Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

И.В. ПИВОВАРОВА
В.Н. ГЕМБА

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов направления 080700.62 «Бизнес-информатика» и специальности 080116.65 «Математические методы в экономике» вузов регионов

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2009

ББК 22.183.2
П 32

Рецензенты: Т.Р. Кильматов, д-р физ.-мат. наук,
проф. каф. «Финансы и кредит» ТГЭУ

А.А. Степанова, д-р физ.-мат. наук,
проф. каф. алгебры и логики ДВГУ

Пивоварова, И.В., Гемба, В.Н.
П 32 ТЕОРИЯ ИГР: учебное. пособие. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2009. – 88 с.

ISBN 978-5-9736-0122-5

Изложены основные понятия теории игр, приведены методы решения бескоалиционных антагонистических и неантагонистических игр, рассмотрены различные критерии выбора оптимальных стратегий в играх с «природой» и применение их в экономике, даны задачи для самостоятельного решения.

Предназначено студентам специальности 080116.65 «Математические методы в экономике» и направления 080700 «Бизнес-информатика».

ББК 22.183.2

ISBN 978-5-9736-0122-5

ВВЕДЕНИЕ

Рыночная экономика существенно повышает требования к качеству подготовки конкурентоспособных выпускников экономических вузов. В связи с этим особую актуальность приобретает изучение современных методов анализа экономической ситуации и тех разделов математики, на которых этот анализ основан. Одним из таких разделов является теория игр, которая получила особое развитие в результате широкого внедрения информационных технологий.

Математическая теория игр является составной частью исследования операций. Моделями теории игр можно описать экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, поэтому теория игр применяется в различных областях человеческой деятельности, где приходится принимать решения в условиях конфликта.

Курс тесно связан и опирается на такие ранее изученные дисциплины, как линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей, экономико-математические методы и модели.

Учебное пособие «Теория игр» полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта и учебной программе курса «Теория игр» для специальности 080116.65 «Математические методы в экономике» и направления 080700 «Бизнес – информатика».

В пособии изложен необходимый теоретический материал, рассмотрены методы решения бескоалиционных антагонистических и неантагонистических игр, приведены примеры решения типовых задач, даны задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Большое внимание уделено приложениям теории игр в экономике, рассмотрены различные критерии выбора оптимальных стратегий игроков в играх с «природой». Рассмотрены простейшие примеры кооперативных игр. В конце пособия приведены вопросы для самопроверки, которые могут быть использованы при подготовке к экзамену.

Цель пособия – научить студентов принимать оптимальные решения в условиях конфликта, указывать алгоритмы их нахождения и реализовывать эти алгоритмы, активизировать самостоятельную работу студентов.

1. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Классификация игр. Матричные игры

Первые работы по теории игр принадлежат Цермело (1871 – 1953гг., немецкий математик) и Борелю (1871 – 1956 гг., французский математик) и относятся к началу XX века. В 1928 г. фон Нейман (1903 – 1957 гг., американский математик) доказал основную теорему теории игр. Но только широкое распространение компьютерных технологий позволило решать громоздкие игровые задачи и привлекло к теории игр внимание широкого круга специалистов.

Теория игр – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

Под **конфликтами** понимаются ситуации, разрешение которых происходит в условиях различия интересов нескольких участвующих сторон.

Математические модели конфликтных ситуаций называются **играми**, участники конфликта – **игроками**, а решения, которые способны принимать игроки, – **стратегиями**.

Содержание теории игр: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта), доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.

Игры можно классифицировать по различным признакам: стратегические (когда используется мастерство игроков) и чисто случайные (типа рулетки), бескоалиционные и коалиционные (когда участники игры объединяются в коалиции, связанные общими интересами), игры 1, 2, …, n лиц (по числу игроков), конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме (когда игроки уже до начала игры владеют всей необходимой информацией) и динамические (когда информация поступает игрокам в процессе развития игры), с нулевой суммой («антагонистические», когда выигрыш одного игрока равен проигрышу другого) и с ненулевой суммой.

Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц). Такую игру (Γ) называют **матричной**. Она определяется тройкой $\Gamma = (X, Y, K)$, где X – множество стратегий 1-го игрока, Y – множество стратегий 2-го игрока, $K = K(x, y)$ – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию $x \in X$, а 2-й – стратегию $y \in Y$). Пару (*x*, *y*) называют ситуацией в игре *Г*.

Игра интерпретируется следующим образом: игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают стратегии $x \in X$ и $y \in Y$, после этого 1-й игрок (P_1) получает выигрыш, равный $K(x, y)$, а 2-й игрок (P_2) – выигрыш $-K(x, y)$.

Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий: $X = M = \{1, 2, ..., m\}$, $Y = N = \{1, 2, ..., n\}$. Тогда игра *Г* полностью определяется заданием матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$, где $a_{ij} = K(i, j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) *i*, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) *j* (эти стратегии называют **чистыми**).

Матрица *А* называется матрицей игры или платежной матрицей.

Нумерация стратегий выбирается произвольно, поэтому одна и та же игра может быть описана различными матрицами, отличающимися порядком строк или столбцов.

Пример. Игроки P_1, P_2 одновременно называют одно из чисел 1, 2, 3. Если сумма названных чисел окажется четной, выигрывает P_1, если нечетной – выигрывает P_2, при этом выигрыш равен сумме названных чисел. Составить матрицу игры.

Решение. Каждый из игроков имеет по три стратегии: назвать число 1, назвать число 2, назвать число 3. Например, в ситуации (2, 3), то есть когда P_1 назвал 2, а P_2 назвал 3, сумма чисел нечетна и равна 5, поэтому P_2 выигрывает 5 ден. ед., следовательно, соответствующий элемент матрицы $a_{23} = -5$. Рассмотрев все возможные ситуации, составим матрицу игры: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. Максиминные и минимаксные стратегии

Пусть матрица игры $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Цель каждого игрока – получить как можно больший выигрыш. Но 1-му игроку нет смысла выбирать стратегию $i = 1$ в надежде выиграть 5 ед., так как 2-й игрок, действуя разумно, не станет выбирать стратегию $j = 2$, чтобы не проиграть максимальную сумму 5 ед. Игрокам удобнее выбрать «осторожные» стратегии.

Пусть $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – платежная матрица игры $Г$. Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min\limits_j a_{ij}$. Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или максимин, соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max\limits_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, обозначим его $\overline{v}$ – верхняя цена игры, или минимакс, соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left. \begin{matrix} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \cdots \\ \min\limits_j a_{mj} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \ \cdots \ \max_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \overline{v}}$$

Пример. Найти верхнюю и нижнюю цены игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Решение. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{v} = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 6 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \overline{v} = 4$$

Таким образом, нижняя цена игры $\underline{v} = -3$, верхняя цена игры $\overline{v} = 4$, соответствующие стратегии: $i_0 = 1$ (максиминная), $j_0 = 1, 2$ (минимаксные).

Теорема 1. В антагонистической игре $Г$ $\underline{v} \le \overline{v}$.

Доказательство. По определению минимума для любого фиксированного i выполняется неравенство $\min\limits_{j} a_{ij} \le a_{ij}$, тогда $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} \le \max\limits_{i} a_{ij}$, а значит, $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} \le \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$, то есть $\underline{v} \le \overline{v}$.

Замечание. Справедлива теорема в общем виде: если $f(x, y)$ – действительная функция двух переменных, определенная при $x \in X$, $y \in Y$, и существуют $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x, y)$ и $\min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} f(x, y)$, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \le \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

1.3. Ситуации равновесия

В игре *Г* естественно считать оптимальной такую ситуацию (i, j), от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться.

Ситуация (i^*, j^*) называется **ситуацией равновесия**, или **седловой точкой**, если для любых $i \in M$, $j \in N$ выполняется неравенство $a_{ij*} \le a_{i*j*} \le a_{i*j}$, то есть $K(i, j^*) \le K(i^*, j^*) \le K(i^*, j)$. Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число $v = a_{i*j*}$ называется **ценой игры**. Элемент a_{i*j*} является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Игры, в которых существуют ситуации равновесия, называются вполне определенными.

Теорема 2. Для того чтобы матричная игра была вполне определенной, необходимо и достаточно, чтобы $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$. Другими словами, ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} = \overline{v}$ (это значение и является ценой игры *v*).

Доказательство. *Необходимость.* Дано: в игре существует ситуация равновесия. Доказать: $\underline{v} = \overline{v}$.

Пусть (i^*, j^*) – седловая точка матрицы *A*, то есть для любых $i \in M$, $j \in N$ выполняется неравенство $a_{ij*} \le a_{i*j*} \le a_{i*j}$. Тогда $\max\limits_{i} a_{ij*} \le a_{i*j*}$, $a_{i*j*} \le \min\limits_{j} a_{i*j}$, а поскольку $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} \le \max\limits_{i} a_{ij*}$,

$\min\limits_j a_{i^*j} \le \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, получим $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Но по теореме 1 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, следовательно, $\underline{v} = \overline{v} = a_{i^*j^*} = v$.

Достаточность. Дано: $\underline{v} = \overline{v}$. Доказать: в игре существует ситуация равновесия.

Пусть i^* – номер стратегии 1-го игрока, при которой $\min\limits_j a_{ij}$ имеет максимальное значение, а j^* – номер стратегии 2-го игрока, при которой $\max\limits_i a_{ij}$ имеет минимальное значение, то есть (i^*, j^*) – ситуация, при которой $\min\limits_j a_{i^*j} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, $\max\limits_i a_{ij^*} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Покажем, что (i^*, j^*) – седловая точка матрицы *A*. По условию $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \Rightarrow \min\limits_j a_{i^*j} = \max\limits_i a_{ij^*}$. По определению минимума $\min\limits_j a_{i^*j} \le a_{i^*j^*} \Rightarrow \max\limits_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*}$, а из определения максимума следует, что для любого $i \in M \quad a_{ij^*} \le a_{i^*j^*}$. Аналогично доказывается, что для любого $j \in N \quad a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$, а это значит, что (i^*, j^*) – седловая точка.

Пример. Найти седловую точку в игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. $$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & \quad 5 & \quad 4 & \quad 20 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \overline{v} = \underline{v} = 4.$$

Таким образом, $(2,3)$ – ситуация равновесия, $v = 4$ – цена игры, $i^* = 2$, $j^* = 3$ – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-ый игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Платежная матрица игры может иметь несколько седловых точек. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ имеет четыре седловых точки: (3, 2), (3, 5), (5, 2), (5, 5), $v = 6$.

Теорема 3. Если (i, j) и (k, l), $i, k \in M$, $j, l \in N$ – две произвольных ситуации равновесия в антагонистической игре Γ, то $a_{ij} = a_{kl} = a_{il} = a_{kj}$, то есть оптимальные стратегии игроков взаимозаменяемы и цена игры определяется однозначно.

Доказательство. Учитывая, что элемент матрицы, соответствующий седловой точке, является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, получим: $a_{kj} \le a_{ij} \le a_{il}$; $a_{il} \le a_{kl} \le a_{kj}$. Очевидно, что это справедливо лишь при условии $a_{ij} = a_{kl} = a_{il} = a_{kj}$.

$$\begin{matrix} a_{ij} & \dots & a_{il} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{kj} & \dots & a_{kl} \end{matrix}$$

1.4. Смешанные стратегии

Рассмотрим игру Γ_A с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица не имеет седловой точки, следовательно, игра не имеет решения в чистых стратегиях. По виду матрицы можно предположить, что 1-му игроку, так же, как и 2-му, безразлично, какую стратегию выбирать, в любом случае он получит 1 или -1.

С другой стороны, каждому из игроков важно, чтобы соперник не знал о его выборе, иначе он всегда может заставить его заплатить 1, то есть выбор стратегии должен быть случайным.

Если при многократном повторении игры 1-ый игрок будет выбирать стратегии $i = 1$ и $i = 2$ с вероятностями $\frac{1}{2}$, то математическое ожидание его выигрыша при $j = 1$ будет равно $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$, при

$j=2$: $-1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0$. В действительности это единственный вариант, когда 1-ый игрок может не подвергаться риску проигрыша.

В самом деле, пусть вероятность выбора 1-ым игроком стратегии $i=1$ равна *x*, тогда вероятность выбора стратегии $i=2$ равна $1-x$. Математическое ожидание выигрыша

при $j=1$ $K=1\cdot x+(-1)\cdot(1-x)=2x-1$,

при $j=2$ $K=-1\cdot x+1\cdot(1-x)=1-2x$.

Если $x>\frac{1}{2}$, то $K<0$ при $j=2$; если $x<\frac{1}{2}$, то $K<0$ при $j=1$, таким образом, для 1-го игрока, так же, как и для 2-го, оптимальным вариантом игры будет придерживаться стратегий $i=1$ и $i=2$ с одинаковой частотой, то есть с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть игра Γ_A задана матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, при этом 1-ый игрок выбирает стратегии $i=1$, $i=2$ с вероятностями *x*, $1-x$, а 2-ой – стратегии $j=1$, $j=2$ с вероятностями *y*, $1-y$ соответственно. Тогда математическое ожидание выигрыша для 1-го игрока

$$K(x,y)=1\cdot x\cdot y+3x(1-y)+4(1-x)y+2(1-x)(1-y)=-4xy+x+2y+2=$$
$$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}.$$

Если $x=\frac{1}{2}$, то $K=\frac{5}{2}$. 1-ый игрок не может обеспечить выигрыш, больший, чем $\frac{5}{2}$, так как 2-ой игрок, взяв $y=\frac{1}{4}$, не даст ему получить больше. 2-ой игрок может примириться с проигрышем $\frac{5}{2}$ и взять $y=\frac{1}{4}$, в противном случае он может проиграть больше, чем $\frac{5}{2}$. Тогда для любых $x,y\in[0;1]$ выполняется неравенство

$$K\left(x,\frac{1}{4}\right)\le K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\le K\left(\frac{1}{2},y\right),$$

то есть $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ – седловая точка функции $K(x,y)$, а последнее неравенство можно принять за определение оптимальных относительных частот для любой (2×2) – игры Γ_A.

Если $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша 1-го игрока в (2×2) – игре, где 1-ый игрок выбирает стратегии $i=1$, $i=2$ с вероятностями $x,\ 1-x$, а 2-ой игрок – стратегии $j=1$, $j=2$ с вероятностями $y,\ 1-y$ соответственно, то говорят, что x^* – оптимальная вероятность для 1-го игрока, а y^* – оптимальная вероятность для 2-го игрока, если для любых $x,y\in[0;1]$ выполняется неравенство

$$K(x,y^*)\le K(x^*,y^*)\le K(x^*,y).$$

Распространим данное определение на все матричные $(m\times n)$ – игры.

Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, $x_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{m}x_i=1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1,2,...,m$.

Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $y_j\ge 0$, $\sum_{j=1}^{n}y_j=1$.

Множества всех смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков будем обозначать соответственно S_m и S_n.

Чистые стратегии можно рассматривать как частный случай смешанных стратегий. Например, чистую стратегию $j=2$ можно рассматривать как смешанную $y=(0,1,0,...,0)$, чистую стратегию $i=1$ – как смешанную $x=(1,0,...,0)$.

Пару смешанных стратегий (x,y) называют **ситуацией** в смешанных стратегиях.

Существуют различные способы реализации смешанных стратегий, наиболее распространенными из них являются физическая смесь и статистическая смесь.

Физической смесью стратегий называется такая стратегия, в которой одновременно применяются несколько стратегий в определенных пропорциях.

Статистическая смесь стратегий реализуется путем попеременного использования различных чистых стратегий с соответствующими относительными частотами, она осуществима в случае многократного повторения игры.

Функция выигрыша $K(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$: $K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$.

Пример. Найти математическое ожидание выигрыша 1-го игрока в игре с матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, если $x=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, $y=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Решение.

$$K(x,y)=1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6+27+8+6}{20}=\frac{47}{20}.$$

Таким образом, математическое ожидание выигрыша $K(x,y)=\frac{47}{20}$.

Если для некоторых $x^*\in S_m$ и $y^*\in S_n$ и для всех $x\in S_m$ и $y\in S_n$ выполняется неравенство $K(x,y^*)\le K(x^*,y^*)\le K(x^*,y)$, то x^*, y^* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков, число $v=K(x^*,y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x^*,y^*) – **стратегической седловой точкой**, а тройка x^*, y^*, v – **решением игры**.

Если в оптимальной стратегии $x^*=(x_1,x_2,...,x_m)$ $x_k>0$, $k\in M$, то k-я чистая стратегия 1-го игрока называется **активной**, или существенной. Аналогично, если в оптимальной стратегии $y^*=(y_1,y_2,...,y_n)$ $y_l>0$, $l\in N$, то l-я чистая стратегия 2-го игрока называется активной, или существенной.

Теорема 4. Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то ожидаемый выигрыш остается неизменным и равным v независимо от характера действий другого игрока в пределах его активных стратегий.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Прежде чем доказать основную теорему, напомним некоторые определения и докажем лемму.

Точка x называется **предельной точкой** множества X, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества X, отличную от x.

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Множество X называется **ограниченным**, если найдется такое число $M > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in X$ расстояние между ними не превосходит числа M: $d(x_1, x_2) \le M$.

Выпуклой линейной комбинацией точек $x_1, x_2, ..., x_n$ называется точка вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где числа α_i, называемые коэффициентами линейной комбинации, удовлетворяют условиям $\alpha_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Множество X называется **выпуклым**, если любая выпуклая линейная комбинация его точек есть точка множества X.

Выпуклая оболочка множества X – это множество, состоящее из всех точек, являющихся выпуклыми линейными комбинациями точек множества X.

Полупространством называется множество всех точек $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n + b \ge 0$, где $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – числа, причем $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ne 0$.

Лемма. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$. Тогда

1) либо существует элемент $(x_1, x_2, ..., x_m)$ множества S_m, такой, что $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m \ge 0$ для $j = 1, 2, ..., n$,

2) либо существует элемент $(y_1, y_2, ..., y_n)$ множества S_n, такой, что $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n \le 0$ для $i = 1, 2, ..., m$.

Доказательство. Будем использовать дельта – символы Кронекера, которые определяются следующим образом: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \textit{если} \quad i = j. \end{cases}$

Положим

$$\delta^{(1)} = (\delta_{11}, \delta_{21}, \dots, \delta_{m1}),$$

$$\delta^{(2)} = (\delta_{12}, \delta_{22}, \dots, \delta_{m2}),$$

$$\dots$$

$$\delta^{(m)} = (\delta_{1m}, \delta_{2m}, \dots, \delta_{mm}).$$

Тогда $\delta^{(j)}$, где $j = 1, 2, \dots, m$, есть точка пространства E_m, j-я координата которой равна 1, а все другие координаты равны 0. Положим также

$$a^{(1)} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$

$$a^{(2)} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$

$$\dots$$

$$a^{(n)} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}).$$

Таким образом, $a^{(j)}$, где $j = 1, 2, \dots, n$, есть точка, координаты которой– элементы j-го столбца матрицы A.

Пусть C – выпуклая оболочка множества $m + n$ точек $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ и $z = (0, 0, \dots, 0)$ – начало координат пространства E_m. Рассмотрим два случая: $z \in C$ и $z \notin C$.

1) $z \in C$. Тогда z – выпуклая линейная комбинация точек $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$. Следовательно, существует элемент $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n) \in S_{m+n}$ такой, что

$$u_1\delta^{(1)} + u_2\delta^{(2)} + \dots + u_m\delta^{(m)} + v_1a^{(1)} + v_2a^{(2)} + \dots + v_na^{(n)} = z.$$

Тогда $u_1\delta_{i1} + u_2\delta_{i2} + \dots + u_m\delta_{im} + v_1a_{i1} + v_2a_{i2} + \dots + v_na_{in} = 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$, или, как это следует из определения δ – символов,

$$u_i + v_1a_{i1} + v_2a_{i2} + \dots + v_na_{in} = 0, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m. \tag{1}$$

Так как $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n) \in S_{m+n}$, то $u_i \geq 0$, тогда из (1) имеем:

$$v_1a_{i1} + v_2a_{i2} + \dots + v_na_{in} \leq 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, m. \tag{2}$$

Заметим теперь, что

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n > 0, \tag{3}$$

так как иначе, поскольку $v_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$, мы должны иметь $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$, то есть на основании (1) $u_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, что противоречит тому, что $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n) \in S_{m+n}$. Поэтому можно положить

$$y_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + \dots + v_n}, \; y_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + \dots + v_n}, \; \dots, \; y_n = \frac{v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n}. \quad (4)$$

Из (2) и (3): $y_1 a_{i1} + y_2 a_{i2} + \dots + y_n a_{in} \le 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$. Из (4) очевидно, что $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in S_n$. Таким образом, условие (2) леммы выполняется, так что при $z \in C$ лемма справедлива.

2) $z \notin C$. Тогда существует гиперплоскость, содержащая z и такая, что все точки множества C содержатся в одном из соответствующих полупространств. Пусть уравнение этой гиперплоскости $b_1 t_1 + b_2 t_2 + \dots + b_m t_m = b_{m+1}$. Так как z лежит в гиперплоскости, то $b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_m \cdot 0 = b_{m+1}$, тогда $b_{m+1} = 0$, а значит, уравнение гиперплоскости имеет вид $b_1 t_1 + b_2 t_2 + \dots + b_m t_m = 0$. Можно предположить, что координаты любой точки $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in C$ удовлетворяют неравенству

$$b_1 t_1 + b_2 t_2 + \dots + b_m t_m > 0 \quad (5)$$

(в противном случае обе части неравенства можно умножить на –1). Неравенство (5) должно быть справедливо, в частности, для точек $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m)}$ множества C; таким образом,

$$b_1 \delta_{1i} + b_2 \delta_{2i} + \dots + b_m \delta_{mi} > 0, \; i = 1, 2, \dots, m,$$

а это означает, по определению δ – символов, что

$$b_i > 0, \; i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Кроме того, (5) должно быть справедливо для точек $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$; таким образом,

$$b_1 a_{1j} + b_2 a_{2j} + \dots + b_m a_{mj} > 0, \; j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Из (6) очевидно, что $b_1 + b_2 + \dots + b_m > 0$, следовательно, можно записать

$$x_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}, \; x_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}, \; \dots, x_m = \frac{b_m}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}. \quad (8)$$

Из (7), (8) заключаем, что $x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \dots + x_m a_{mj} > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ и тем более

$$x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \dots + x_m a_{mj} \ge 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из (6) и (8) следует, что $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S_m$, а это означает, что условие (1) леммы выполняется. Лемма доказана.

Теорема 5 (основная теорема теории матричных игр, или теорема о минимаксе). Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – некоторая матрица, и пусть математическое ожидание выигрыша $K(x,y)$ для любого $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$ и любого $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$, являющихся соответственно элементами множеств S_m и S_n, определено следующим образом: $K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$. Тогда величины $\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y)$ и $\min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y)$ существуют и равны между собой (эта величина и является ценой игры v).

Доказательство. Для каждого $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ функция $K(x,y)$ есть непрерывная линейная функция от $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$, определенная на замкнутом подмножестве S_m пространства E_n. Следовательно, $\max_{x\in S_m} K(x,y)$ существует для любого $y\in S_n$. Легко убедиться, что $\max_{x\in S_m} K(x,y)$ есть непрерывная кусочно-линейная функция от $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Поскольку S_n есть замкнутое подмножество пространства E_n, то, следовательно, существует $\min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y)$.

Аналогично можно показать, что существует $\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y)$. Если 1-ое условие леммы выполняется, то существует элемент $(x_1, x_2, ..., x_m)\in S_m$ такой, что $a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+...+a_{mj}x_m\ge 0$, $j=1,2,...,n$, и, следовательно, такой, что для любого $y\in S_n$

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+...+a_{mj}x_m)y_j \ge 0\,. \tag{9}$$

Так как (9) справедливо для любого $y\in S_n$, то $\min_{y\in S_n} K(x,y)\ge 0$, и, следовательно,

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y)\ge 0\,. \tag{10}$$

Аналогично заключаем, что если условие (2) леммы выполняется, то

$$\min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y)\le 0\,. \tag{11}$$

Но поскольку выполняется либо условие (1), либо условие (2), то по крайней мере одно из двух неравенств (10) или (11) должно выполняться, следовательно, неравенство

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y) < 0 < \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y) \qquad (12)$$

не может быть справедливо.

Пусть матрица $A_k = \begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12}-k & \dots & a_{1n}-k \\ a_{21}-k & a_{22}-k & \dots & a_{2n}-k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-k & a_{m2}-k & \dots & a_{mn}-k \end{pmatrix}$ получается из матрицы A вычитанием из каждого элемента числа k. И пусть K_k – математическое ожидание выигрыша в игре с матрицей A_k, так что для любых $x \in S_m$ и $y \in S_n$

$$K_k(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-k)x_i y_j \qquad (13)$$

Тогда, точно так же, как мы показали, что неравенство (12) неверно для A, мы можем показать, что неравенство

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K_k(x,y) < 0 < \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K_k(x,y) \qquad (14)$$

неверно для A_k. Но из (13) легко увидеть, что

$$K_k(x,y) = K(x,y) - k, \qquad (15)$$

а из (14) и (15) заключаем, что неверно неравенство

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y) - k < 0 < \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y) - k, \qquad (16)$$

следовательно, неверно неравенство

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y) < k < \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y). \qquad (17)$$

Поскольку (17) неверно для любого k, мы заключаем, что неверно неравенство $\max\limits_{x\in S_m}\min\limits_{y\in S_n} K(x,y) < \min\limits_{y\in S_n}\max\limits_{x\in S_m} K(x,y)$. Следовательно, справедливо неравенство $\max\limits_{x\in S_m}\min\limits_{y\in S_n} K(x,y) \ge \min\limits_{y\in S_n}\max\limits_{x\in S_m} K(x,y)$.

С другой стороны, согласно замечанию к теореме 1, имеем

$$\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} K(x,y) \le \min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} K(x,y),$$

а это означает, что $\max\limits_{x\in S_m}\min\limits_{y\in S_n} K(x,y) = \min\limits_{y\in S_n}\max\limits_{x\in S_m} K(x,y)$, что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что **всякая матричная игра имеет цену**; **игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию**.

3. СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Свойство 1. Пусть $K(x, y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой *v*. Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $y \in S_n$ выполнялось неравенство $v \le K(x^*, y)$. Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in S_m$ выполнялось неравенство $K(x, y^*) \le v$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока. Тогда по основной теореме теории матричных игр найдется элемент $y^* \in S_n$ такой, что (x^*, y^*) – стратегическая седловая точка, то есть для любого $y \in S_n$ выполняется условие $v = K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы (доказать самостоятельно).

Достаточность. Пусть элемент $x^* \in S_m$ такой, что для любого $y \in S_n$ выполняется неравенство $v \le K(x^*, y)$. По основной теореме теории матричных игр существует стратегическая седловая точка (x', y') такая, что для любых $x \in S_m$, $y \in S_n$ выполняется неравенство

$$K(x, y') \le K(x', y') \le K(x', y), \tag{18}$$

где $K(x', y') = v$. Тогда из условия теоремы следует, что

$$K(x', y') \le K(x^*, y) \text{ для любого } y \in S_n \tag{19}$$

Заменяя *y* на y' в (19) и *x* на x^* в (18), получим

$$K(x^*, y') \le K(x', y') \le K(x^*, y') \Rightarrow K(x', y') = K(x^*, y'). \tag{20}$$

Из (18), (19), (20) следует: $K(x, y') \le K(x^*, y') \le K(x^*, y)$, то есть (x^*, y') – седловая точка функции $K(x, y)$, а значит, x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы (доказать самостоятельно).

Свойство 2. Пусть $K(x, y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A, *v* – действительное число, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$. Тогда, для того чтобы *v* было ценой игры, а x^* и y^* были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i \in M$ и $j \in N$ выполнялось неравенство $K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$.

Доказательство. *Необходимость* следует непосредственно из определения седловой точки при замене *x* на *i*, *y* на *j*.
Достаточность. Дано: для любых $i \in M$, $j \in N$ выполняется неравенство $K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$. Тогда для любого $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$

$$\sum_{i=1}^{m} K(i, y^*) x_i \le \sum_{i=1}^{m} v x_i = v \sum_{i=1}^{m} x_i = v \Rightarrow K(x, y^*) \le v. \qquad (21)$$

Аналогично для любого $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$ $v \le K(x^*, y)$. (22)

Из (21), (22), заменяя *x* на x^* и *y* на y^*, получим $K(x^*, y^*) \le v$, $v \le K(x^*, y^*)$, следовательно, $v = K(x^*, y^*)$. (23)

Тогда из (21), (22), (23) заключаем: $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$, то есть (x^*, y^*) – седловая точка, *v* – цена игры.

Свойство 3. Пусть $K(x, y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой *v*. Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \in N$ выполнялось неравенство $v \le K(x^*, j)$. Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in M$ выполнялось неравенство $K(i, y^*) \le v$.

(Свойство 3 является следствием свойства 1).

Свойство 4. Если x^*, y^*, v – решение $(n \times n)$ – игры Γ_A, то

$$\max_i K(i, y^*) = \min_j K(x^*, j) = v.$$

Доказательство. По свойству 3 оптимальных стратегий для любого $j \in N$ выполняется неравенство $v \le K(x^*, j)$, следовательно, $v \le \min_j K(x^*, j)$. Но если $v < \min_j K(x^*, j)$, то для любого $j \in N$ $v < K(x^*, j)$, значит, $\sum_{j=1}^{n} v y_j < \sum_{j=1}^{n} K(x^*, j) y_j^*$, то есть $v < K(x^*, y^*)$, а это противоречит определению цены игры. Следовательно, $v = \min_j K(x^*, j)$.

Аналогично доказывается, что $v = \max_i K(i, y^*)$.

Свойство 5. Пусть $x^* = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$, v – решение игры Γ_A . Тогда для любого $i \in M$, при котором $K(i, y^*) < v$, выполняется равенство $x_i = 0$, а для любого $j \in N$, при котором $v < K(x^*, j)$, выполняется равенство $y_j = 0$.

Доказательство. Предположим противное: допустим, для некоторого i (пусть $i = h$) $K(h, y^*) < v$ и $x_h^* \neq 0$. Тогда $K(h, y^*) \cdot x_h^* < v x_h^*$. Для остальных значений i (i = 1, 2, … , $h-1$, $h+1$, … , m) $K(i, y^*) \leq v$. Умножив обе части каждого неравенства на соответствующее значение x_i^* , получим $K(i, y^*) x_i^* \leq v x_i^*$. Тогда $\sum_{i=1}^{m} K(i, y^*) x_i^* < \sum_{i=1}^{m} v x_i^*$, то есть $K(x^*, y^*) < v$, а это противоречит определению цены игры.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы (доказать самостоятельно).

Свойство 6. (Лемма о масштабе). Если Γ_A – игра с матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A' = (a'_{ij})_{m \times n}$, где $a'_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$, где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$, $\alpha > 0$, то множества оптимальных стратегий игроков в играх Γ_A и $\Gamma_{A'}$ совпадают, а $v_{A'} = \alpha v_A + \beta$. Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

Пример. Проверить, является ли тройка $x = \left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $y = \left(\frac{5}{7}; 0; \frac{2}{7}\right)$, $v = \frac{15}{7}$ решением игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Используем свойство 2 оптимальных стратегий.

$$K(1, y) = 1 \cdot \frac{5}{7} + 0 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{15}{7} = v,$$

$$K(2, y) = 3 \cdot \frac{5}{7} + 6 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{7} = \frac{15}{7} = v,$$

$$K(x, 1) = 1 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{15}{7} = v,$$

$$K(x, 2) = 0 \cdot \frac{3}{7} + 6 \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{7} > v,$$

$$K(x,3) = 5\cdot\frac{3}{7} + 0\cdot\frac{4}{7} = \frac{15}{7} = v\,.$$

Все условия выполняются, следовательно, указанная тройка является решением игры.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для игры Γ_A, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найдите математическое ожидание выигрыша 1-го игрока в ситуациях (1; 3), (3; 2), (2; 1).

2. Найдите $\underline{v}$ и $\overline{v}$ в игре Γ_A:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найдите седловую точку матрицы и решение соответствующей игры:

а) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Могут ли указанные векторы определять смешанные стратегии в матричной игре:

а) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, б) $\left(\frac{3}{11};\frac{6}{11};\frac{2}{11}\right)$,

в) $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};0;\frac{2}{3}\right)$, г) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$?

5. Для игры Γ_A с платежной матрицей A найдите значение $K(x,y)$ в данной ситуации (x,y):

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, $y=\left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$, $y=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right)$, $y=\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5};0;\frac{2}{5}\right)$.

6. Проверьте, является ли тройка x, y, v решением игры Γ_A:

а) $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$, $y=\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$, $v=\frac{17}{5}$.

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\\ 1 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3};0\right)$, $y=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $v=3$.

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0\right)$, $v=\frac{5}{2}$.

г) $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ -7 & 2 & 1\\ 6 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $x=\left(\frac{7}{8};0;\frac{1}{8}\right)$, $y=\left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right)$, $v=\frac{3}{4}$.

7. В игре с матрицей $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ известны оптимальная стратегия 1-го игрока $x^*=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$ и цена игры $v=1$. Найдите оптимальную стратегию 2-го игрока.

8. В игре с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&6&2\\5&1&6\\2&5&1\end{pmatrix}$ известны оптимальная стратегия 2-го игрока $y^*=\left(\frac{1}{2};\frac{4}{9};\frac{1}{18}\right)$ и цена игры $v=\frac{59}{18}$. Найдите оптимальную стратегию 1-го игрока.

9. Известно, что решением игры с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&5\\3&6&0\end{pmatrix}$ является тройка $x^*=\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right)$, $y^*=\left(\frac{5}{7};0;\frac{2}{7}\right)$, $v=\frac{15}{7}$. Проверьте выполнение леммы о масштабе для матриц *B* и *C*, полученных из *A* соответственно при $\alpha=2$, $\beta=-3$ и $\alpha=0{,}5$, $\beta=4{,}5$.

Ответы.

1. 0;5;4.

2. а) 2; 4; б) 6; в) 3; 5.

3. а) (3;2), 3; б) (4;1), 7; в)(3;4), 5; г) (1;2), (1;4), (3;2), (3;4), 5.

4. а,б) да; в,г) нет.

5. а) $\frac{16}{9}$; б) $\frac{13}{6}$; в) 0.

6. а,в,г) да; б) нет.

7. $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

8. $\left(\frac{1}{18};\frac{4}{9};\frac{1}{2}\right)$.

4. (2×2) – ИГРЫ

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платежная матрица игры *Г*. Если она имеет седловую точку – решение найдено. Пусть матрица не имеет седловой точки. Обозначим $x^* = (x_1, x_2)$ и $y^* = (y_1, y_2)$ – оптимальные стратегии игроков, v – цена игры. Тогда должно выполняться равенство $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = v$, или

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = v\,. \qquad (24)$$

Но $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = K(1, y^*) \le v$, $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = K(2, y^*) \le v$. Равенство (24) может выполняться лишь при условии $K(1, y^*) = K(2, y^*) = v$, так как $x_1 + x_2 = 1$.

Аналогично, записав равенство (24) в виде

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) + y_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = v$$

и учитывая, что $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = K(x^*,1) \ge v$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = K(x^*,2) \ge v$, делаем вывод: $K(x^*,1) = K(x^*,2) = v$.

Таким образом, если матрица *A* **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры *Г* можно найти, решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Разрешив системы относительно переменных x_1, x_2, y_1, y_2, v, получим удобные для использования формулы:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \; x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \; (\text{или } x_2 = 1 - x_1);$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \; y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \; (\text{или } y_2 = 1 - y_1);$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,.$$

Записав систему относительно x_1, x_2, v в виде матричного уравнения $x^*A = vJ$, где $J = (1 \;\; 1)$, получим $x^* = vJA^{-1}$, при этом заметим, что $x^*J^T = 1$, тогда $1 = vJA^{-1}J^T$. Следовательно, $v = \dfrac{1}{JA^{-1}J^T}$, $x^* = \dfrac{JA^{-1}}{JA^{-1}J^T}$.

Аналогично, записав систему относительно y_1, y_2, v в виде матричного уравнения $A(y^*)^T = vJ^T$, получим $(y^*)^T = vA^{-1}J^T$, или $(y^*)^T = \dfrac{A^{-1}J^T}{JA^{-1}J^T}$.

Если матрица A вырожденная, то полученные выше формулы можно записать, используя присоединенную матрицу A^*:

$$x^* = \frac{JA^*}{JA^*J^T}, \quad (y^*)^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}, \quad v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, A^* – присоединенная к A матрица, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$, $J = (1 \quad 1)$, $x^* = (x_1 \quad x_2)$, $y^* = (y_1 \quad y_2)$, J^T и $(y^*)^T$ – транспонированные матрицы J и y^*.

Заметим, что элементы матрицы JA^* представляют собой суммы элементов соответствующих столбцов матрицы A^*, элементы матрицы A^*J^T – суммы элементов соответствующих строк матрицы A^*, а матрица JA^*J^T – это число, равное сумме всех элементов матрицы A^*.

Пример. Найти решение игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Заметим, что матрица A не имеет седловой точки.

1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v, \\ 2y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v, \\ -x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Решив системы, получим:

$y_1 = \dfrac{5}{6}$, $y_2 = \dfrac{1}{6}$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $v = \dfrac{7}{3}$, то есть $x^* = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, $y^* = \left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$, $v = \dfrac{7}{3}$ – решение игры.

2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6}; \quad y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}; \quad v = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

3) Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14, \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad JA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$JA^* J^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6, \quad A^* J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Результаты совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения (2×2) – игр с заданными платежными матрицами, сделайте проверку найденных решений:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

16. Каждый из двух игроков подбрасывает монету. Если у обоих игроков выпадет «орел», то второй платит первому 10 руб., если у обоих выпадет «решка», то второй платит первому 5 руб., если монеты выпадут разными сторонами, то первый платит второму 15 руб. Составьте матрицу игры.

17. Предприятие может реализовать в засушливое лето 20 зонтов и 100 шляп, в дождливое лето – 150 зонтов и 50 шляп. Цена реализации зонта 900 руб., шляпы – 200 руб. Затраты на изготовление зонта 300 руб., шляпы – 50 руб. Составьте матрицу доходов предприятия, если две его возможные стратегии – изготовить зонты и шляпы в расчете на за-

сушливое лето, на дождливое лето. В качестве второго игрока рассмотрите «природу» с теми же двумя стратегиями.

Ответы.

1. $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right);\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right);\ \frac{2}{5}$.

2. $\left(\frac{6}{7};\frac{1}{7}\right);\left(\frac{6}{7};\frac{1}{7}\right);\ \frac{43}{7}$.

3. $(0;1);(1;0);4$.

4. $\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right);\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right);\ \frac{8}{3}$.

5. $(0;1);(0;1);5$.

6. $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right);\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right);\ \frac{12}{5}$.

7. $\left(\frac{6}{7};\frac{1}{7}\right);\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right);\ \frac{46}{7}$.

8. $(1;0);(0;1);0$.

9. $\left(\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right);\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right);\ \frac{38}{10}$.

10. $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right);\ \frac{1}{3}$.

11. $(1;0);(1;0);2$.

12. $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{2}$.

5. $(2\times n)$ и $(m\times 2)$ – ИГРЫ. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Метод решения $(2\times n)$ и $(m\times 2)$ – игр, называемый графоаналитическим, рассмотрим на конкретных примерах.

Пусть игра Γ_A задана платежной матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим $x^*=(x, 1-x)$ – оптимальная стратегия 1-го игрока. Тогда для любой чистой стратегии 2-го игрока по свойству 3 оптимальных стратегий должно выполняться неравенство $v\le K(x^*, j)$. Для $j=1, 2, 3, 4$ функция $K(x^*, j)$ имеет вид:

$$K(x^*,1)=2x+4(1-x). \qquad (1)$$

$$K(x^*,2)=3x+1\cdot(1-x); \qquad (2)$$

$$K(x^*,3)=1\cdot x+6\cdot(1-x); \qquad (3)$$

$$K(x^*,4)=5x+0\cdot(1-x),\ x\in[0;1]. \qquad (4)$$

Построим прямые (1), (2), (3), (4) по двум точкам, придавая x значения 0 и 1 (рис.1). Оптимальная стратегия 1-го игрока – его максиминная стратегия, которая соответствует самой высокой точке A выделенной на рис.1 нижней границы. Абсцисса этой точки – искомое значение x, ордината этой точки – значение v.

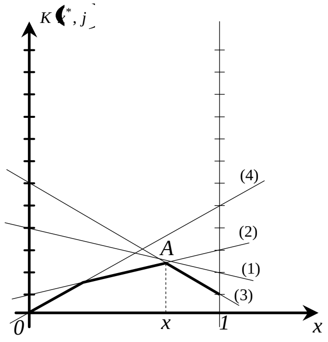


Рис.1

Точка A является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру $A'=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

По формулам решения (2×2) – игры получим:

$$x_1=\frac{6-1}{3+6-1-1}=\frac{5}{7},\ x_2=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7};$$

$$y_1=\frac{6-1}{3+6-1-1}=\frac{5}{7},\ y_2=\frac{2}{7};\ v=\frac{3\cdot 6-1\cdot 1}{3+6-1-1}=\frac{17}{7}.$$

Тогда решение исходной игры имеет вид $x^* = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$, $y^* = \left(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0\right)$ (номерам столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые координаты вектора y^*), $v = \frac{17}{7}$.

Аналогично решаются $(m \times 2)$ – игры.

Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $y^* = (y, 1-y)$ – оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока, 1-ый игрок выбирает чистые стратегии $i = 1, 2, 3$. По свойству 3 оптимальных стратегий должно выполняться неравенство $K(i, y^*) \le v$. Для $i = 1, 2, 3$ функция $K(i, y^*)$ имеет вид:

$$K(1, y^*) = 3y + 2 \cdot (1-y); \qquad (1)$$

$$K(2, y^*) = 1 \cdot y + 5 \cdot (1-y); \qquad (2)$$

$$K(3, y^*) = 4y + 1 \cdot (1-y), \ y \in [0;1]. \qquad (3)$$

Построим прямые (1), (2), (3) по двум точкам, придавая y значения 0 и 1 (рис.2). Оптимальная стратегия 2-го игрока – его минимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке B выделенной на рис.2 верхней границы. Абсцисса этой точки – искомой значение y, ордината точки – значение v.

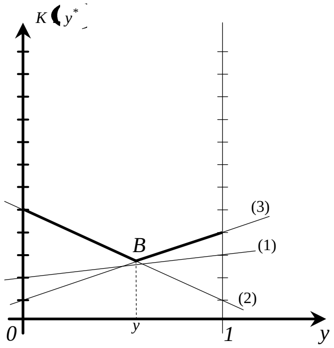


Рис.2

Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$x_1 = \frac{1-4}{1+1-4-5} = \frac{3}{7}, \quad x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7};$$

$$y_1 = \frac{1-5}{1+1-4-5} = \frac{4}{7}, \quad y_2 = \frac{3}{7};$$

$$v = \frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{1+1-4-5} = \frac{19}{7}.$$

Тогда решение исходной игры: $x^* = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$, $v = \frac{19}{7}$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть платежная матрица игры $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Построим соответствующие прямые (1), (2), (3) (рис.3).

На выделенной нижней границе есть горизонтальный участок *AB*, все точки которого имеют одну и ту же (максимальную) ординату.

A – точка пересечения прямых (2) и (3), ее абсциссу найдем, решая игру

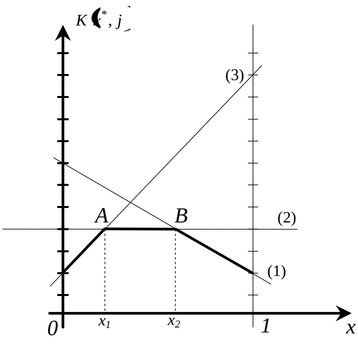


Рис.3

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{2-4}{4+2-4-11} = \frac{2}{9}.$$

B – точка пересечения прямых (1) и (2), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{4-7}{2+4-7-4} = \frac{3}{5}.$$

Решение исходной игры:

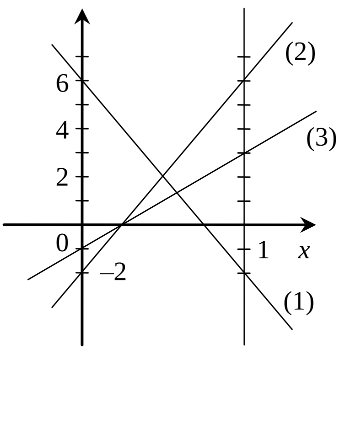
$x^* = (x, 1-x)$, где $x \in \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{5}\right]$,

$y^* = (0;1;0)$, $v = 4$, то есть 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий, 2-й игрок – единственную оптимальную стратегию, это чистая стратегия $j = 2$ (только она участвует в образовании отрезка *AB*), цена игры *v* – ордината точек отрезка *AB*. Значения *v* и y^* можно было получить также, используя формулы решения (2×2) –игр для матрицы A' или A'' (проверьте!).

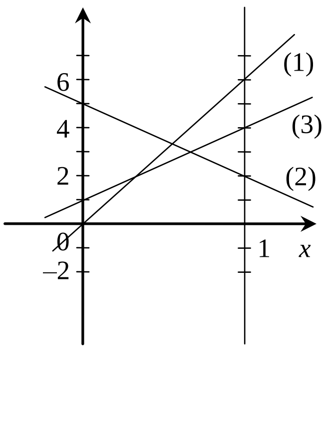
Задачи для самостоятельного решения

В заданиях 1 – 6 найдите решения игры по графической интерпретации задачи.

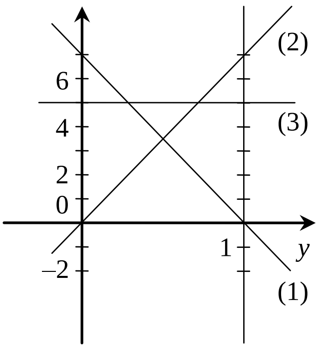
1.



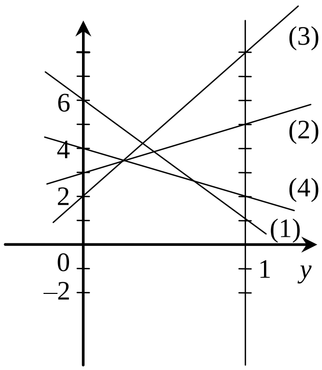
2.



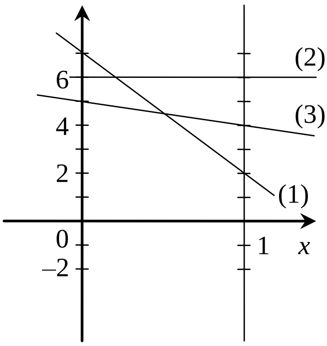
3.



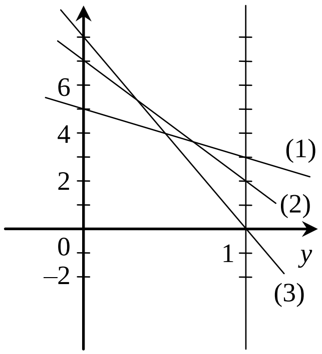
4.



5.



6.



В заданиях 7 – 24 найдите решения $(2\times n)$ и $(n\times 2)$ – игр с указанными платежными матрицами.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \\ 7 & 7 \\ 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 10 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 6 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 1 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Ответы.

1. $x^* = \left(\frac{7}{12}; \frac{5}{12}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right),\ v = \frac{4}{3}$.

2. $x^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),\ y^* = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),\ v = 3$.

3. $x^* = (0; 0; 1),\ y^* = (y, 1 - y),\ y \in \left[\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right],\ v = 5$.

4. $x^* = \left(\frac{6}{11}; 0; \frac{5}{11}; 0\right),\ y^* = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}\right),\ v = \frac{46}{11}$.

5. $x^* = (0; 1),\ y^* = (0; 0; 1),\ v = 5$.

6. $x^* = (1; 0; 0),\ y^* = (1; 0),\ v = 3$.

7. $x^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right),\ v = \frac{5}{3}$.

8. $x^* = (x, 1 - x),\ x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{4}{7}\right],\ y^* = (0; 1; 0),\ v = 3$.

9. $x^* = (1; 0),\ y^* = (0; 0; 1; 0),\ v = 2$.

10. $x^* = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{5}{7}; 0; \frac{2}{7}; 0\right)$, $v = \frac{15}{7}$.

11. $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $v = \frac{3}{2}$

12. $x^* = (x, 1-x)$, $x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{7}{9}\right]$, $y^* = (1; 0; 0)$, $v = 2$.

13. $x^* = (0; 1)$, $y^* = (0; 1; 0; 0)$, $v = 3$.

14. $x^* = (x, 1-x)$, $x \in \left[\frac{1}{6}; 1\right]$, $y^* = (0; 1; 0)$, $v = -1$.

15. $x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $y^* = \left(\frac{7}{9}; 0; \frac{2}{9}; 0\right)$, $v = \frac{10}{3}$.

16. $x^* = (1; 0; 0; 0)$, $y^* = (0; 1)$, $v = 3$.

17. $x^* = \left(\frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5}; 0\right)$, $y^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $v = \frac{28}{5}$.

18. $x^* = (0; 0; 1)$, $y^* = (y, 1-y)$, $y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $v = 3$.

19. $x^* = \left(0; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $v = \frac{7}{2}$.

20. $x^* = (0; 0; 1; 0; 0)$, $y^* = (y, 1-y)$, $y \in \left[\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]$, $v = 7$.

21. $x^* = \left(0; 0; \frac{5}{13}; \frac{8}{13}\right)$, $y^* = \left(\frac{7}{13}; \frac{6}{13}\right)$, $v = \frac{82}{13}$.

22. $x^* = (0; 0; 0; 1)$, $y^* = (1; 0)$, $v = 6$.

23. $x^* = (0; 0; 1; 0)$, $y^* = (y, 1-y)$, $y \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$, $v = 6$.

24. $x^* = \left(\frac{6}{17}; \frac{11}{17}; 0\right)$, $y^* = \left(\frac{7}{17}; \frac{10}{17}\right)$, $v = \frac{77}{17}$.

6. ДОМИНИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ

Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Например, в игре с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1-му игроку не стоит выбирать стратегию $i = 3$, лучше выбрать $i = 2$ (какую бы стратегию ни выбрал 2-ой игрок), а 2-ому игроку не стоит выбирать $j = 3$, лучше выбрать $j = 1$ (почему?). В результате вместо игры Γ_A с матрицей A можно рассмотреть игру $\Gamma_{A'}$ с матрицей $A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. Легко найти решение игры $\Gamma_{A'}$: $x^*_{A'} = \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{11}\right)$, $y^*_{A'} = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}\right)$, $v_{A'} = \frac{53}{11}$. Можно предположить, что решение игры Γ_A будет иметь вид: $x^*_A = \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{11}; 0\right)$, $y^*_A = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}; 0\right)$, $v_A = \frac{53}{11}$.

Говорят, что *i*-я стратегия 1-го игрока доминирует его *k*-ю стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \in N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$. В этом случае говорят также, что *i*-я стратегия (или строка) – доминирующая, *k*-я – доминируемая.

Говорят, что *j*-я стратегия 2-го игрока доминирует его *l*-ю стратегию, если для всех $i \in M$ $a_{ij} \leq a_{il}$ и хотя бы для одного i $a_{ij} < a_{il}$. В этом случае *j*-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, *l*-ю – доминируемой.

В предыдущем примере 2-я стратегия 1-го игрока доминирует его 3-ю стратегию, 1-я стратегия 2-го игрока доминирует его 3-ю стратегию. Доминируемые стратегии исключаются из матрицы игры.

Стратегия может доминироваться также выпуклой линейной комбинацией других стратегий. Так, *i*-я стратегия 1-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \leq \sum\limits_{k \neq i} \alpha_k a_{kj}$, где $\alpha_k \geq 0$, $\sum\limits_{k \neq i} \alpha_k = 1$; *j*-я стратегия 2-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \geq \sum\limits_{l \neq j} \alpha_l a_{il}$, где $\alpha_l \geq 0$, $\sum\limits_{l \neq j} \alpha_l = 1$.

Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 3-я строка строго доминируется выпуклой линейной комбинацией 1-ой и 2-ой строк с коэффициентами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$: $a_3 < \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{4}a_2$ (проверьте!), поэтому вместо игры $Г_A$ можно рассмотреть игру $Г_{A'}$, $A' = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Найдя ее решение, получим решение игры $Г_A$: $x^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, $v = 6$. Если решить игру графоаналитическим методом, можно убедиться в том, что стратегия 1-го игрока $i = 3$ не участвует в образовании его оптимальной стратегии, то есть не является активной.

Если $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in S_k$ – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на i-ом месте будем называть стратегию вида $\overline{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_k) \in S_{k+1}$.

Теорема 6. Пусть $Г_A$ – $(m \times n)$ – игра, в которой i-я строка доминируема, $Г_{A'}$ – игра с матрицей A', полученной из A вычеркиванием i-ой строки. Тогда

1) $v_A = v_{A'}$;

2) всякая оптимальная стратегия 2-го игрока в игре $Г_{A'}$ является оптимальной и в игре $Г_A$;

3) если x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре $Г_{A'}$, то $\overline{x_i^*}$ – его оптимальная стратегия в игре $Г_A$;

4) если i-я строка строго доминируема, то любая оптимальная стратегия 1-го игрока в игре $Г_A$ может быть получена из некоторой его оптимальной стратегии в игре $Г_{A'}$ расширением на i-м месте.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$. Не нарушая общности, можно предполагать, что m-я строка доминируема выпуклой линейной комбинацией остальных строк:

$$a_{mj} \le \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i a_{ij}\,,\ \ j=\overline{1,n}\,,\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i = 1. \qquad (25)$$

Пусть v – цена игры $\Gamma_{A'}$, $x^* = (x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ и $y^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков в игре $\Gamma_{A'}$. Тогда по свойству 2 для любых $i,\ j$ выполняются неравенства $K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$, то есть

$$K(i, y^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le v,\ \ i = \overline{1, m-1}\,; \qquad (26)$$

$$v \le K(x^*, j) = \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} x_i,\ \ j=\overline{1,n}\,. \qquad (27)$$

Требуется доказать, что v – цена игры Γ_A, y^* – оптимальная стратегия 2-го игрока в игре Γ_A, $\overline{x_m^*} = (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0)$ – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре Γ_A, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le v,\ \ i=\overline{1,m}\,; \qquad (26а)$$

$$v \le \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} x_i + a_{mj}\cdot 0,\ \ j=\overline{1,n}\,. \qquad (27а)$$

Из (27) следует, что (27а) выполняется. Из (26) следует, что (26а) выполняется для всех $i=\overline{1,m-1}$. Докажем выполнение (26а) для $i=m$. $\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\alpha_i y_j = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \alpha_i \le \sum_{i=1}^{m-1} v\alpha_i = v\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i = v$. Таким образом, пункты (1), (2), (3) теоремы доказаны.

Докажем пункт (4). Пусть m-я строка матрицы A строго доминируема, то есть все неравенства в (25) строгие. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j < \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\alpha_i y_j \le v$. Из свойства 5 оптимальных стратегий следует: если $K(m, y^*) < v$, то m-я координата вектора x^* равна 0, то есть $x_A^* = (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0)$ – у всякой оптимальной стратегии 1-го игрока в игре Γ_A m-я координата равна 0.

Замечания. 1. Аналогичная теорема имеет место для доминируемого столбца.

2. Если доминирование не строгое, при таком методе решения могут «потеряться» некоторые оптимальные стратегии первоначальной игры.

Например, в игре с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 1-я строка и 1-й столбец доминируются выпуклой линейной комбинацией двух других строк (столбцов) с коэффициентами $\frac{1}{2}$. Легко убедиться в том, что любой вектор вида $x = (a, b, b)$, где $a, b \geq 0$, $a + b + b = 1$, является оптимальной стратегией 1-го игрока. С другой стороны, если вычеркнуть доминируемые строку и столбец, то по матрице $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ определяется единственная оптимальная стратегия 1-го игрока $x^* = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения матричных игр, исключив доминируемые стратегии:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 10 & 11 & 6 \\ 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 24 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ответы.

1. $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), 6$.

2. $\left(0;\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0;0\right), \frac{19}{4}$.

3. $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), 8$.

4. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), \left(0;0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), 2$.

5. $\left(\frac{5}{11};0;0;\frac{6}{11}\right), \left(\frac{3}{11};\frac{8}{11};0\right), \frac{59}{11}$.

6. $\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right), \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0;0\right), \frac{17}{7}$.

7. $\left(\frac{5}{6};0;\frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6};\frac{5}{6};0;0;0\right), \frac{17}{6}$.

8. $\left(\frac{5}{6};0;\frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6};0;\frac{5}{6}\right), \frac{11}{6}$.

9. $\left(0;\frac{3}{4};\frac{1}{4}0;0\right), \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), \frac{7}{2}$.

10. $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};0\right), \left(\frac{1}{4};0;0;\frac{3}{4};0\right), 6$.

11. $\left(0;\frac{4}{5};\frac{1}{5};0\right), \left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right), \frac{8}{5}$.

12. $\left(\frac{1}{2};0;0;\frac{1}{2}\right), \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \frac{5}{2}$.

13. $\left(0;\frac{6}{7};\frac{1}{7};0;0\right), \left(0;0;\frac{4}{7};\frac{3}{7};0;0\right), \frac{13}{7}$.

14. $\left(0;\frac{2}{7};\frac{5}{7};0;0\right), \left(0;0;\frac{4}{7};\frac{3}{7};0;0\right), \frac{29}{7}$.

7. МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Можно доказать, что множества оптимальных стратегий 1-го и 2-го игроков (T_1 и T_2) – непустые ограниченные выпуклые и замкнутые подмножества соответственно m-мерного и n-мерного пространств. Из выпуклости следует, что если T_1 (T_2) имеет более одного элемента, то оно имеет бесконечное число элементов, то есть матричная игра имеет либо только одно, либо бесконечное множество решений.

Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей A, нужно рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы A. Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры $Г_A$. Множество всех решений каждого игрока является выпуклой линейной комбинацией найденных решений.

Решение игры, заданной **квадратной** подматрицей B, можно найти в матричном виде по формулам $v = \dfrac{|B|}{JB^* J^T}$, $x = \dfrac{JB^*}{JB^* J^T}$, $y^T = \dfrac{B^* J^T}{JB^* J^T}$.

Пример. Найти множество всех решений игры $Г_A$ с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Подматрицы (1×1) не дадут решений, так как матрица A не имеет седловых точек.

Рассмотрим подматрицы (2×2):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для B: $v_B = 1$, $x_B = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y_B = (0;1) \Rightarrow$ $v_A = 1$, $x_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y_A = (0;1;0)$ – является решением игры $Г_A$ (убеждаемся в этом проверкой).

Для C: $v_C = 1$, $x_C = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y_C = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ $v_A = 1$, $x_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y_A = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ – является решением игры $Г_A$.

Для D получим такое же решение, как для B.

Таким образом, в игре $Г_A$ 1-й игрок имеет единственную оптимальную стратегию $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, 2-й игрок имеет множество оптимальных стратегий $y^* = \alpha_1(0;1;0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2;\alpha_1;\frac{1}{2}\alpha_2\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, цена игры $v = 1$.

Пример. Найти множество всех решений игры Γ_A с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Среди подматриц 1-го порядка решений не находим, так как седловых точек в матрице нет.

Рассмотрим подматрицы 2-го порядка. Их девять:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Индексы соответствуют номерам строк и столбцов, исключенных из матрицы *A*, по матрицам B_{ij} будет удобно находить алгебраические дополнения элементов матрицы *A* для составления присоединенной матрицы A^*.

Найдем решения игр с платежными матрицами B_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, составим соответствующие расширения полученных стратегий и проверим, являются ли найденные стратегии игроков оптимальными в игре Γ_A.

Для игры с матрицей B_{11}:

$v = 3$, $x^* = (2;-1) \notin S_2$ – вектор не является смешанной стратегией, $y^* = (1;0)$, $\overline{y^*} = (0;1;0)$ – в соответствии со свойством 3 оптимальных стратегий не можем проверить оптимальность полученной стратегии, пока не знаем цену игры с матрицей *A*.

Для игры с матрицей B_{12}:

$v = \frac{8}{3}$, $x^* = \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right) \notin S_2$ – вектор не является смешанной стратегией, $y^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\overline{y^*} = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{2}\right)$ – проверку сделать пока не можем.

Для игры с матрицей B_{13}:

$v = 3$, $x^* = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \notin S_2$, $y^* = (0;1)$, $\overline{y^*} = (0;1;0)$ – проверку сделать пока не можем.

Для игры с матрицей B_{21}:

$v = 3$, $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overline{x^*} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $y^* = (1;0)$, $\overline{y^*} = (0;1;0)$.

Проверим, является ли полученная тройка $\overline{x^*}$, $\overline{y^*}$, v решением игры Γ_A, используя свойство 2 оптимальных стратегий.

$$K\left(1, \overline{y^*}\right) = 3 = v, \qquad K\left(\overline{x^*}, 1\right) = \frac{2+0+6}{2} = 4 > v,$$

$$K\left(2, \overline{y^*}\right) = 3 = v, \qquad K\left(\overline{x^*}, 2\right) = \frac{3+0+3}{2} = 3 = v,$$

$$K\left(3, \overline{y^*}\right) = 3 = v, \qquad K\left(\overline{x^*}, 3\right) = \frac{5+0+1}{2} = 3 = v.$$

Найденная тройка является решением игры.

Заметим, что в играх с матрицами B_{11} и B_{13} вектор $\overline{y^*}$ являлся оптимальной стратегией, а в игре с матрицей B_{12} не являлся, так как число $\frac{8}{3}$ не является ценой игры, а она определяется однозначно.

Для игры с матрицей B_{22}:

$v = \frac{7}{2}$ – не совпадает с ценой игры, решения игры Γ_A не получим.

Для игры с матрицей B_{23}:

$v = 3$ – является ценой игры, $x^* = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $\overline{x^*} = \left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{4}\right)$, $y^* = (0;1)$, $\overline{y^*} = (0;1;0)$ – эта стратегия уже найдена. Проверим оптимальность $\overline{x^*}$:

$$K\left(\overline{x^*},1\right)=\frac{6+0+6}{4}=3=v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},2\right)=\frac{9+0+3}{4}=3=v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},3\right)=\frac{15+0+1}{4}=4>v\,,$$

следовательно, $\overline{x^*}$ – оптимальная стратегия.

Для игры с матрицей B_{31}:

$v=3$ – является ценой игры, $x^*=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\overline{x^*}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$, $y^*=(1;0)$, $\overline{y^*}=(0;1;0)$ – эта стратегия уже найдена. Проверим оптимальность $\overline{x^*}$:

$$K\left(\overline{x^*},1\right)=\frac{2+8+0}{3}=\frac{10}{3}>v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},2\right)=\frac{3+6+0}{3}=3=v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},3\right)=\frac{5+4+0}{3}=3=v\,,$$

следовательно, стратегия $\overline{x^*}$ является оптимальной.

Для игры с матрицей B_{32}:

$v=\frac{16}{5}$ – не совпадает с ценой игры, решений игры Γ_A не получим.

Для игры с матрицей B_{33}:

$v=3$ – является ценой игры, $x^*=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overline{x^*}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $y^*=(0;1)$, $\overline{y^*}=(0;1;0)$ – эта стратегия уже найдена. Проверим оптимальность $\overline{x^*}$:

$$K\left(\overline{x^*},1\right)=\frac{2+4}{2}=3=v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},2\right)=\frac{3+3}{2}=3=v\,,$$

$$K\left(\overline{x^*},3\right)=\frac{5+2}{2}=\frac{7}{2}>v\,,$$

следовательно, $\overline{x^*}$ – оптимальная стратегия.

Осталось рассмотреть матрицу A. Найдем алгебраические дополнения ее элементов.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -28, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Составим присоединенную матрицу. $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 12 & -9 \\ 8 & -28 & 16 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

$|A| = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 + 5 \cdot (-6) = -6 + 24 - 30 = -12$, $JA^* J^T = -4$, $v = 3$ – является ценой игры, следовательно, $JA^* = (-1 \ \ -4 \ \ 1)$, $A^* J^T = (0 \ \ -4 \ \ 0)$, $x^* = \left(\frac{1}{4}; 1; -\frac{1}{4}\right) \notin S_3$, $y^* = (0;1;0)$ – найдено выше.

Таким образом, в игре Γ_A 2-ой игрок имеет единственную оптимальную стратегию $y^* = (0;1;0)$, это его чистая стратегия $j = 2$, для 1-го игрока найдены четыре оптимальных стратегии $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, а значит, выпуклая линейная комбинация этих стратегий определяет множество оптимальных стратегий 1-го игрока:

$$x^* = \alpha_1\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{4}\right) + \alpha_3\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right) + \alpha_4\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right),$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$, цена игры $v = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите множество всех решений игр с заданными платежными матрицами:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответы.

4. $x^* = \alpha_1\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) + \alpha_2(0;1;0),\ y^* = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right),\ v = 3$.

5. $x^* = \left(0;\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right) + \alpha_2\left(\frac{5}{8};0;\frac{3}{8}\right),\ v = \frac{23}{8}$.

6. $x^* = (0;1;0),\ y^* = \alpha_1(0;0;1) + \alpha_2\left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right) + \alpha_3\left(0;\frac{9}{16};\frac{7}{16}\right),\ v = 4$.

7. $x^* = \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7};0\right) + \alpha_2\left(\frac{3}{7};\frac{1}{14};\frac{1}{2}\right),\ v = \frac{22}{7}$.

8. $x^* = \left(\frac{1}{13};\frac{5}{13};\frac{7}{13}\right),\ y^* = \left(\frac{4}{13};\frac{3}{13};\frac{6}{13}\right),\ v = \frac{15}{13}$.

9. $x^* = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\ y^* = \alpha_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;0\right) + \alpha_2\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) + \alpha_3(0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}),\ v = \frac{1}{2}$.

8. СВЕДЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть матрица игры имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $K = K(x, y)$ – функция выигрыша, $v \in R$, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$ – решение игры.

Тогда по свойству 2 оптимальных стратегий для любых чистых стратегий $i \in M$ 1-го игрока должно выполняться неравенство $K(i, y^*) \le v$, а для любых чистых стратегий $j \in N$ 2-го игрока – неравенство $v \le K(x^*, j)$. Это равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \le v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \le v, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + \dots + a_{3n}y_n \le v, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \le v, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, \\ y_j \ge 0, \ j = 1,2,\dots,n. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge v, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \dots + a_{m3}x_m \ge v, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge v, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Разделив все уравнения и неравенства обеих систем на v, обозначим $\frac{x_i}{v} = p_i$, $\frac{y_j}{v} = q_j$. Заметим, что цена игры v при этом должна быть положительна, в противном случае нужно предварительно к матрице A применить лемму о масштабе. Учитывая, что цель 1-го игрока – максимизировать, а цель 2-го – минимизировать величину v, приходим к двойственной задаче линейного программирования с целевой функцией $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \le 1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \le 1, \\ q_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge 1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,...,m; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = \frac{1}{v} \to \max \qquad p_1 + p_2 + ... + p_m = \frac{1}{v} \to \min$$

Решив задачу симплексным методом и вернувшись к переменным x_i, y_j, получим решение матричной игры.

Пример. Найти решение игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Перейдем к положительной матрице, прибавив 3 ко всем элементам матрицы A: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Составим двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \le 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \le 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \le 1, \\ q_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \ge 1, \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,3; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max \qquad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{v} \to \min$$

Решим задачу симплексным методом.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 + q_4 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_5 = 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_6 = 1, \\ q_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max$$

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
1-я итерация	q_4	0	1	1	1	3	1	0	0
	q_5	0	1	1	3	2	0	1	0
	q_6	0	1	3	2	2	0	0	1
			0	-1^{*}	-1	-1	0	0	0
2-я итерация	q_4	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$
	q_5	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$
	q_1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
			$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}^{*}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
3-я итерация	q_4	0	$\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{15}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$
	q_2	1	$\frac{2}{7}$	0	1	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$
	q_1	1	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
			$\frac{3}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}^{*}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
4-я итерация	q_3	1	$\frac{4}{15}$	0	0	1	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$
	q_2	1	$\frac{2}{15}$	0	1	0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{15}$
	q_1	1	$\frac{1}{15}$	1	0	0	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$
			$\frac{7}{15}$	0	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

Получаем решение двойственной задачи: $p=\left(\frac{1}{15};\frac{2}{15};\frac{4}{15}\right)$, $q=\left(\frac{1}{15};\frac{2}{15};\frac{4}{15}\right)$, $\frac{1}{v}=\frac{7}{15}$.

Тогда решение игры с матрицей A': $x' = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $y' = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $v = \frac{15}{7}$.

Решение исходной игры: $x^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$, $v = -\frac{6}{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решение матричной игры, сведя ее к двойственной задаче линейного программирования:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответы.

1. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\frac{2}{3}$.

2. $\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{2}{7}\right),\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{2}{7}\right),\frac{8}{7}$.

3. $\left(0;\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right),\left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4}\right),\frac{3}{4}$.

4. $\left(0;\frac{1}{10};\frac{9}{10}\right),\left(\frac{3}{5};0;\frac{2}{5}\right),-\frac{2}{5}$.

5. $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5};0\right),\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right),-\frac{3}{5}$.

6. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),0$.

7. $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right),\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{2};0\right),\frac{13}{4}$.

8. $\left(\frac{10}{42};\frac{9}{42};\frac{23}{42}\right),\left(0;\frac{5}{14};\frac{8}{14};\frac{1}{14}\right),\frac{55}{14}$.

9. $\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right),\left(0;\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5};0\right),\frac{9}{5}$.

10. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),0$.

11. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right),0$.

12. $\left(0;0;\frac{13}{15};\frac{2}{15}\right),\left(\frac{1}{5};0;\frac{4}{5}\right),\frac{17}{5}$.

13. $\left(\frac{11}{20};\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{2}{5};\frac{7}{20};\frac{1}{4}\right),\frac{37}{20}$.

14. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),0$.

15. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{12};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right),\frac{5}{6}$.

9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР

Для матриц большой размерности применение методов линейного программирования приводит к громоздким вычислениям, поэтому удобнее использовать приближенные методы решения. Одним из таких методов является итеративный метод Брауна-Робинсона, или метод фиктивного разыгрывания. Идея метода – многократное фиктивное разыгрывание игры. В первой партии каждый игрок выбирает произвольную чистую стратегию, в k-ой партии каждый выбирает ту стратегию, которая принесла максимальный суммарный выигрыш (для первого игрока) или минимальный суммарный проигрыш (для второго игрока) в (k-1)-ой партии.

Можно доказать, что $\max\limits_k \frac{\underline{v_k}}{k} \le v \le \min\limits_k \frac{\overline{v_k}}{k}$, где v – цена игры, k– номер партии, $\overline{v_k}$ – максимальное значение суммарного выигрыша 1-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий, $\underline{v_k}$ – минимальное значение суммарного проигрыша 2-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий.

За приближенные оптимальные стратегии игроков принимают векторы, координатами которых являются относительные частоты выбора соответствующих чистых стратегий.

Преимущество метода – его простота, недостаток – малая скорость сходимости вследствие немонотонности последовательностей $\overline{v_k}$ и $\underline{v_k}$.

Пример. Найти приближенное решение игры, заданной матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

Решение. Обозначим чистые стратегии 1-го игрока a, b, c, 2-го игрока – α, β, γ. Пусть в первой партии игроки выбрали стратегии a и α.

Первый игрок при выборе вторым стратегии α получит 2, 3 или 1, если выберет стратегии a, b, c соответственно. Второй игрок при выборе первым стратегии a проиграет 2, 1 или 3, если выберет стратегии α, β, γ соответственно (заполнена первая строка таблицы). Первый игрок получит максимальный выигрыш при выборе стратегии b и во второй партии выберет именно эту стратегию. Второй игрок проигрывает минимальную сумму при выборе стратегии β, поэтому во второй партии выбирает ее.

При выборе вторым игроком стратегии β во второй партии первый игрок добавляет к своему выигрышу соответственно 1, 0 или 2, и его суммарный выигрыш становится равным 3, 3, 3, значит, в третьей партии он может выбрать любую из своих стратегий, например, снова *b*. При выборе первым игроком во второй партии стратегии *b* второй игрок добавляет к своему проигрышу 3, 0 или 1, и его суммарный проигрыш становится равным 5, 1, 4, наименьший проигрыш равен 1, он получен при использовании стратегии β, значит, в третьей партии он выберет стратегию β (заполнена вторая строка таблицы).

Игроки переходят к третьей партии и т. д. Результаты двенадцати партий игры занесены в таблицу.

№ партии k	выбор 1-го игрока	выбор 2-го игрока	суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{\overline{v}_k}{k}$	$\frac{\underline{v}_k}{k}$
			a	*b*	*c*	α	β	γ		
1	*a*	α	2	3	1	2	1	3	3	1
2	*b*	β	3	3	3	5	1	4	$\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{1}{2}=0,5$
3	*b*	β	4	3	5	8	1	5	$\frac{5}{3}\approx 1,667$	$\frac{1}{3}\approx 0,333$
4	*c*	β	5	3	7	9	3	6	$\frac{7}{4}=1,75$	$\frac{3}{4}=0,75$
5	*c*	β	6	3	9	10	5	7	$\frac{9}{5}=1,8$	$\frac{5}{5}=1$
6	*c*	β	7	3	11	11	7	8	1,833	1,167
7	*c*	β	8	3	13	12	9	9	1,857	1,286
8	*c*	γ	11	4	14	13	11	10	1,75	1,25
9	*c*	γ	14	5	15	14	13	11	1,667	1,222
10	*c*	γ	17	6	16	15	15	12	1,7	1,2
11	*a*	γ	20	7	17	17	16	15	1,818	1,364
12	*a*	γ	23	8	18	19	17	18	1,917	1,417

$\max\limits_k \dfrac{\underline{v_k}}{k} = 1{,}417$; $\min\limits_k \dfrac{\overline{v_k}}{k} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 1{,}417 \le v \le 1{,}5$. Приближенное решение игры за 12 партий: $v = 1{,}45$, $x_{12}^* = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{7}{12}\right)$, $y_{12}^* = \left(\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{12}\right)$.

Замечание. Если максимальные значения суммарного выигрыша или минимальные значения суммарного проигрыша при выборе различных стратегий в некоторой партии совпадают (например, во 2-ой партии для 1-го игрока), то игрок может выбрать любую из стратегий.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите приближенное решение игры, заданной матрицей A.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ответы.

1. $\left\langle \left(\dfrac{11}{35}, \dfrac{9}{35}, \dfrac{15}{35}\right), \left(\dfrac{8}{35}, \dfrac{14}{35}, \dfrac{13}{35}\right), \dfrac{108}{35} \right\rangle$.

2. $\left\langle \left(\frac{15}{74},\frac{19}{74},\frac{40}{74}\right),\left(\frac{24}{74},\frac{35}{74},\frac{15}{74}\right),\frac{297}{74}\right\rangle$.

3. $\left\langle \left(\frac{18}{45},\frac{5}{45},\frac{22}{45}\right),\left(\frac{25}{45},\frac{9}{45},\frac{11}{45}\right),\frac{142}{45}\right\rangle$.

4. $\left\langle \left(\frac{21}{56},\frac{19}{56},\frac{16}{56}\right),\left(\frac{16}{56},\frac{31}{56},\frac{9}{56}\right),\frac{67}{56}\right\rangle$.

5. $\left\langle \left(\frac{1}{18},\frac{8}{18},\frac{9}{18}\right),\left(\frac{9}{18},\frac{8}{18},\frac{1}{18},0\right),\frac{59}{18}\right\rangle$.

6. $\left\langle \left(\frac{7}{13},\frac{5}{13},\frac{1}{13}\right),\left(0,\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{6}{13}\right),\frac{15}{13}\right\rangle$.

7. $\left\langle \left(\frac{10}{42},\frac{9}{42},\frac{23}{42}\right),\left(0,\frac{5}{14},\frac{8}{14},\frac{1}{14}\right),\frac{55}{14}\right\rangle$.

8. $\left\langle \left(0,0,\frac{13}{15},\frac{2}{15}\right),\left(\frac{1}{5},0,\frac{4}{5}\right),\frac{17}{5}\right\rangle$.

9. $\left\langle \left(\frac{76}{335},\frac{92}{335},\frac{78}{335},\frac{89}{335}\right),\left(\frac{61}{335},\frac{72}{335},\frac{161}{335},\frac{41}{335}\right),\frac{688}{335}\right\rangle$.

10. $\left\langle \left(\frac{109}{526},\frac{130}{526},\frac{11}{526},\frac{276}{526}\right),\left(\frac{132}{526},\frac{235}{526},\frac{68}{526},\frac{91}{526}\right),\frac{2101}{526}\right\rangle$.

11. $\left\langle \left(\frac{28}{142},\frac{33}{142},\frac{31}{142},\frac{21}{142},\frac{29}{142}\right),\left(\frac{4}{142},\frac{35}{142},\frac{6}{142},\frac{57}{142},\frac{40}{142}\right),\frac{149}{142}\right\rangle$.

10. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

10.1. Критерии принятия решений в условиях неопределенности

Играми с природой называют игры, в которых в качестве второго игрока выступает не осмысленно действующее лицо, стремящееся максимизировать свой выигрыш, а «природа», действия которой невозможно предсказать.

Например, спрос на товар, который планирует выпускать предприятие, заранее неизвестен и зависит от многих факторов, урожайность сельскохозяйственной культуры зависит от погодных и многих других условий, которые заранее невозможно предусмотреть.

Элементы a_{ij} платежной матрицы (ее называют также матрицей полезностей) представляют собой выигрыш первого игрока в ситуации, когда первый игрок выбрал стратегию i, а «природа» находится в состоянии j.

Иногда в задачах анализируется матрица рисков, или матрица упущенных возможностей $R = (r_{ij})$. Элементы матрицы рисков $r_{ij} = a_j - a_{ij}$, где $a_j = \max_i a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце j матрицы полезностей.

Если платежная матрица A представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков определяются по формуле $r_{ij} = a_{ij} - a_j$, где $a_j = \min_i a_{ij}$ – минимальный элемент в столбце j матрицы потерь.

Для принятия решений в условиях неопределенности используют различные критерии в зависимости от конкретных ситуаций и преследуемых целей (здесь исключается случай существования единственной доминирующей стратегии).

Критерий Вальда – пессимистический критерий, основанный на выборе наилучшей из наихудших стратегий. Если A – матрица выигрышей, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий: $K_B = \max_i \min_j a_{ij}$. Если A – матрица потерь, то используется минимаксный критерий: $K_B = \min_i \max_j a_{ij}$. Этот критерий обеспечивает игроку гарантированный минимум, хотя фактический результат может и не быть настолько плохим. Такая стратегия приемлема, когда игрок хочет застраховать себя от неожиданных проигрышей.

Критерий оптимизма (критерий максимакса) соответствует оптимистической наступательной стратегии: $K_O = \max_i \max_j a_{ij}$ – для матрицы выигрышей, $K_O = \min_i \min_j a_{ij}$ – для матрицы затрат. Критерий целесообразно применять в том случае, когда у игрока есть возможность влиять на функции противоположной стороны. Стратегия ориентирована на предельный риск.

Критерий пессимизма характеризуется выбором худшей альтернативы из всех худших: $K_П = \min_i \min_j a_{ij}$ – для матрицы выигрышей, $K_П = \max_i \max_j a_{ij}$ – для матрицы затрат. Критерий применяется в задачах социально-экономического прогнозирования, долгосрочного планирования, когда сложно оценить влияние на ситуацию даже контролируемых факторов.

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска) можно рассматривать как критерий наименьшего вреда, который определяет худшие возможные последствия для каждой альтернативы и выбирает альтернативу с лучшим из плохих значений. Используется, когда задана матрица рисков, и аналогичен критерию Вальда: $K_C = \min_i \max_j r_{ij}$.

Критерий Гурвица (критерий обобщенного максимина) позволяет учитывать состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Для каждой стратегии i определяется линейная комбинация минимального и максимального выигрышей:

$$K_i = k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij},$$

в результате выбирается та стратегия, для которой окажется максимальной величина K_i, то есть

$$K_Г = \max_i \left\{ k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij} \right\},$$

где k – степень оптимизма ($0 \le k \le 1$), значения которой выбираются в зависимости от конкретной ситуации и склонности игрока к риску. При $k = 0$ критерий Гурвица совпадает с критерием оптимизма, при $k = 1$ – с критерием Вальда. Для матрицы затрат, как и для матрицы рисков, критерий имеет вид $K_Г = \min_i \left\{ k \max_j a_{ij} + (1-k) \min_j a_{ij} \right\}$.

Критерий Лапласа используется, когда есть основания полагать все состояния «природы» равновероятными, при этом вероятность каждого состояния $p_j = \frac{1}{n}$. Для каждой стратегии i определяют математическое ожидание выигрыша $K_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ и из всех K_i выбирают максимальное: $K_Л = \max_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$. Значение i, соответствующее максимальному значению K_i, определяет оптимальную стратегию первого игрока. Для матрицы рисков или затрат $K_Л = \min_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$. Аналогичный критерий можно применять и в случае, когда вероятности состояний «природы» p_j различны, тогда $K_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$.

Выбор критерия является наиболее сложным и ответственным этапом принятия решения в условиях неопределенности, общих рекомендаций здесь не существует, многое зависит от опыта и интуиции лица, принимающего решение. При анализе ситуаций нецелесообразно ограничиваться одним критерием.

10.2. Примеры применения теории матричных игр

Пример. Транспортное предприятие должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги. Спрос на транспортные услуги неизвестен, но может находиться в одном из четырех состояний. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей. Затраты предприятия (в тыс. руб.) на развитие провозных возможностей определяются матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 19 & 21 \\ 10 & 8 & 10 & 23 \\ 20 & 13 & 14 & 20 \\ 25 & 20 & 17 & 12 \end{pmatrix}$. Строки матрицы соответствуют возможным стратегиям предприятия (1-го игрока), столбцы – возможным состояниям спроса («природы»), каждый элемент a_{ij} матрицы определяет затраты предприятия в ситуации (i, j). Выбрать оптимальную стратегию предприятия, используя различные критерии. Составить матрицу рисков и использовать критерий Сэвиджа.

Решение. Обратим внимание на то, что задана матрица затрат. Составим вспомогательную таблицу.

Стратегии предприятия i \ Состояния спроса j	1	2	3	4	$\max\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_j a_{ij}$
1	7	15	19	21	21	7
2	10	8	10	23	23	8
3	20	13	14	20	20	13
4	25	20	17	12	25	12

В соответствии с критерием Вальда $K_B = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 20$, оптимальная стратегия предприятия $i^* = 3$, затраты предприятия составят 20 тыс. руб.

В соответствии с критерием оптимизма $K_O = \min\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 7$, $i^* = 1$, затраты предприятия составят 7 тыс. руб.

В соответствии с критерием пессимизма $K_П = \max\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 25$, $i^* = 4$, затраты предприятия составят 25 тыс. руб.

По критерию Гурвица, полагая степень оптимизма $k = 0{,}6$, получим:

$$K_1 = 0{,}6 \max_j a_{1j} + 0{,}4 \min_j a_{1j} = 0{,}6 \cdot 21 + 0{,}4 \cdot 7 = 15{,}4,$$

$$K_2 = 0{,}6 \max_j a_{2j} + 0{,}4 \min_j a_{2j} = 0{,}6 \cdot 23 + 0{,}4 \cdot 8 = 17,$$

$$K_3 = 0{,}6 \max_j a_{3j} + 0{,}4 \min_j a_{3j} = 0{,}6 \cdot 20 + 0{,}4 \cdot 13 = 17{,}2,$$

$$K_4 = 0{,}6 \max_j a_{4j} + 0{,}4 \min_j a_{4j} = 0{,}6 \cdot 25 + 0{,}4 \cdot 12 = 19{,}8.$$

Тогда $K_Г = \min\limits_i \left\{ 0{,}6 \max\limits_j a_{ij} + 0{,}4 \min\limits_j a_{ij} \right\} = 15{,}4$, $i^* = 1$, затраты предприятия составят 15,4 тыс. руб.

По критерию Лапласа, полагая все состояния спроса равновероятными $\left(p_j = \frac{1}{4} \right)$, получим:

$$K_1 = \frac{1}{4}(7 + 15 + 19 + 21) = 15{,}5,$$

$$K_2 = \frac{1}{4}(10 + 8 + 10 + 23) = 12{,}75,$$

$$K_3 = \frac{1}{4}(20 + 13 + 14 + 20) = 16{,}75,$$

$$K_4 = \frac{1}{4}(25 + 20 + 17 + 12) = 18{,}5 .$$

Тогда $K_Л = \min\limits_i \left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} = 12{,}75$, $i^* = 2$, затраты предприятия составят 12,75 тыс. руб.

Составим матрицу рисков, найдя предварительно минимальный элемент в каждом столбце: $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$. Элементы r_{ij} матрицы рисков определяются как разность между элементами каждого столбца матрицы *A* и соответствующим минимальным элементом столбца: $R = \begin{pmatrix} 7-7 & 15-8 & 19-10 & 21-12 \\ 10-7 & 8-8 & 10-10 & 23-12 \\ 20-7 & 13-8 & 14-10 & 20-12 \\ 25-7 & 20-8 & 17-10 & 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 11 \\ 13 & 5 & 4 & 8 \\ 18 & 12 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Значения $\max\limits_j a_{ij}$ для каждой строки равны соответственно 9; 11; 13; 18; $K_C = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 9$, в соответствии с критерием Сэвиджа $i^* = 1$, затраты предприятия составят 9 тыс. руб.

Как видно из результатов, разные критерии дают различные оптимальные стратегии для предприятия.

Пример. Торговая фирма производит два вида продукции. Анализ спроса с учетом конъюнктуры рынка по данным наблюдений за несколько лет службой маркетинга фирмы показал, что спрос на ее продукцию не поддается прогнозированию, но может находиться в двух состояниях: при одном состоянии спроса фирма реализует 250 и 100, при другом – 150 и 400 ед. продукции 1-го и 2-го вида соответственно. Требуется определить план производства продукции на предстоящий период, обеспечивающий максимальный доход от реализации при цене продажи 100 и 100 ден. ед., если затраты составляют 75 и 65 ден. ед. на единицу продукции по каждому виду соответственно.

Решение. В связи с возможными состояниями спроса у фирмы две стратегии: изготовить 250 и 100 ед. продукции 1-го и 2-го вида соответственно или изготовить 150 и 400 ед. продукции. Составим платежную матрицу *A*, элементы a_{ij} которой представляют собой доход фирмы в ситуации (i, j), то есть когда фирма использовала стратегию *i*, а на рынке сложилась ситуация *j*, $i, j = 1, 2$. Учитывая, что доход от продажи 1 ед. продукции 1-го и 2-го видов соответственно составляет 25 и 35 ден. ед., получим:

$a_{11} = 250 \cdot 25 + 100 \cdot 35 = 6250 + 3500 = 9750$,

$a_{12} = 150 \cdot 25 + 100 \cdot 35 - 100 \cdot 75 = -250$,

$a_{21} = 150 \cdot 25 + 100 \cdot 35 - 300 \cdot 65 = -12250$,

$a_{22} = 150 \cdot 25 + 400 \cdot 35 = 3750 + 14000 = 17750$.

$$A = \begin{pmatrix} 9750 & -250 \\ -12250 & 17750 \end{pmatrix}.$$

Найдем оптимальную стратегию фирмы:

$$x_1 = \frac{17750 + 12250}{9750 + 17750 + 12250 + 250} = \frac{30000}{40000} = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{1}{4}, \text{ то есть } x^* = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right),$$

$$v = \frac{9750 \cdot 17750 - 12250 \cdot 250}{40000} = \frac{170000000}{40000} = 4250.$$

Это значит, что фирма должна использовать свои чистые стратегии с относительной частотой $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Используя физическую смесь стратегий, получим: $\frac{3}{4}(250;100) + \frac{1}{4}(150;400) = (225;175)$, то есть фирме следует изготовить 225 ед. продукции 1-го вида и 175 ед. продукции 2-го вида, при этом доход фирмы при любом состоянии спроса составит 4250 ден. ед. Действительно, если спрос будет находиться в состоянии $j = 1$, то доход фирмы составит $225 \cdot 25 + 100 \cdot 35 - 75 \cdot 65 = 4250$ ден. ед.; при состоянии спроса $j = 2$ доход фирмы составит $150 \cdot 25 + 175 \cdot 35 - 75 \cdot 75 = 4250$ ден. ед. При использовании других критериев результаты были бы иными.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составьте матрицу рисков для матрицы выигрышей $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Составьте матрицу рисков для матрицы затрат $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 15 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 11 & 8 \\ 5 & 9 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

3. При обтачивании валов на механическом участке можно использовать четыре типа резцов, отличающихся материалом режущей части. Суммарная потребность в резцах для программы очередного месяца составляет 200 шт. На обработку могут поступать заготовки четырех групп твердости, причем количество заготовок каждой группы заранее неизвестно. В таблице приведены данные о затратах на износ и эксплуатацию инструмента в себестоимости одной детали в зависимости от типа инструмента и группы твердости. Определите состав заявки на инструмент, при котором затраты на износ и эксплуатацию резцов минимальны.

Группа тверд. / Тип резцов	1	2	3	4
1	– 0,14	– 0,20	– 0,33	– 0,38
2	– 0,26	– 0,18	– 0,30	– 0,35
3	– 0,29	– 0,35	– 0,24	– 0,30
4	– 0,37	– 0,41	– 0,29	– 0,26

4. Имеется три типа дробильного оборудования и три вида отходов. Удельные приведенные затраты на дробление 1т отходов в зависимости от вида отхода и типа оборудования даны в таблице. Определите состав дробильного оборудования (долю каждого типа), при котором приведенные затраты будут минимальными, если распределение отходов по видам заранее неизвестно.

Виды отходов	Дробилка		
	ДР – 8	ДР – 10	ДР – 12
1	0,23	0,22	0,26
2	0,35	0,42	0,17
3	0,12	0,25	0,18

5. Фермер решает, сколько тонн пшеницы посадить в следующем году. Он может посадить 20 т, 35 т, 50 т. При этом предполагается, что с каждой посаженной тонны пшеницы он может собрать 2 тонны. Климат следующим летом может быть сухим, влажным и нормальным. В зависимости от того, каким будет лето, фермер потеряет соответственно 25%, 40%, 10% урожая. Фермер заключил контракт на поставку 50 т пшеницы по стоимости 1,5 тыс. руб. за 1 т. В случае нехватки пшеницы фермеру придется закупать недостающее количество по 2 тыс. руб. за 1 т. В случае обильного урожая количество пшеницы свыше 50 т необходимо будет хранить на складе по цене 1 тыс. руб. за 1 т. Определите доход предпринимателя в каждом случае (составьте матрицу игры).

6. Предприятие планирует выпуск трех партий новых видов товаров широкого потребления в условиях неясной рыночной конъюнктуры. Известны отдельные возможные состояния P_1, P_2, P_3, P_4, а также возможные объемы выпуска изделий по каждому варианту и их условные вероятности, которые представлены в таблице. Определите предпочтительный план выпуска товаров широкого потребления.

Изделия	Объем выпуска изделий при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	P_1	P_2	P_3	P_4
I	0,4 2,2	0,1 3,8	0,2 2,8	0,3 3,2
II	0,3 2,6	0,2 2,4	0,1 3,1	0,4 3,3
III	0,2 3,0	0,3 2,0	0,2 1,8	0,3 2,5

7. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа – сентября на единицу продукции составили: платья – 7 ден. ед., костюмы – 28 ден. ед. Цена реализации составляет 15 и 20 ден. ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде – 630 платьев и 1050 костюмов. В связи с возможными изменениями погоды определите стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решите, используя различные критерии, приняв степень оптимизма равной 0,5.

8. Аналитики предсказывают три наиболее вероятных ситуации на рынке: спрос на товар T_1 составит 100 ед., на товар T_2 – 300 ед., T_3 – 200 ед. с ценой реализации 150 руб., 130 руб., 800 руб. за 1 ед. соответственно. Возможен рост спроса на 20%, при этом цена возрастет на 35%. Возможен спад на 10%, что приведет к снижению цены на 15%. Затраты на выпуск 1 ед. товаров T_1, T_2, T_3 составляют 100 руб., 90 руб., 150 руб. соответственно. Составьте матрицу игры и найдите оптимальную стратегию фирмы.

9. Предприятие выпускает два вида скоропортящихся продуктов P_1, P_2. Ежедневные расходы на производство и реализацию не должны превышать 4000 ден. ед. При этом себестоимость 1 ед. P_1 равна 0,8 ден. ед., отпускная цена 1,2 ден. ед.; себестоимость 1 ед. P_2 0,5 ден. ед., отпускная цена 0,8 ден. ед. Если продукция не реализуется в день выпус-

ка, то ее качество значительно снижается, и она продается на следующий день по цене в 4 раза ниже отпускной. Реализация продукции зависит от состояния погоды: в хорошую погоду реализуется 1000 ед. P_1 и 6000 ед. P_2, в плохую погоду – 4000 ед. P_1 и 1200 ед. P_2. На реализацию всей произведенной за день продукции расходуется 200 ден. ед. Составьте матрицу доходов предприятия и найдите оптимальную стратегию.

10. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать три культуры A_1, A_2, A_3. Урожаи этих культур зависят от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход (прибыль от реализации выращенной культуры определяется полученным объемом). Зависимость урожайности каждой культуры от погоды и цена реализации даны в таблице. Определите оптимальный план посева.

Исходные условия	Урожайность культуры, в ц с 1 га		
	A_1	A_2	A_3
Сухая погода	20	7,5	0
Нормальная погода	5	12,5	7,5
Дождливая погода	15	5	10
Цена за 1 ц, в руб.	2	4	8

11. Может произойти наводнение, ущерб от которого зависит от его уровня. Ожидаемый ущерб при уровне не более 2 м – 10 млн. руб., 3м – 13 млн. руб., 4 м – 16 млн. руб., 5 м – 20 млн. руб. Затраты на строительство дамбы высотой 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 5 м составляют соответственно 2, 4, 6, 8, 10 млн. руб. Составьте матрицу потерь в зависимости от уровня наводнения и высоты дамбы, определите оптимальную стратегию проектировщика.

Уровень навод. / Высота дамбы	1	2	3	4	5
1	2	12	15	18	22
2	4	4	17	20	24
3	6	6	6	22	26
4	8	8	8	8	28
5	10	10	10	10	10

12. В обычную зиму Гансу требуется 15 т угля, в теплую – 10 т, в суровую – 20 т. Цены на уголь в теплую, обычную, суровую зиму составляют соответственно 8$, 12$, 16$ за 1 т. Летом уголь можно купить по 8$ за 1 т. Перед Гансом стоит проблема: купить заранее летом 10 т,

15 т или 20 т, так как весной Ганс переедет в Калифорнию и не сможет взять излишки угля с собой.

13. Фирма «Фармацевт» – производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь – октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) – 20 ден. ед.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) – 15 ден. ед.

По данным наблюдений, проведенных за несколько последних лет службой маркетинга, установлено, что фирма может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды – 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; а в условиях холодной погоды – 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. продукции второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды определите стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи за 1 усл. ед. продукции первой группы 40 ден. ед. и второй группы – 30 ден. ед.

14. Один из пяти станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать три значения: 150; 200; 350. Производственные затраты C_i для i-го станка задаются формулой $C_i = P_i + c_i \cdot Q$. Данные P_i и c_i приведены в таблице:

Показатели	Модель станка				
	1	2	3	4	5
P_i	30	80	50	160	100
c_i	14	6	10	5	4

Решите задачу для каждого из следующих критериев: Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (положите $\alpha = 0,6$). Полученные решения сравните.

11. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

11.1. Основные определения

Выше рассматривались антагонистические игры – игры двух лиц с противоположными интересами: выигрыш одного равнялся проигрышу другого (игры с нулевой суммой). Гораздо чаще встречаются игры с ненулевой суммой.

Если 1-й игрок имеет m стратегий, 2-й игрок – n стратегий и при выборе 1-м игроком стратегии i, а 2-м игроком стратегии j выигрыш 1-го равен a_{ij}, а выигрыш 2-го b_{ij}, то игру можно задать двумя матрицами $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$. Такие игры называются **биматричными**, матрицы A и B называются платежными матрицами 1-го и 2-го игроков соответственно.

Иногда игру такого вида задают матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11};b_{11} & a_{12};b_{12} & \dots & a_{1n};b_{1n} \\ a_{21};b_{21} & a_{22};b_{22} & \dots & a_{2n};b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1};b_{m1} & a_{m2};b_{m2} & \dots & a_{mn};b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ситуация (i^*, j^*) называется **ситуацией равновесия** в биматричной игре, если для любых $i\in M$, $j\in N$ выполняются неравенства $a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}$, $b_{i^*j}\le b_{i^*j^*}$.

Найдем, например, все ситуации равновесия в игре

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Выберем в A наибольшие элементы в столбцах, в B наибольшие элементы в строках. Общий выбранный элемент определяет единственную ситуацию равновесия (3,3). При этом выигрыш 1-го игрока равен 5, выигрыш 2-го равен 6.

Ситуация равновесия в биматричной игре существует далеко не всегда. Так же, как и в матричных играх, в биматричных играх вводится понятие смешанных стратегий.

Если $x_i, i=\overline{1,m}$ – вероятности (относительные частоты), с которыми 1-й игрок использует свои чистые стратегии, а $y_j, j=\overline{1,n}$ – вероятности (относительные частоты), с которыми 2-й игрок использует свои чистые стратегии, где $x_i \ge 0,\ y_j \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, то $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – смешанные стратегии 1-го и 2-го игроков, а $K_A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, $K_B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$ – средние выигрыши 1-го и 2-го игроков.

Ситуация (x^*, y^*) называется **ситуацией равновесия в смешанных стратегиях**, или точкой равновесия по Нэшу в биматричной игре, если для любых x, y выполняются неравенства $K_A(x, y^*) \le K_A(x^*, y^*)$, $K_B(x^*, y) \le K_B(x^*, y^*)$, соответствующие стратегии x^*, y^* называются оптимальными.

Другими словами, ситуация (x^*, y^*) является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков, при условии, что другой сохраняет свой выбор, может привести лишь к уменьшению выигрыша отклонившегося игрока. Таким образом, самому игроку невыгодно отклоняться от ситуации равновесия.

Теорема 7. Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Свойства оптимальных стратегий в биматричных играх аналогичны свойствам в матричных играх.

1. Для того чтобы ситуация (x^*, y^*) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ выполнялись условия

$$K_A(i, y^*) \le K_A(x^*, y^*),\quad K_B(x^*, j) \le K_B(x^*, y^*).$$

2. Пусть (x^*, y^*) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда из того, что $x_i^* > 0$, следует $K_A(i, y^*) = K_A(x^*, y^*)$, а из того, что $y_j^* > 0$, следует $K_B(x^*, j) = K_B(x^*, y^*)$.

Следствие. Пусть (x^*, y^*) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда из того, что

$K_A(i,y^*) < K_A(x^*,y^*)$, следует $x_i^* = 0$, а из того, что $K_B(x^*,j) < K_B(x^*,y^*)$, следует $y_j^* = 0$.

11.2. (2×2) – биматричные игры

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ – платежные матрицы игроков, p, $1-p$ и q, $1-q$ – вероятности соответствующих чистых стратегий 1-го и 2-го игроков, $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$. Средний выигрыш каждого игрока:

$$K_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$
$$K_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q).$$

Пара чисел (p^*,q^*) определяет ситуацию равновесия, если для любых p, q, $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ выполняются условия

$$K_A(p,q^*) \le K_A(p^*,q^*),\quad K_B(p^*,q) \le K_B(p^*,q^*).$$

Запишем средние выигрыши игроков A и B в более удобной форме.

$$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22},$$
$$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}.$$

Обратимся к первой из этих формул. Полагая в ней сначала $p = 1$, а потом $p = 0$, получаем, что

$$H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$$
$$H_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$

Рассмотрим разности

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - \\ -(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12},$$
$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.$$

Вводя обозначения $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$, получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) = \\ = (p-1)(Cq - \alpha),$$
$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

В случае если пара (p,q) определяет точку равновесия, эти разности должны быть неотрицательными,

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) \ge 0,\quad H_A(p,q) - H_A(0,q) \ge 0.$$

Поэтому окончательно получаем

$$(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0, \quad p(Cq-\alpha)\ge 0.$$

Из формул для функции $H_B(p,q)$ при $q=1$ и $q=0$ имеем соответственно

$H_B(p,1)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})p+(b_{12}-b_{22})p+b_{21}$,

$H_B(p,0)=(b_{12}-b_{22})p+b_{22}$.

С учетом обозначений $D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$, $\beta=b_{22}-b_{21}$ разности $H_B(p,q)-H_B(p,1)$, $H_B(p,q)-H_B(p,0)$ приводятся к виду

$$H_B(p,q)-H_B(p,1)=(q-1)(Dp-\beta), \quad H_B(p,q)-H_B(p,0)=q(Dp-\beta)$$

совершенно так же, как соответствующие разности для функции H_A.

Если пара (p,q) определяет точку равновесия, то эти разности должны быть неотрицательными,

$$H_B(p,q)-H_B(p,1)\ge 0, \quad H_B(p,q)-H_B(p,0)\ge 0.$$

Поэтому $\qquad (q-1)(Dp-\beta)\ge 0, \quad q(Dp-\beta)\ge 0.$

Таким образом, для того чтобы в биматричной игре пара (p,q) определяла ситуацию равновесия, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
&(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0,\\
&p(Cq-\alpha)\ge 0,\\
&(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,\\
&q(Dp-\beta)\ge 0,\\
&0\le p\le 1,\ 0\le q\le 1,
\end{aligned} \tag{28}$$

где $C=a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$, $\alpha=a_{22}-a_{12}$,

$D=b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}$, $\beta=b_{22}-b_{21}$

Пример. Найти ситуацию равновесия в биматричной игре $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. $C=-11$, $\alpha=-5$, $D=4$, $\beta=1$. Получим неравенства:

1) $(p-1)(-11q+5)\ge 0$, $p(-11q+5)\ge 0$.

При $p=1$: $-11q+5\ge 0$, $q\le\frac{5}{11}$; при $p=0$: $-11q+5\le 0$, $q\ge\frac{5}{11}$.

Соответствующие результаты изображены на рис. 4 сплошной линией.

2) $(q-1)(4p-1)\ge 0$, $q(4p-1)\ge 0$.

При $q=1$: $4p-1\ge 0$, $p\ge\frac{1}{4}$; при $q=0$: $4p-1\le 0$, $p\le\frac{1}{4}$.

Соответствующие результаты изображены на рис. 4 пунктирной линией.

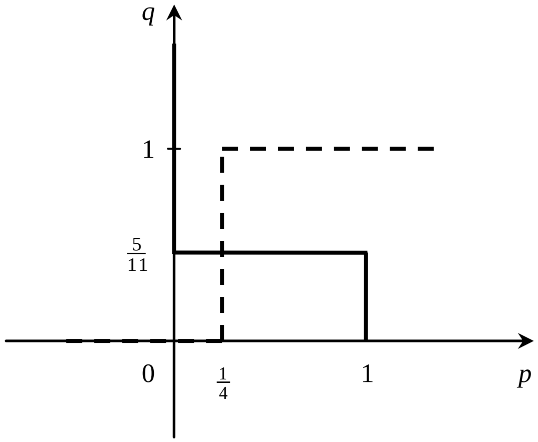


Рис. 4

Общая точка построенных зигзагов – точка равновесия $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{11}\right)$. Соответствующие оптимальные стратегии игроков имеют вид $x^*=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, $y^*=\left(\frac{5}{11};\frac{6}{11}\right)$, средние выигрыши игроков $K_A\left(\frac{1}{4};\frac{5}{11}\right)=-\frac{7}{11}$, $K_B\left(\frac{1}{4};\frac{5}{11}\right)=\frac{1}{2}$.

Замечания. 1. Разобьем исходную биматричную игру на две матричных игры с нулевой суммой. Для Γ_A получим решение $x_A^*=\left(\frac{3}{11};\frac{8}{11}\right)$, $y_A^*=\left(\frac{5}{11};\frac{6}{11}\right)$, $v_A=-\frac{7}{11}$. Для Γ_B получим $x_B^*=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, $y_B^*=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $v_B=\frac{1}{2}$. Сравнивая полученные результаты с решением биматричной игры, заметим: если каждый игрок будет применять свои стратегии в этой игре, исходя только из матрицы своих выигрышей, то цена его игры совпадет с выигрышем при равновесной ситуации в биматричной игре; по своей матрице игрок может найти и оптимальную смешанную стратегию другого игрока.

2. Если в формулах (28) $CD \neq 0$, то для нахождения ситуации равновесия можно использовать формулы:

$$p = \frac{\beta}{D} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}, \quad q = \frac{\alpha}{C} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, однако соответствующие стратегии x^*, y^* далеко не всегда являются наиболее выгодными для игроков.

Например, в игре $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ситуациями равновесия в чистых стратегиях являются ситуации (1; 1), 5, 2 и (2; 2), 2, 5. Очевидно, ситуация (1; 1) предпочтительна для 1-го игрока, ситуация (2; 2) – для 2-го и остается неясным, к какому решению должны прийти участники игры, поскольку стратегии они выбирают одновременно и независимо друг от друга. Такое положение не объясняется неоднозначностью выбора игроков.

В игре $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеется единственная ситуация равновесия (2; 2), то есть $x^* = (0;1)$, $y^* = (0;1)$, выигрыш каждого игрока равен 1. В то же время переход каждого игрока к стратегиям $x = (1;0)$, $y = (1;0)$ привел бы к выигрышам по 6. Такой результат выгоден для обоих, но соответствующие договоренности запрещены правилами игры, и в этих условиях каждой стороне приходится опасаться «маневров» противника, выраженных в неожиданных изменениях поведения с целью достичь еще большего преимущества.

Таким образом, основные выводы, к которым можно прийти, состоят в следующем:

1) существование ситуации равновесия в бескоалиционных играх не определяет, вообще говоря, их решений, и однозначные рекомендации для игроков отсутствуют;

2) во многих случаях полезны и даже необходимы контакты и соглашения между участниками игры, поэтому модели, допускающие возможность кооперирования, более предпочтительны;

3) частные постановки задач не исключают использование теории бескоалиционных игр, и вопрос о целесообразности поиска ситуации равновесия, их последующего анализа и учета в решениях должен исследоваться в каждом случае специально.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите ситуации равновесия в чистых или смешанных стратегиях и соответствующие выигрыши игроков в биматричных играх.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Борьба за рынки.

Небольшая фирма P_1 намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, контролируемых более крупной фирмой P_2. Для этого фирма P_1 готова развернуть на одном из рынков рекламную кампанию.

Фирма P_2 может попытаться воспрепятствовать этому. Не встречая противодействия на рыке, фирма P_1 захватывает его, при наличии препятствий – терпит поражение. Пусть в условных денежных единицах платежные матрицы фирм имеют вид $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (у каждой фирмы по две стратегии: выбрать первый рынок или второй). Укажите оптимальные стратегии фирм.

12. Дилемма узников.

Игроками являются два узника, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик их судьба в большой степени зависит от того, заговорят они или будут молчать. Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (потери каждого составят – 1). Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого составят – 6). Если же заговорит только один, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу (его потери будут равны 0), а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание (его потери будут равны – 9). Составьте матрицы игры, найдите оптимальные стратегии игроков. Проанализируйте другие ситуации.

13. Семейный спор.

Муж и жена решают, как провести выходной: муж предлагает пойти на футбол, жена – в театр. В случае принятия общего решения выигрыш предлагавшего это решение будет вдвое больше, чем выигрыш другого. Если к общему решению не пришли, выигрыш каждого равен 0. Составьте матрицы игры, найдите оптимальные стратегии игроков. Проанализируйте другие ситуации.

Ответы.

1. (1; 3), 8, 7. **2.** (1; 1), 7, 9; (4; 3), 7, 6.

3. (1; 3), 9, 2. **4.** (3;3), 5, 5; (4; 2), 6, 7.

5. $x^* = \left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$, $K_A = \frac{35}{9}$, $K_B = \frac{32}{7}$.

6. $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $y^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $K_A = \frac{18}{5}$, $K_B = \frac{7}{2}$.

7. $x^* = \left(\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $K_A = 4$, $K_B = \frac{37}{8}$.

8. $x^* = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, $y^* = \left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$, $K_A = \frac{17}{5}$, $K_B = \frac{17}{4}$.

9. $x^* = \left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, $K_A = \frac{7}{3}$, $K_B = \frac{14}{5}$; (1; 1), 5, 3; (2;2), 3, 6.

10. $x^* = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y^* = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, $K_A = 4$, $K_B = \frac{9}{2}$; (2; 1), 5, 8; (1;2), 7, 7.

11. $x^* = \left(\frac{2}{9};\frac{7}{9}\right)$, $y^* = \left(\frac{3}{14};\frac{11}{14}\right)$, $K_A = -\frac{4}{7}$, $K_B = \frac{1}{3}$.

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, $(0;0)$ – ситуация равновесия.

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $(0;0)$, $K_A(0;0) = 1$, $K_B(0;0) = 2$; $(1;1)$, $K_A(1;1) = 2$, $K_B(1;1) = 1$; $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, $K_A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $K_B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

12. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

12.1. Кооперативные игры двух лиц. Ситуация, оптимальная по Парето

Кооперативной игрой называется игра с непостоянной суммой, в которой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях, образуя коалиции.

Рассмотрим простейшую кооперативную игру – игру двух лиц, у каждого из которых имеется по две стратегии. Содержательные представления о выгодности и справедливости ситуации многообразны. Выше было рассмотрено их проявление через равновесие. Существует и иной вариант справедливости, в большей степени, чем равновесие, отражающий черты ее выгодности – это оптимальность по Парето.

Пусть Ω – ограниченное замкнутое множество в плоскости *XOY*. Все его точки можно разбить на три класса:

1) точки, которые, оставаясь в множестве Ω можно сдвинуть так, чтобы одновременно увеличились обе координаты; к ним относятся все внутренние точки множества Ω и часть его граничных точек;

2) граничные точки, перемещением которых по границе множества можно увеличить только одну из координат при сохранении значения второй координаты; к ним относятся точки, лежащие на горизонтальных или вертикальных участках границы множества Ω;

3) граничные точки, перемещение которых по границе множества Ω увеличивает одну из координат при одновременном уменьшении другой; множество всех таких точек называют **границей Парето**.

Границы Парето некоторых простейших множеств показаны на рис. 5, 6, 7.

Определение. Ситуация (p^*, q^*) в биматричной игре $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ называется оптимальной по Парето, если из того, что $K_A(p^*, q^*) \le K_A(p, q)$, $K_B(p^*, q^*) \le K_B(p, q)$ следует $p = p^*$, $q = q^*$.

Иными словами, в оптимальной по Парето ситуации игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш одного из них, не уменьшив при этом выигрыш другого.

Отличие ситуации равновесия от ситуации, оптимальной по Парето, состоит в следующем: в ситуации равновесия ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша; в ситуации, оптимальной по Парето, игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого (даже нестрого).

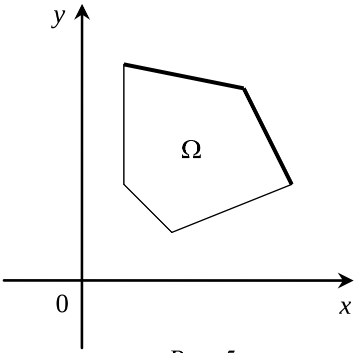


Рис. 5

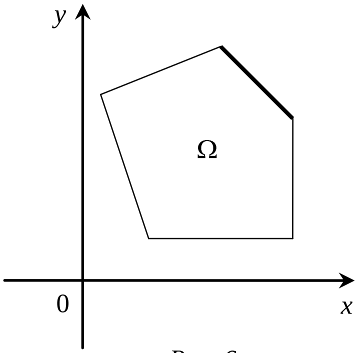


Рис. 6

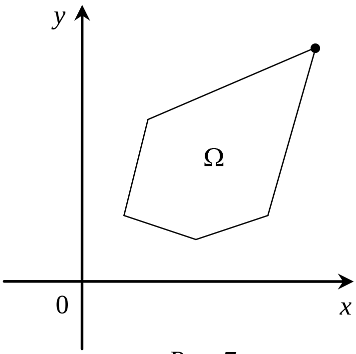


Рис. 7

Пример. В биматричной игре $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$ найти ситуацию, оптимальную по Парето.

Решение. Игра имеет единственную ситуацию равновесия в чистых стратегиях (2; 2), при этом выигрыш каждого игрока равен –5. Найдем ситуацию, оптимальную по Парето. По элементам матриц A и B построим на плоскости точки $K(1;1)$, $L(-7;0)$, $M(-5;-5)$, $N(0;-8)$. Получаем замкнутую ограниченную область $KLMN$ (рис. 8). Ее граница Парето представляет собой единственную точку $K(1;1)$ – точку с наибольшими выигрышами для каждого из игроков. Ей соответствуют чистые стратегии обоих игроков $p=1$, $q=1$, при этом выигрыш каждого игрока равен 1. Очевидно, что полученное решение выгоднее для каждого игрока, однако получить такой выигрыш игроки могут лишь договорившись друг с другом о выборе стратегий.

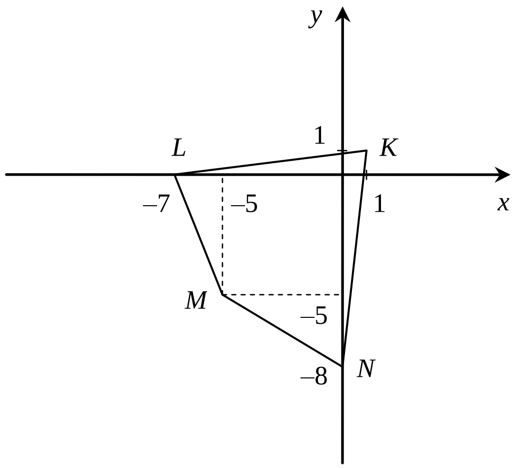


Рис. 8

Пример. Найти оптимальные выигрыши игроков в кооперативной биматричной игре, заданной платежными матрицами $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Множеством, определяющим игру, является треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;8)$, $B(8;2)$ (рис. 9). AB – граница Парето. Точка $T(4;4)$ определяет выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером. Отрезок *KL* представляет собой «переговорное множество». На этом отрезке лежит точка Нэша $N(5;5)$, в которой произведение $(a-5)(b-5)$, где a – максимальный элемент матрицы *A*, b – максимальный элемент матрицы *B*, принимает наибольшее значение. Это значит, что, договорившись, например, согласившись поделиться выигрышем, игроки могут получить по 5 единиц, а такая ситуация представляется наиболее выгодной для каждого игрока.

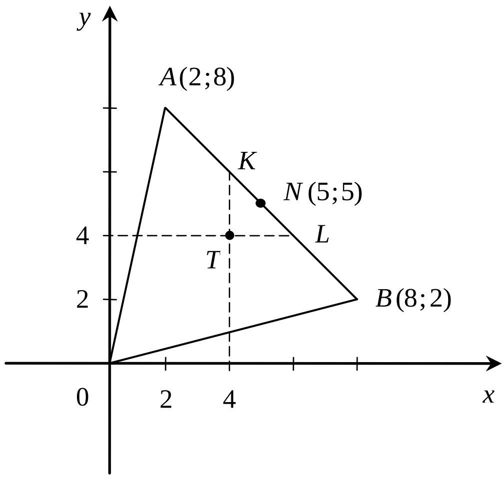


Рис. 9

12.2. Кооперативные игры *n* лиц

Обратимся к играм, в которых игроки делят общий выигрыш (денежный доход). Такие игры называют играми дележа.

В кооперативной теории игр нет единого понятия разумного дележа. Более того, различные соображения оптимальности могут приводить к разным множествам разумных дележей.

Изложим один из возможных подходов к разрешению поставленной проблемы.

Пусть G – множество из n игроков: $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

Любое подмножество $R \subset G$ будем называть **коалицией**.

Сопоставляя каждой коалиции R ее выигрыш (доход) $\nu(R)$, мы определяем на множестве всех коалиций **характеристическую функцию** ν.

Ясно, что таких характеристических функций на одном и том же множестве коалиций может быть задано много. Ограничимся рассмотрением характеристических функций, для которых неравенство

$$\nu(R) + \nu(Q) \le \nu(R \cup Q) \qquad (29)$$

выполняется для любых двух непересекающихся коалиций R и Q.

Это означает, что если у двух коалиций R и Q нет общего игрока, то сумма их выигрышей не превосходит выигрыша коалиции, их объединяющей.

Из неравенства (29) вытекает, что для любых непересекающихся коалиций $R_1, R_2, ..., R_m$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{m} \nu(R_i) \le \nu(G)$, откуда, в частности, следует, что разбиения множества G на коалиции, при котором их суммарный гарантированный выигрыш превосходил бы выигрыш всех игроков, не существует.

Пример. Рассмотрим две пары матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \ \text{и}\ A_2 = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первый игрок выбирает номер строки i, второй – номер столбца j, а третий – номер пары $r \in \{1, 2\}$. Выигрыш первого игрока равен a_{ij}^r, второго– b_{ij}^r, а третьего – $c_{ij}^r = 10 - a_{ij}^r - b_{ij}^r$. Сумма выигрышей всех трех игроков в этой игре постоянна и равна 10.

Найдем $\nu(g_1)$. Первый игрок играет против коалиции в игру с матрицей

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
1	2	7	3	−1
2	4	2	1	3

Вычеркивая первый и второй столбцы и решая получившуюся в результате 2×2 –игру $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, находим, что $\nu(g_1) = \frac{5}{3}$. Отсюда $\nu(g_2, g_3) = 10 - \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$.

Несложно найти значения характеристической функции и для других коалиций: $\nu(g_2) = 1$, $\nu(g_1, g_3) = 9$, $\nu(g_3) = 4$, $\nu(g_1, g_2) = 6$.

Введем важное понятие дележа.

Определение. Дележом называется любой набор (вектор) $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, подчиненный условиям

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \nu(g_1, g_2, ..., g_n) = \nu(G), \quad y_k \ge \nu(g_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Замечание. Дележ $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ задает распределение выигрыша $\nu(R)$, удовлетворяющее условию индивидуальной разумности, $y_k \ge \nu(g_k),\ k = \overline{1, n}$, которая означает, что, участвуя в коалиции, каждый игрок получает не меньше того, что он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке других игроков.

Пусть x и y – два разных дележа в заданной игре, и игроки должны выбрать какой-то один из них. Существует ли критерий, пользуясь которым можно было бы сделать такой выбор?

Вследствие условия $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$ ясно, что все игроки не могут предпочесть дележ x дележу y (и наоборот, дележ y дележу x): часть игроков предпочтет тот дележ (x), при котором их выигрыши больше, в то время как другая часть игроков предпочтет дележ y (при котором больше выигрыши уже этих игроков).

Определение. Будем говорить, что дележ x доминирует дележ y по коалиции Q, если выполнены следующие условия:

$$x_i > y_i \text{ для всех } g_i \in Q \text{ и } \sum_{g_i \in Q} x_i \le \nu(Q).$$

Первое из условий означает, что все члены коалиции Q предпочитают дележ x дележу y, а второе, что коалиция Q на самом деле может предложить каждому из игроков $g_i \in Q$ выигрыш x_i.

Обозначение: $x \succ_Q y$.

То, что $x \succ_Q y$, никак не исключает существования коалиции R, по которой $y \succ_R x$.

Тем не менее, полезно следующее определение.

Определение. Будем говорить, что дележ x доминирует дележ y, если существует коалиция Q, для которой $x \succ_Q y$.

Обозначение: $x \succ y$.

Предположим, что игроки пришли к такому соглашению о распределении выигрыша (дележу), при котором ни один из других дележей его не доминирует. Такое распределение устойчиво в следующем смысле: ни одной из коалиций R не выгодно отделяться от других игроков и распределять между членами коалиции выигрыш $\nu(R)$. Это обстоятельство наводит на мысль о целесообразности рассмотрения множества недоминируемых дележей.

Определение. Множество всех недоминируемых дележей называется **ядром** игры.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. Ядро игры есть множество всех дележей $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, для которых неравенства $\sum_{k \in R} y_k \ge \nu(R)$ выполнены для всех $R \subset G$.

Замечание. Дележ y, принадлежащий ядру игры, удовлетворяет условию групповой разумности: выигрыш $\nu(R)$ любой коалиции не превосходит ее доли по дележу y.

Доказательство. Предположим, что дележ y удовлетворяет условию теоремы и для некоторого дележа x можно указать коалицию R, для всех игроков которой выполняются неравенства $x_i > y_i$. В сочетании с условием теоремы это приводит к неравенству $\sum_{g_i \in R} x_i > \nu(R)$, которое означает, что дележ x не может доминировать дележ y по коалиции R. Тем самым, дележ y принадлежит ядру игры.

Покажем теперь, что дележ, не удовлетворяющий условию теоремы, ядру игры не принадлежит.

Из того, что дележ x не удовлетворяет условию теоремы, вытекает существование коалиции Q, для которой выполнено неравенство $\sum_{g_i \in Q} x_i < \nu(Q)$, или, что то же, $\sum_{g_i \in Q} x_i < \nu(Q) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Положим $\alpha = \nu(R) - \nu(Q) - \sum_{g_i \in R \setminus Q} \nu(g_i)$. Из условия (29) следует, что $\alpha \geq 0$.

Пусть g – число игроков в коалиции Q. Построим набор $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ по следующему правилу:

$$z_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{\varepsilon}{g}, & g_i \in Q, \\ \nu(g_i) + \dfrac{\alpha}{n-g}, & g_i \notin Q. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что набор z является дележом и что $z \succ_Q x$. А это означает, что ядру игры дележ x не принадлежит.

Пример. Рассмотрим известную задачу о джаз-оркестре. Владелец ночного клуба обещает \$1000 певцу, пианисту и ударнику за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в \$800, ударника и пианиста – в \$650 и одного пианиста в \$300. Дуэт певец-ударник зарабатывает \$500 за вечер на одной станции метро, певец зарабатывает \$200 за вечер в открытом кафе. Ударник один ничего не может заработать. Какое распределение дохода в \$1000 следует считать оптимальным, учитывая описанные возможности музыкантов?

Решение. Множество игроков здесь состоит из трех человек, а характеристическая функция принимает следующие значения:

$$\nu(g_1)=200,\ \nu(g_2)=300,\ \nu(g_3)=0,$$

$$\nu(g_1,g_2)=800,\ \nu(g_2,g_3)=650,\ \nu(g_1,g_3)=500,\ \nu(g_1,g_2,g_3)=1000.$$

Найдем ядро игры. Согласно теореме принадлежность дележа $y=(y_1,y_2,y_3)$ ядру игры равносильна одновременному выполнению следующих соотношений:

$$y_1\ge 200,\ \ y_2\ge 300,\ \ y_3\ge 0, \tag{30}$$

$$y_1+y_2\ge 800,\ \ y_2+y_3\ge 650,\ \ y_1+y_3\ge 500, \tag{31}$$

$$y_1+y_2+y_3=1000. \tag{32}$$

Заметим, что из условий (31) и (32) легко следуют неравенства

$$y_1\le 350,\ \ y_2\le 500,\ \ y_3\le 200,$$

которые вместе с соотношениями (30) задают прямоугольный параллелепипед $200\le y_1\le 350,\ 300\le y_2\le 500,\ 0\le y_3\le 200$ (рис. 10).

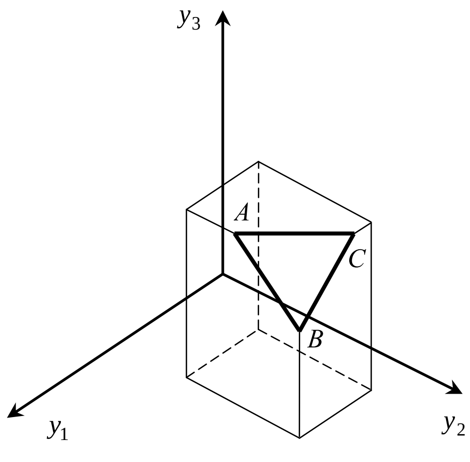


Рис. 10

Плоскость $y_1+y_2+y_3=1000$ пересекает его по треугольнику *ABC*, координаты вершин которого равны

$$A(350,450,200),\ \ B(350,500,150),\ \ C(300,500,200)$$

соответственно. Треугольник *ABC* и есть ядро данной игры. Как видим, оно содержит более одной точки, что не является существенным препятствием и попросту означает, что устойчивых дележей несколько.

В данном случае выигрыши каждого из игроков определяются с точностью до 50$. Типичным дележом является центр этого треугольника (среднее арифметическое координат его вершин), а именно,

$$y_1 = 333\frac{1}{3},\ y_2 = 483\frac{1}{3},\ y_3 = 183\frac{1}{3}.$$

Замечание. В случае $y_1 + y_2 + y_3 = 1050$ ядро игры состоит из одной точки $y_1 = 350$, $y_2 = 500$, $y_3 = 200$, а в случае $y_1 + y_2 + y_3 > 1050$ оказывается пустым.

Пустота ядра игры не делает кооперацию всех игроков множества G невозможной, а лишь означает, что никакой дележ не может быть стабилизирован посредством простых угроз. В этом случае приходится искать принципы оптимальности, существование и единственность которых были бы обеспечены в каждой кооперативной игре.

Пример. Землепользование.

Данная полоса земли оценивается настоящим ее владельцем, игроком g_1, использующим ее в сельскохозяйственных целях, в 100 000 долларов. Один из ее возможных будущих владельцев, игрок g_2, планирующий ее промышленное использование, считает, что земля стоит 200 000 долларов, а возможный владелец, игрок g_3, собирающийся продавать ее затем по частям, оценивает ее стоимость в 300 000 долларов. Других ожидаемых покупателей нет.

Характеристическая функция задается следующим образом:

$$v(g_1) = 100000,\ v(g_2) = 0,\ v(g_3) = 0,$$

$$v(g_1, g_2) = 200000,\ v(g_1, g_3) = 300000,\ v(g_2, g_3) = 0,$$

$$v(g_1, g_2, g_3) = 300000.$$

Например, $v(g_1, g_2) = 200000$, поскольку эта коалиция могла бы использовать землю для размещения завода; $v(g_2, g_3) = 0$, потому что промышленник вместе с возможным будущим ее продавцом по частям не могут использовать землю без согласия нынешнего владельца и т. д.

Дележами в этой игре служат все векторы $y = (y_1, y_2, y_3)$, для которых $y_1 \geq 100000$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 300000$. Из теоремы 8 следует, что дележ x находится в ядре тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

$$y_1 \geq 100000,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,$$

$$y_1 + y_2 \geq 200000,\ y_1 + y_3 \geq 300000,\ y_2 + y_3 \geq 0,\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 300000.$$

Из приведенных условий следует: $y_2 = 0$, $y_1 \ge 200000$, $y_3 \le 300000$, $200000 \le y_1 \le 300000$ и $y_3 = 300000 - y_1$.

Таким образом, ядром в игре «землепользование» является множество $C = \{(y_1, 0, y_3) \mid 200000 \le y_1 \le 300000, y_1 + y_3 = 300000\}$. Этот результат интерпретируется так. Ядро содержит все такие ситуации, в которых будущий землевладелец, собирающийся продавать землю по частям, купит ее у первоначального владельца по цене между 200 000 и 300 000 долларов. Игрок g_1 останется с деньгами, а игрок g_3 с землей и без денег, уплаченных за нее. Игрок g_3 всегда может исключить игрока g_2 из сделки, заплатив не менее 200 000 долларов. Решение задачи не единственно, а определяет лишь множество дележей. Окончательную цену определяют социальные стандарты или способность вести переговоры.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите ситуацию, оптимальную по Парето, в задачах 5 – 13 раздела 11.

2. Рынок с двумя покупателями.

Игрок g_1 обладает некоторым предметом. Он оценивает его стоимость в a единиц. Игрок g_2 предполагает, что предмет стоит b единиц, а игрок g_3 оценивает его c единицами ($a < b < c$). Составьте характеристическую функцию, найдите ядро игры.

3. Правило большинства.

Коалиция выигрывает, если обладает большинством среди n игроков, и проигрывает в противном случае. Покажите, что функция

$$v(S) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ |S| > \dfrac{n}{2}, \\ 0, \ \textit{если} \ |S| \le \dfrac{n}{2}, \end{cases}$$

где $|S|$ – число игроков в коалиции S, является характеристической функцией.

13. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске оптимального решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности.

Например, принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как выигрыш города в целом по соображениям экологии, проигрыш отдельных предприятий и фирм из-за уменьшения количества проезжающих через город потенциальных покупателей и многие другие. При строительстве нового микрорайона нужно, с одной стороны, максимально повысить комфортность жилья, с другой стороны, по возможности, сэкономить средства, а эти два условия одновременно выполнить практически невозможно.

Задачи такого вида называют задачами многокритериальной оптимизации, и они возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием. Некоторые частные критерии могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи – индифферентны, поэтому процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними. Далеко не всегда есть возможность одновременного удовлетворения всех заданных условий. Чаще всего, когда говорят о решении многокритериальной задачи, имеют в виду какой-нибудь компромисс между изначально противоречивыми требованиями. А так как практически любая подобная ситуация допускает разные компромиссные решения, то и подходы к их поиску многочисленны и разнообразны.

Приведем некоторые методы решения задач многокритериальной оптимизации.

Метод последовательных уступок состоит в том, что заданное множество критериев упорядочивается по степени убывания их важности и производится последовательная оптимизация по каждому из них при условии, что значение предыдущего критерия отклоняется от своего оптимального значения не более чем на величину допустимой уступки.

Метод идеальной точки заключается в том, что в области допустимых значений неизвестных ищется такая их совокупность, которая способна обеспечить набор значений критериев, в том или ином смысле ближайший к наилучшему, как правило, недосягаемому. В частности, для двух критериев метод заключается в нахождении соответствующей точки на границе Парето.

Метод свертывания, как и **метод ограничений**, заключается в сведении многокритериальной задачи к задаче с одним критерием. Каждому из критериев $C_1, C_2, \ldots, C_k$ из некоторых соображений придается определенный вес $w_1, w_2, \ldots, w_k$, $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$. В результате получается один глобальный критерий $C = w_1C_1 + w_2C_2 + \ldots + w_kC_k$ и исходная задача сводится к обычной задаче линейного программирования с одним критерием: найти в области допустимых значений такой набор переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при котором глобальный критерий достигает максимального (минимального) значения.

Различие методов свертывания и ограничений состоит в разном подходе к определению весов $w_1, w_2, \ldots, w_k$.

Метод анализа иерархий основан на оценивании экспертами значимости каждого критерия для конечной цели.

Применение этих методов в реальных ситуациях, когда число критериев и переменных достаточно велико, требует значительного объема вычислений, эффективных алгоритмов и привлечения современных вычислительных средств.

Более подробное описание перечисленных методов можно найти в [14].

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит содержание теории игр?
2. Как можно классифицировать игры?
3. Дайте определение матричной игры.
4. Что представляют собой элементы платежной матрицы?
5. Как определяются верхняя и нижняя цены игры (соответственно, минимаксная и максиминная стратегии игроков), как они связаны между собой?
6. Дайте определение ситуации равновесия в чистых стратегиях в матричной игре.
7. Какая игра называется вполне определенной?
8. Как найти седловую точку в платежной матрице?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования ситуации равновесия в чистых стратегиях.
10. Что можно сказать о цене игры и об оптимальных стратегиях игроков в случае, когда платежная матрица имеет несколько седловых точек?
11. Сформулируйте лемму о масштабе. Где она применяется?
12. Как определяются смешанные стратегии игроков? Как можно реализовать смешанную стратегию?
13. Как определяются цена игры, оптимальные стратегии игроков (чистые и смешанные), решение игры?
14. Как найти математическое ожидание выигрыша в ситуации (x, y)?
15. Сформулируйте свойства оптимальных стратегий.
16. Как проверить, является ли тройка x, y, v решением игры?
17. Какие чистые стратегии игроков называются активными?
18. Сформулируйте теорему об активных стратегиях.
19. Что можно сказать о координате x_i вектора x^* (y_j вектора y^*), если $K(i, y^*) < v$ ($K(x^*, j) > v$)?
20. Сформулируйте основную теорему теории матричных игр.
21. Как можно решить (2×2) – игру?
22. В чем заключается графоаналитический метод решения, для каких матричных игр он применяется?
23. Дайте определения доминируемых стратегий для 1-го и 2-го игроков. Сформулируйте теорему о доминируемых стратегиях.
24. Сколько решений может иметь матричная игра? Как найти множество всех решений?

25. Как свести матричную игру к двойственной задаче линейного программирования?
26. Почему при сведении матричной игры к двойственной задаче линейного программирования необходимо, чтобы цена игры была положительной?
27. В чем заключаются недостатки и преимущества метода фиктивного разыгрывания, когда он применяется?
28. Приведите примеры применения матричных игр в экономике.
29. Что такое игра с «природой»?
30. Укажите различные критерии выбора оптимальных стратегий в играх с «природой».
31. В чем заключаются и когда применяются следующие критерии: Вальда, оптимизма, пессимизма, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа?
32. Как определяется матрица рисков?
33. Дайте определение биматричной игры.
34. Как найти ситуации равновесия в чистых стратегиях в биматричной игре?
35. Как найти ситуации равновесия в смешанных стратегиях в (2×2) – биматричных играх?
36. Как определяется ситуация, оптимальная по Парето?
37. Дайте определение дележа в кооперативной игре.
38. В каком случае говорят, что дележ x доминирует дележ y?
39. Как определяется ядро кооперативной игры?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бережная, Е.В., Бережной, В.И. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М., 2001.

2. Воробьев, Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1985.

3. Диксит, А. Стратегическое мышление в бизнесе, политике и личной жизни / А. Диксит. – М., 2007.

4. Дюбин, Г.Н., Суздаль, В.Г. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. – М., 1981.

5. Красс, М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики / М.С. Красс. – СПб., 2006.

6. Морозов В.В. Основы теории игр / В.В. Морозов. – М., 2002.

7. Мулен, Э. Теория игр. С примерами из математической экономики / Э. Мулен. – М., 1985.

8. Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М., 2004.

9. Петросян Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М., 1998.

10. Печерский, С.Л., Беляева, А.А. Теория игр для экономистов / С.Л. Печерский, А.А. Беляева. – СПб., 2001.

11. Робертс, Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф.С. Робертс. – М., 1986.

12. Хачатрян С.Р. Методы и модели решения экономических задач / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М., 2005.

13. Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски / А.С. Шапкин. – М., 2005.

14. Шикин, Е.В. Исследование операций / Е.В. Шикин. – М., 2006.

15. Экономико-математические методы и модели. – М., 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Пивоварова Ирина Викторовна
Гемба Виталия Николаевна

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Корректор В.Н. Петрова
Верстка автора

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 22.10.2009. Формат 60×84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,4.
Уч.-изд. л. 4,7. Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано: множительный участок ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57