx} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

Пример 31. Найти y''_{xx}, если дана функция $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$

Решение. Продифференцируем x и y по переменной t:

$$x'_t = (t^2)' + (2t)' = 2t + 2 = 2(t+1),$$

$$y'_t = (\ln(t+1))' = \frac{1}{t+1}.$$

Согласно формуле (2.15) получаем:

$$y'_x = \frac{1}{t+1} : 2(t+1) = \frac{1}{2(t+1)^2}.$$

Найдем

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{2(t+1)^2}\right)' = \left(\frac{1}{2}(t+1)^{-2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(-2)(t+1)^{-3} = -\frac{1}{(t+1)^3}.$$

Тогда по формуле (2.16) получаем:

$$y''_{xx} = -\frac{1}{(x+1)^3} : 2(x+1) = -\frac{1}{2(x+1)^4} ,$$

то есть вторая производная имеет вид:

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2(x+1)^4} .$$

Задания для самостоятельного решения

Найти производные функций:

1. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$.
2. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$.
3. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5ctgx$.
4. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2tgx + 3$.
5. $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$.
6. $y = \arcsin x + 3\sqrt[3]{x} + 5\arccos x$.
7. $y = tgx - ctgx$.
8. $y = arctgx - arcctgx$.
9. $y = x\sin x$.
10. $y = x^2 tgx$.
11. $y = \sqrt[7]{x} \cdot \ln x$.
12. $y = \sqrt[3]{x} \cdot arcctgx$.
13. $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$.
14. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.
15. $y = \frac{ctgx}{\sqrt{x}}$.
16. $y = \frac{xtgx}{1 + x^2}$.
17. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
18. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$.
19. $y = \frac{x}{2x - 1}$.
20. $y = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$
21. $y = \sin 3x$.
22. $y = \cos(x^2 + 5x + 2)$.
23. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$.
24. $y = \sqrt{1 + 5\cos x}$.
25. $y = tg^{50} x$.
26. $y = \cos^{100} x$.
27. $y = \ln(1 + \cos x)$.
28. $y = \ln(x^2 - 3x + 7)$
29. $y = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$.
30. $y = \arcsin\frac{2x}{x^2 + 1}$.

31. $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

32. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

33. $y=\ln(\arccos 2x)$.

34. $y=arctg(\ln(5x+3))$.

Найти производные степенно-показательных функций:

35. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

36. $y=x^{\sin x}$.

37. $y=(tgx)^{\sin x}$.

38. $y=x^{x}$.

39. $y=x^{\ln x}$

40. $y=x^{-tgx}$

Найти производные функций заданных неявно:

41. $x^2+y^2=a^2$.

42. $y^2=2px$.

43. $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

44. $arctgy=x+y$.

45. $ctgy=xy$.

46. $e^{-x}\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

Найти y'_x и y''_{xx} функций, заданных параметрически:

47. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{t^3}{3}-t. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=e^{3t}. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t^2}{t^2+1}. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{(t+1)^2}, \\ y=\dfrac{t(1-t)}{(t+1)^2}. \end{cases}$

Найти производные второго порядка от функций:

51. $y=tgx$.

52. $y=ctgx$.

53. $y=\sin^2 x$.

54. $y=\cos^2 x$.

55. $y=\sqrt{1+x^2}$.

56. $y=\ln(2x-3)$

Найти производные третьего порядка от функций:

57. $y=xe^{-x}$.

58. $y=e^{x}\cdot\cos x$.

59. $y=x^2\cdot\sin x$.

60. $y=x^3\cdot 2^{x}$.

Найти производные n-го порядка от функций:

61. $y=2^{3x}$.

62. $y=e^{-3x}$.

63. $y = \ln(1+x)$.

64. $y = \dfrac{1}{x+2}$.

Ответы: **1.** $4x^3 + 6x - 2$. **2.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$.

3. $20x^4 - 3\cos x - \dfrac{5}{\sin^2 x}$. **4**. $\dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 4\sin x - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

5. $5^x \ln 5 + 6^x \ln 6 - 7^{-x} \ln 7$. **6**. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. **7**. $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

8. $\dfrac{2}{1+x^2}$. **9**. $\sin x + x\cos x$. **10**. $\dfrac{x(\sin 2x + x)}{\cos^2 x}$. **11**. $\dfrac{\ln x + 7}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

12. $\dfrac{arcctgx}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. **13**. $-\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **14**. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$.

15. $-\dfrac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cdot\sin^2 x}$. **16**. $\dfrac{(1+x^2)(\sin x\cos x + x) - x^2 \sin 2x}{(1+x^2)^2\cdot\cos^2 x}$.

17. $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$. **18**. $\dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **19**. $-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$. **20**. $-\dfrac{2\cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2}$.

21. $3\cos 3x$. **22**. $-(2x+5)\sin(x^2+5x+2)$. **23**. $\dfrac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$.

24. $\dfrac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$. **25**. $\dfrac{50tg^{49} x}{\cos^2 x}$. **26**. $-100\cos^{99} x\cdot\sin x$.

27. $\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$. **28**. $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+7}$. **29**. $\dfrac{x}{\sqrt{3-x^4}}$. **30**. $\dfrac{2}{(x^2+1)}$.

31. $\dfrac{1}{x^2-9}$. **32**. $\dfrac{2}{1-4x^2}$. **33**. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arccos 2x}$.

34. $\dfrac{5}{(5x+3)(1+\ln^2(5x+3))}$. **35**. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

36. $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$. **37**. $(tgx)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln tgx + \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

38. $x^x(1+\ln x)$. **39**. $2x^{\ln x - 1}\cdot\ln x$. **40**. $-x^{tgx}\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{tgx}{x}\right)$.

41. $-\dfrac{x}{y}$. **42**. $\dfrac{p}{y}$. **43**. $\dfrac{2x-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$. **44**. $-\dfrac{(1+y^2)}{y^2}$. **45**. $\dfrac{-y\sin^2 y}{1+x\sin^2 y}$.

46. $\dfrac{e^{-x}\sin y-e^{-y}\sin x}{e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x}$. **47**. $\dfrac{t^2-1}{2t}$; $\dfrac{1+t^2}{4t^3}$. **48**. $\dfrac{3}{2}e^t$; $\dfrac{3}{4e^t}$.

49. $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; $\dfrac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}$. **50**. $\dfrac{1-3t}{t-3}$; $\dfrac{8(t+1)^3}{(t-3)^3}$. **51**. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

52. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **53**. $2\cos 2x$. **54**. $-2\cos 2x$. **55**. $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

56. $-\dfrac{4}{(2x-3)^2}$. **57**. $e^{-x}(3-x)$. **58**. $-2e^x(\cos x+\sin x)$.

59. $(6-x^2)\cos x-6x\sin x$. **60**. $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$.

61. $2^{3x}(3\ln 2)^n$. **62**. $(-3)^n e^{-3x}$. **63**. $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. **64**. $\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$.

2.2. Правила Лопиталя и применение их к нахождению предела функции

В первой части были разъяснены элементарные способы нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Кроме этих элементарных способов, достаточно эффективным средством для нахождения предела функции в указанных особых случаях являются правила Лопиталя.

Теорема 1. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

Коротко полученную формулу читают так: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечания:

а) теорема 1 верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Достаточно положить $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\varphi(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$.

б) теорема 1 справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$.

в) если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то теорему 1 можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

и так далее.

Пример 32. Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\dfrac{0}{0}$ $\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0 \text{ и } \cos\dfrac{\pi}{2} = 0\right)$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin 3x\cdot(3x)'}{-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\cdot\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3\cdot(-1)}{1} = -3.$$

Пример 33. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$.

Решение. При $x = 2$: $2^3 - 4\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = 8 - 16 + 8 = 0$, $2^3 - 12\cdot 2 + 16 = 8 - 24 + 16 = 0$. Таким образом, имеет место случай $\dfrac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \left[\frac{3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 4}{3\cdot 2^2 - 12} = \frac{12 - 16 + 4}{12 - 12} = \frac{0}{0}\right].$$

Так как в результате применения правила Лопиталя неопределенность вида $\frac{0}{0}$ сохранилась, воспользуемся еще раз правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-8}{6x}=\left[\frac{6\cdot 2-8}{6\cdot 2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\right]$$

Таким образом, для нахождения данного предела функции правило Лопиталя применялось два раза.

Теорема 2. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример 34. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+1}{3x^2-1}.$$

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+1}{3x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2-4x+1)'}{(3x^2-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x-4}{6x}.$$

Подставив вместо x его предельное значение (∞), видим, что числитель и знаменатель полученной функции также стремится к ∞, то есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ сохранилось, поэтому еще раз применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-4}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(10x-4)'}{(6x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

Пример 35. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x)'}{(\ln(1+x))'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)=\infty$

Пример 36. Найти

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}=\left[\frac{\ln(+0)}{\ln(+0)}=\frac{-\infty}{-\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\sin 5x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'}{\dfrac{1}{\sin 5x}(\sin 5x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos 5x\cdot 5}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\cos x}{\cos 5x}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin 5x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim\frac{\cos x}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to+0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin x)'}=\frac{1}{5}\lim_{x\to+0}\frac{5\cos 5x}{\cos x}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5\cdot 1}{1}=1.$$

Правила Лопиталя применяются для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые называются основными.

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ – когда функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую, и $\infty-\infty$ – когда функция представляет собой разность двух положительных бесконечно больших величин, сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований функции к виду дроби.

Пример 37. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg\,2x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ctg\,2x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg\,2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(tg\,2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{2}=\frac{\cos^2 0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 38. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\left[\dfrac{1}{б.м.}-\dfrac{1}{б.м.}=\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\left[\frac{1-1}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{\cos x+\cos x+x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=$$

$$=\left[\frac{0}{1+1-0}=\frac{0}{2}\right]=0\,.$$

Случаи нахождения предела:

а) 1^{∞} – когда функция представляет степень, основание которой стремится к 1, а показатель степени – к бесконечности;

б) ∞^{0} – когда функция представляет степень, основание которой стремится к бесконечности, а показатель – к нулю;

в) 0^{0} – когда функция представляет степень, основание и показатель которой стремятся к нулю.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $0\cdot\infty$ (а затем к случаю $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

Пример 39. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\left[\left(tg\dfrac{\pi}{4}\right)^{tg\frac{\pi}{2}}=1^{\infty}\right]$. Пусть $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Прологарифмируем последнее равенство и найдем полученный предел:

$$\ln A=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(tgx)^{tg2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x\cdot\ln tgx=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{ctg\,2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\ln tgx)'}{(ctg\,2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{tgx\cdot\cos^2 x\cdot 2}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{2\sin x\cdot\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (-\sin 2x) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Получили, что $\ln A = -1$, тогда $A = e^{-1}$.

Таким образом получаем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg\,2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 40. Найти $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$.

Решение. $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} = \left[\infty^0\right]$.

Обозначим $A = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ и прологарифмируем полученное равенство:

$$\ln A = \ln \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = \left[\frac{1}{\infty\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Получаем: $\ln A = 0$. тогда $A = e^0 = 1$, то есть $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Пример 41. Найти $\lim_{x\to+\infty} x^{6/(1+2\ln x)}$.

Решение. $\lim_{x\to+\infty} x^{6/(1+2\ln x)} = \left[\infty^0\right]$.

Обозначим $A = \lim_{x\to+\infty} x^{6/(1+2\ln x)}$ и прологарифмируем полученное равенство:

$$\ln A = \ln \lim_{x\to+\infty} x^{6/(1+2\ln x)} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^{6/(1+2\ln x)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{1+2\ln x}\cdot\ln x =$$

$= 6\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1+2\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln A = 6\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln x)'} = 6\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{x}} = 6\lim_{x\to+0}\frac{x}{2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Таким образом $\ln A = 3$, $A = e^3$, а значит $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{6/(1+2\ln x)} = e^3$.

Пример 42. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x} = \left[\dfrac{e^0+e^0-2}{1-\cos 0} = \dfrac{1+1-2}{1-1} = \dfrac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos 2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x} = \left[\frac{e^0-e^0}{2\sin 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2\sin 2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x} = \left[\frac{e^0+e^0}{4\cos 0} = \frac{1+1}{4\cdot1} = \frac{2}{4}\right] = \frac{1}{2}.$$

Пример 43. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot e^{2x}-x}{5x^2+x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot e^{2x}-x}{5x^2+x^3} = \left[\frac{\sin 0\cdot e^0-0}{0+0} = \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(\sin x\cdot e^{2x}-x)'}{(5x^2+x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos xe^{2x}+\sin x\cdot 2e^{2x}-1}{10x+3x^2} = \left[\frac{\cos 0\cdot e^0+\sin 0\cdot 2e^0-1}{0+0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\cos xe^{2x}+2\sin xe^{2x}-1)'}{(10x+3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\sin xe^{2x}+2\cos xe^{2x}+2\cos xe^{2x}+4\sin xe^{2x}}{10+6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos x e^{2x} + 3\sin x e^{2x}}{10+6x} =$$

$$= \left[\frac{4\cdot\cos 0\cdot e^0 + 3\sin 0\cdot e^0}{10+0} = \frac{4+0}{10} = \frac{4}{10} \right] = \frac{2}{5}.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить пределы, используя правила Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 - 5x + 1}$. 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}$. 3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 20}{x^2 + 2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg\, 5x}{tg\, 3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\, 2x}{\arcsin 5x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$.

7. $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x}\ln x$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{7}{x^7-1} \right)$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx\cdot\ln(1+e^x)$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x)^{\frac{1}{x}}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. 12. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Ответы: **1.** 2. **2.** ∞. **3.** -12. **4.** $\frac{3}{5}$. **5.** $\frac{2}{5}$. **6.** $-\frac{1}{2}$. **7.** 0. **8.** 1. **9.** 2. **10.** e. **11.** 1. **12.** $e^{2/\pi}$.

Контрольная работа на тему «Производная функции»

Вариант I.

1. Найти y', если: а) $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{x^2} + 2x^2 + 4$; б) $y = tg^3 x$;

в) $y = \sin(x^3)$; г) $y = x^2 \cdot e^{-x}$; д) $y = (\arcsin x)^x$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант II.

1. Найти y', если: а) $y = 4x^5 + \frac{5}{x^4} + \sqrt[5]{x^3}$; б) $y = \sin^4(x+2)$;

в) $y = e^{3x-1}$; г) $y = \frac{\sqrt{x}}{ctgx}$; д) $y = x^{\sin x}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{ctg\,\dfrac{\pi x}{2}}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант III.

1. Найти y', если: а) $y=3\sqrt{x}+5\sqrt[5]{x}+5^x+x^5$; б) $y=\ln(\sin 2x)$;

в) $y=e^{\cos 3x}$; г) $y=\dfrac{1+e^x}{1-x}$; д) $y=(\cos x)^x$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант IV.

1. Найти y', если:

а) $y=\sqrt[8]{x^3}+8x^3+\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{1}{8}$; б) $y=7^{2x+1}$; в) $y=(2x-1)^{10}$;

г) $y=x^2\cdot\log_3 x$; д) $y=x^{\sqrt{x}}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант V.

1. Найти y', если:

а) $y=\sqrt[3]{x^4}+5x+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{5}$; б) $y=arctg\,3x$; в) $y=\arccos^3 x$;

г) $y=x^7\cdot\ln x$; д) $y=(ctgx)^x$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{\ln x}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант VI.

1. Найти y', если:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+9^x+x^9-9$; б) $y=\arcsin^2 x$; в) $y=arcctg\,(2x)$;

г) $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$; д) $y=x^{tgx}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант VII.

1. Найти y', если:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\sqrt[3]{x}+2x^3+5$; б) $y=arctg\left(1-x^2\right)$; в) $y=5^{\sqrt{x}}$;

г) $y=\dfrac{1}{\left(2x+1\right)^2}$; д) $y=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант VIII.

1. Найти y', если:

а) $y=x^2-\dfrac{2}{x^2}+7\sqrt[7]{x^4}+3$; б) $y=\ln\left(2x^2-3x+1\right)$; в) $y=3^{5x-1}$;

г) $y=\dfrac{x}{x^3-4}$; д) $y=\left(\arccos x\right)^x$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tgx}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант IX.

1. Найти y', если:

а) $y=\sqrt[8]{x^3}+8x^3+\dfrac{3}{x^8}+\dfrac{8}{3}$; б) $y=\ln^2 x$; в) $y=\sin^3 x$;

г) $y=x\cdot\sqrt{1-x}$; д) $y=x^{\ln x}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln\left(1+x\right)}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант X.

1. Найти y', если:

а) $y=3x-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{x^2}+5$; б) $y=tg^{10}x$; в) $y=\sin\left(10x\right)$;

г) $y=\dfrac{3-2x}{\left(x-2\right)^3}$; д) $y=x^{x^3}$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^4}$, пользуясь правилом Лопиталя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998.
2. Солодовников, А.С. Математика в экономике. Ч. 1, 2 / А.С. Солодовников. – М.: Финансы и статистика, 1999.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2002.
4. Крамер, И.Ш. Высшая математика для экономистов / И.Ш. Крамер. – М.: ЮНИТИ, 1998.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М: Наука, 1978.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980.
7. Гусак, А.А. Пособие к решению задач по высшей математике / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1973.
8. Лопатников, Л.И. Экономико-математический словарь / Л.И. Лопатников. – М.: Наука, 1993.
9. Шипачев, В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1994.
10. Шипачев, В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1994.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители:
Шуман Галина Ивановна
Волгина Ольга Алексеевна
Голодная Наталья Юрьевна
Одияко Наталья Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 2

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 26.09.08. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57