Математическая логика и теория алгоритмов

Первухин Михаил Александрович

Логика предикатов

Лекция 8

Логическое следствие в логике предикатов

Через $\bar{x}$ обозначим кортеж переменных $x_1, \ldots, x_n$; через $\forall\bar{x}$ - $\forall x_1 \ldots x_n$.

Пусть $\varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_n(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ – формулы сигнатуры Σ. Формула ψ называется логическим следствием формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (обозначается $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$), если для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ

$$\mathfrak{A} \vDash \forall\bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})).$$

Пример. Доказать, что

$$\varphi_1(\bar{x}) \to \varphi_2(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}) \to \varphi_3(\bar{x}) \vDash \varphi_1(\bar{x}) \to \varphi_3(\bar{x}),$$

где $\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}), \varphi_3(\bar{x})$ – формулы сигнатуры Σ

Решение. Пусть $\mathfrak{A}=\langle A, \Sigma\rangle$ - произвольная алгебраическая система сигнатуры Σ. Необходимо показать, что

$$\mathfrak{A} \vDash \forall\bar{x}((\varphi_1(\bar{x}) \to \varphi_2(\bar{x})) \wedge (\varphi_2(\bar{x}) \to \varphi_3(\bar{x})) \to (\varphi_1(\bar{x}) \to \varphi_3(\bar{x}))).$$

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A, \bar{a} =< a_1, \ldots, a_n >$ и

$$\mathfrak{A} \vDash (\varphi_1(\bar{a}) \to \varphi_2(\bar{a})) \wedge (\varphi_2(\bar{a}) \to \varphi_3(\bar{a})).$$

Покажем, что

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(\bar{a}) \to \varphi_3(\bar{a}).$$

Предположим, что $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(\bar{a})$. Так как $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(\bar{a}) \to \varphi_2(\bar{a})$, то $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(\bar{a})$. Так как $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(\bar{a}) \to \varphi_3(\bar{a})$, то $\mathfrak{A} \vDash \varphi_3(\bar{a})$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ называется ***тождественно истинной,*** если для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ

$$\mathfrak{A} \vDash \forall \bar{x}\ \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ называется ***тождественно ложной,*** если формула $\neg\varphi(x_1, \dots, x_n)$ тождественно истина.

Множество формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ сигнатуры Σ называется ***противоречивым*** или ***несовместным***, если формула $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ тождественно ложна.

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, .., \varphi_m, \psi$ – формулы сигнатуры Σ. Следующие условия эквивалентны:

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vDash \psi$;
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vDash \varphi_m \to \psi$;
- $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \neg\psi\}$ – противоречивое множество формул;
- $\varphi_1, .., \varphi_m \to \psi$ – тождественно истинная формула;
- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \wedge \neg\psi$ – тождественно ложная формула.

Эквивалентные формулы логики предикатов

Формулы φ и ψ сигнатуры Σ называются эквивалентными (обозначается $\varphi \equiv \psi$), если $\varphi \vDash \psi$ или $\psi \vDash \varphi$.

Утверждение 1. В логике предикатов выполнимы все эквивалентности ИВ.

Утверждение 2. Пусть φ, ψ – формулы сигнатуры Σ, переменная x не является свободной переменной формулы ψ, переменная y не является свободной переменной формулы φ. Тогда

1) $\neg \exists x\varphi \equiv \forall x \neg\varphi$,

2) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \psi$,

3) $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \psi$,

4) $\exists x\varphi \equiv \exists x(\varphi)^{x}_{y}$

1′) $\neg \forall x\varphi \equiv \exists x \neg\varphi$,

2′) $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \psi$,

3′) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \psi$,

4′) $\forall x\varphi \equiv \forall x(\varphi)^{x}_{y}$

здесь запись $(\varphi)^{x}_{y}$ обозначает результат подстановки y вместо всех свободных вхождений в φ переменной x.

Пренексная нормальная форма в логике предикатов

Формула φ сигнатуры Σ называется ***бескванторной***, если она не содержит кванторов.

Бескванторная формула φ является ***дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой***, если она получается из некоторой формулы ψ АВ, находящейся в ДНФ (КНФ), заменой всех пропозициональных переменных $x_1, \dots, x_n$ на некоторые атомарные формулы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ сигнатуры Σ соответственно.

Говорят, что формула φ сигнатуры Σ находится в ***пренексной нормальной форме*** (ПНФ), если она имеет вид $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, где Q_i, - кванторы $(1 \leq i \leq n)$, $n \geq 0$, ψ – дизъюнктивная нормальная форма.

Теорема. Для любой формулы φ сигнатуры Σ существует ПНФ ψ, эквивалентная формуле φ.

Алгоритм приведения формулы к ПНФ

1. выражаем импликацию, участвующую в построении формулы, через дизъюнкцию и отрицание, используя эквивалентность

$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi;$$

2. используя законы де Моргана

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

и эквивалентности

$$\neg\exists\, x\varphi \equiv \forall x \neg\varphi, \neg\forall x\varphi \equiv \exists x \neg\varphi,$$

переносим все отрицания к атомарным подформулам и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;

Алгоритм приведения формулы к ПНФ

3. приводим формулу к виду $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, где Q_i - кванторы $(1 \leq i \leq n), n \geq 0$, ψ – бескванторная формула, пользуясь эквивалентностями

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \psi, \qquad \forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \psi,$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \psi, \qquad \forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \psi,$$

$$\exists x\varphi \equiv \exists x(\varphi)_y^x, \qquad \forall x\varphi \equiv \forall x(\varphi)_y^x.$$

4. используя закон дистрибутивности $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$,

преобразуем формулу ψ к дизъюнктивной нормальной форме.

Пример . Формулу $\chi_{\rightleftharpoons}\ x\ y\varphi(x,y) \rightarrow x\ y\psi(x,y)$ привести к ПНФ, считая формулы φ и ψ атомарными.